

Elemente

der

Differential-

und

Integralrechnung

zum

Gebrauche bei Vorlesungen

von

Johann August Grunert

Doctor der Philosophie und ordentlichem Professor der Mathematik an der Universität zu Greifswald, Ehrenmitgliede der Königl. Preuss. Akademie der Wissenschaft zu Erfurt.

Erster Theil.

Differentialrechnung.

Mit zwei Figurentafeln.

Leipzig, 1837.

Bei E. B. Schwickert.

Vorrede.

Im vorigen Jahre ward ich von dem Herrn Professor v. Schmöger in Regensburg zur Herausgabe eines Lehrbuchs der Differential- und Integralrechnung aufgefordert, welches auf den Königlich baierischen und andern Lehranstalten bei dem Unterrichte in diesen Wissenschaften zum Grunde gelegt werden könnte, und nahm um so weniger Anstand, diesem mit so vielem für mich höchst ehrenvollen Vertrauen gegen mich ausgesprochenen Wunsche nachzukommen, je lebhafter ich schon längst bei meinen eignen Vorlesungen den Mangel eines brauchbaren, dem neuesten Zustande der Wissenschaft gemäss bearbeiteten Lehrbuchs der sogenannten höhern Analysis gefühlt hatte. Seiner Bestimmung nach sollte dasselbe, wie auch schon der Titel besagt, keine vollständige Darstellung der Differential- und Integralrechnung liefern, sondern, mit Einschluss der wichtigsten Anwendungen auf die Geometrie, bloss die Elemente der beiden genannten Wissenschaften betreffen. Deshalb habe ich mir namentlich in der Integralrechnung ziemlich enge Grenzen stecken, und mich fast bloss mit der Integration der völlig entwickelten Differentiale mit einer veränderlichen Grösse begnügen

müssen, obgleich die Integration der Differentiale mit mehrern veränderlichen Grössen und der Differentialgleichungen nicht ganz übergangen, und auch Einiges über die so wichtige Theorie der bestimmten Integrale beigebracht worden ist. Das beste Exempelbuch zu diesem zweiten Theile des vorliegenden Lehrbuchs sind die bis jetzt noch unübertroffenen Integraltafeln von Meier Hirsch, die deshalb auch in den Händen keines Lehrers fehlen sollten. In der Differentialrechnung habe ich mir etwas grössere Ausführlichkeit erlauben zu dürfen geglaubt. Ueber die Art der Darstellung der viel besprochenen Grundprincipien dieser wichtigen mathematischen Doctrin konnte bei mir kein Zweifel seyn. Wer die trefflichen Untersuchungen Cauchy's und Crelle's über den sogenannten Rest der Taylor'schen und Maclaurin'schen Reihe kennt, und zu beurtheilen versteht, welcher überaus wichtige und einflussreiche Fortschritt durch dieselben in neuester Zeit in der mathematischen Analysis gemacht worden ist, wird mit mir gewiss die feste Ueberzeugung theilen, dass keine andere als die sogenannte Gränzenmethode geeignet ist, das herrliche Gebäude der Differentialrechnung und mathematischen Analysis überhaupt mit einem völlig sichern und unwandelbaren Fundamente zu versehen. Die sorgfältigste Darstellung der Sätze über den Rest der Taylor'schen und Maclaurin'schen Reihe, und die damit unmittelbar zusammenhängende Beurtheilung der Convergenz und Divergenz der Reihen in jedem einzelnen Falle, die bei dem gegenwärtigen Zustande der Analysis nie mehr erlassen werden kann, habe ich mir daher in diesem Buche, in dem man auch manche andere Eigenthümlichkeiten nicht unbemerkt lassen wird, zu einer ganz besondern Aufgabe gemacht. Eben so ist auch der Darstellung der Lehre von den Maximis und Minimis, von

den unbestimmt zu seyn scheinenden Werthen der Functionen, von der Differentiation der imaginären Functionen, so weit diese Lehren in eine bloss elementare Darstellung gehören, besondere Aufmerksamkeit gewidmet, ein möglichst reicher Vorrath von Uebungsbeispielen beigegeben, und auch auf praktische Anwendungen, die sich von der Differentialrechnung machen lassen, wie z. B. bei der sogenannten Fehlerrechnung für ebene und sphärische Dreiecke, Rücksicht genommen worden. Alle diese Gegenstände denke ich aber bald in einem aus zwei starken Bänden bestehenden Werke über die Differentialrechnung und deren Anwendung auf die Theorie der krummen Linien und krummen Flächen, dessen erster Theil schon vollständig ausgearbeitet vor mir liegt, ausführlicher und erschöpfender bearbeitet dem Publicum vorlegen zu können, wenn das vorliegende Elementarwerk sich einer günstigen Aufnahme erfreuen sollte.

Als ich an Herrn Professor v. Schmöger, der mir auch mit sehr zuvorkommender Bereitwilligkeit, die ich hier dankbar anzuerkennen mich verpflichtet fühle, seine eignen Hefte, aus denen ich namentlich einige zweckmässige Beispiele entlehnt habe, mitgetheilt hat, die Anfrage gerichtet hatte, ob nicht vielleicht besondere Vorschriften für die Ertheilung des Unterrichts in der Differential- und Integralrechnung auf den Königlich baierischen Lehranstalten existirten, antwortete mir dieser achtungswerthe Gelehrte:

> dass die Allerhöchste Verordnung nichts weiter bestimme, als dass der mathematische Unterricht mit grösster Gründlichkeit und nach gedruckten Lehrbüchern zu ertheilen sey.

Wie viele Weisheit in dieser Allerhöchsten Verordnung liegt, mit wie grosser Kenntniss des Wesens

des mathematischen Unterrichts dieselbe gegeben ist, übersieht jeder erfahrene Lehrer der Mathematik auf den ersten Blick. Mir hat der erste Theil derselben bei der Bearbeitung dieses Lehrbuchs stets als Endzweck und letztes Ziel meiner Bestrebungen vorgeschwebt, und gewiss würde es mir zur grössten Freude gereichen, wenn mir von Kennern das Zeugniss, nicht zu weit von demselben entfernt geblieben zu seyn, zu Theil werden sollte.

Greifswald, im September 1836.

Der Verfasser.

Inhalt des ersten Theils.

Differentialrechnung.

Differentialrechnung.

Erstes Kapitel.

Allgemeine Begriffe von den Functionen.

§. 1.

In der Differentialrechnung, so wie in der mathematischen Analysis, von welcher die Differentialrechnung ein Theil ist, überhaupt, unterscheidet man zwei Arten von Grössen, oder betrachtet vielmehr alle Grössen aus zwei wesentlich von einander verschiedenen Gesichtspunkten. Entweder betrachtet man nämlich eine Grösse aus einem solchen Gesichtspunkte, dass dieselbe beständig ein und denselben völlig bestimmten Werth behalten, den ihr ein für alle Mal beigelegten Werth nie ändern soll; oder man legt dieser Grösse überhaupt keinen bestimmten Werth bei, sondern betrachtet dieselbe aus einem solchen Gesichtspunkte, dass ihr jeder beliebige Werth beigelegt werden, sie ihren Werth auf jede beliebige Weise ändern kann. Grössen der ersten Art heissen **beständige** oder **constante** Grössen, und werden gewöhnlich durch die ersten Buchstaben des kleinen lateinischen Alphabets bezeichnet; Grössen der zweiten Art nennt man dagegen **veränderliche** oder **variable** Grössen, und bezeichnet dieselben gewöhnlich durch die letzten Buchstaben des kleinen lateinischen Alphabets, meistens durch x, y, z, t, v, u, ...

§. 2.

Jede von einer oder einigen veränderlichen Grössen abhängende Grösse, deren Werth also durch die, den in Rede stehenden veränderlichen Grössen beigelegten Werthe bestimmt wird, und sich mit diesen Werthen zugleich verändert, folglich jeder aus beliebigen constanten und einer oder einigen veränderlichen Grössen mittelst beliebiger analytischer Operationen zusammengesetzte analytische Ausdruck heisst eine **Function** dieser veränderlichen Grössen.

Der Ausdruck

$$ax + b\sqrt{a^2 - y^2}$$

ist z. B. eine Function der beiden veränderlichen Grössen x und y; $\sin x$ ist eine Function des veränderlichen Bogens x; die Peripherie und Fläche eines Kreises sind Functionen seines Halbmessers.

Jede Function ist, wie aus dem obigen allgemeinen Begriffe sich auf der Stelle ergiebt, selbst eine veränderliche Grösse; aber nicht eine veränderliche Grösse, der man jeden beliebigen Werth beilegen kann, sondern eine veränderliche Grösse, deren Werth durch die Werthe der veränderlichen Grössen, von denen die Function abhängt, bestimmt wird, weshalb man Functionen auch häufig **abhängige** veränderliche Grössen nennt, im Gegensatz der **unabhängigen** veränderlichen Grössen oder veränderlichen Grössen schlechthin, denen jeder beliebige Werth beigelegt werden kann.

Ein analytischer Ausdruck, dessen Werth sich nicht mit den Werthen der in ihm enthaltenen veränderlichen Grössen zugleich ändert, ist nur scheinbar eine Function dieser veränderlichen Grössen, und wird sich immer so umformen lassen, dass er, nachdem alle in ihm vorkommenden veränderlichen Grössen sich gegenseitig aufgehoben haben, bloss noch constante Grössen enthält, also natürlich selbst eine constante Grösse ist. So ist z. B. der Ausdruck

$$\frac{a(x^2-a^2)}{b(x-a)(x+a)}$$

nur scheinbar eine Function von x, indem sich derselbe, weil

$$(x-a)(x+a)=x^2-a^2$$

ist, sehr leicht auf den constanten Bruch $\frac{a}{b}$ zurückführen lässt.

§. 3.

Jenachdem eine Function nur von **einer**, oder von zwei, drei, vier, fünf u. s. w. veränderlichen Grössen abhängt, heisst sie respective eine **Function von einer oder von zwei, drei, vier, fünf u. s. w. veränderlichen Grössen**. Functionen, bei denen man die Anzahl der veränderlichen Grössen, von denen sie abhängen, unbestimmt lässt, heissen überhaupt **Functionen mehrerer veränderlicher Grössen**.

Um im Allgemeinen Functionen gewisser veränderlicher Grössen zu bezeichnen, bedient man sich der Zeichen F, f, φ, ψ oder ähnlicher, indem man diesen Zeichen die Symbole der veränderlichen Grössen, von denen die Function abhängig gedacht wird, in Parenthesen eingeschlossen, auf der rechten Seite beifügt, so dass also hiernach

$$F(x),\ f(x),\ \varphi(x),\ \psi(x)$$

Functionen von x, und eben so

$$F(x, y, z, \ldots),\ f(x, y, z, \ldots),\ \varphi(x, y, z, \ldots),\ \psi(x, y, z, \ldots)$$

Functionen von x, y, z, ... bezeichnen, deren Form übrigens ganz unbestimmt gelassen wird. Die Buchstaben F, f, φ, ψ und andere heissen, wenn der eben besprochene Gebrauch von ihnen gemacht wird, **Functionszeichen**. Functionen, die man rücksichtlich ihrer Form als verschieden betrachtet, müssen

jederzeit auch durch verschiedene Functionszeichen bezeichnet werden.

§. 4.

Alle analytischen Operationen pflegt man in zwei Klassen zu theilen. Die Addition, Subtraction, Multiplication, Division und das Potenziren, worunter bekanntlich auch das Wurzelausziehen enthalten ist, heissen, in so fern bei dem Potenziren der Potenzexponent nicht als variabel, sondern als constant betrachtet wird, algebraische Operationen; alle übrigen analytischen Operationen, die nicht unter den genannten enthalten sind, heissen transcendente Operationen.

Alle Functionen, in denen sämmtliche veränderliche Grössen bloss algebraischen Operationen unterworfen sind, heissen algebraische Functionen; jede Function dagegen, in welcher irgend eine veränderliche Grösse einer transcendenten Operation unterworfen ist, heisst eine in Bezug auf diese veränderliche Grösse transcendente Function, woraus also hervorgeht, dass Functionen mehrerer veränderlicher Grössen in Bezug auf gewisse der in ihnen enthaltenen veränderlichen Grössen algebraische, in Bezug auf andere der in ihnen enthaltenen veränderlichen Grössen dagegen transcendente Functionen seyn können.

Die einfachen transcendenten Functionen einer veränderlichen Grösse, welche wir im Folgenden vorzüglich einer sorgfältigen Untersuchung unterwerfen werden, sind die folgenden vier:

$$a^x,\ \log x,\ \sin x,\ Arc \sin x.$$

Die transcendenten Functionen von der ersten Form, nämlich Potenzen mit veränderlichen Exponenten, werden auch Exponentialgrössen genannt. $\log x$ mag im Folgenden immer den Logarithmus der veränderlichen Grösse x für die beliebige Basis b bezeichnen. $\sin x$ bezeichnet bekanntlich den Sinus des veränderlichen Bogens x in einem Kreise, dessen Halbmesser die Einheit ist. $Arc \sin x$, oder, nach der Schreibart der meisten neuern französischen Geometer, $Arc \sin (=x)$, bezeichnet einen Kreisbogen, dessen Sinus die veränderliche Grösse x ist, in einem mit der Einheit als Radius beschriebenen Kreise.

Zu der Klasse der transcendenten Functionen gehören auch die Functionen $\cos x$, $\tang x$, $\cot x$, $\sec x$, u. s. w. Jedoch sind diese Functionen keine einfachen Functionen, da sie sich bekanntlich sämmtlich durch die Function $\sin x$ ausdrücken lassen. Die Bedeutung der Symbole $Arc \cos x$, $Arc \tang x$, $Arc \cot x$, $Arc \sec x$, oder $Arc \cos (=x)$, $Arc \tang (=x)$, $Arc \cot (=x)$, $Arc \sec (=x)$ und ähnlicher wird aus dem Obigen leicht ohne weitere Erläuterung erhellen. Auch alle die durch diese Symbole dargestellten Functionen gehören zu der Klasse der transcendenten Functionen; aber keine dieser Functionen ist eine einfache Function, indem sich z. B., wie leicht erhellen wird, die Function $Arc \tang x$ auf die Form

$$Arc\sin\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

bringen lässt.

Die oben angegebenen vier einfachen transcendenten Functionen sind diejenigen, auf welche sich alle transcendenten Functionen, die wir im Folgenden betrachten werden, zurückführen lassen.

§. 5.

Die algebraischen Functionen werden in rationale und irrationale algebraische Functionen eingetheilt. Eine *rationale* algebraische Function ist eine solche, welche nach gehöriger Reduction und Transformation auf eine solche Form gebracht werden kann, dass keine veränderliche Grösse unter einem Wurzelzeichen oder mit einem gebrochenen Exponenten behaftet vorkommt. Kommt aber eine der in der Function enthaltenen veränderlichen Grössen unter einem Wurzelzeichen oder mit einem gebrochenen Exponenten behaftet vor, und lässt sich auf keine Weise von diesem gebrochenen Exponenten befreien; so heisst die Function in Bezug auf die in Rede stehende veränderliche Grösse *irrational*.

So ist z. B.

$$\frac{x^4-4x^2y^2+7}{3a^2x^2-y^2}$$

eine rationale algebraische Function der beiden veränderlichen Grössen x und y; die Function

$$\frac{x^5-4\sqrt{xy}+3\sqrt[3]{y}}{4a\sqrt[n]{x}-\sqrt[m]{y}}$$

ist dagegen sowohl in Bezug auf x, als auch in Bezug auf y irrational; die Function

$$\frac{2x^3-4x^2\sqrt[3]{y}+3y^2}{5x\sqrt{y}-\sqrt[6]{y}}$$

ist nur in Bezug auf die veränderliche Grösse y irrational.

§. 6.

Die rationalen algebraischen Functionen werden in ganze und gebrochene rationale algebraische Functionen eingetheilt. Eine rationale algebraische Function der veränderlichen Grössen x, y, z, ..., welche, indem P, P_1, P_2, P_3, ... P_n beliebige von x ganz unabhängige Functionen von y, z, ... bezeichnen, von der allgemeinen Form

$$P+P_1x+P_2x^2+P_3x^3+\ldots+P_nx^n$$

ist, oder wenigstens auf diese Form gebracht werden kann, heisst *in Bezug auf die veränderliche Grösse x eine ganze rationale algebraische Function des $n$ten Grades.*

Eine rationale algebraische Function von $x, y, z, \ldots$, welche in Bezug auf jede ihrer veränderlichen Grössen auf eine der obigen ähnliche Form gebracht werden kann, heisst überhaupt eine ganze rationale algebraische Function ihrer veränderlichen Grössen $x, y, z, \ldots$

Jede rationale algebraische Function dagegen, welche in Bezug auf eine ihrer veränderlichen Grössen nicht auf eine der obigen ähnliche Form gebracht, und daher bloss in Form eines Bruchs dargestellt werden kann, in dessen Nenner die in Rede stehende veränderliche Grösse enthalten ist, heisst in Bezug auf diese veränderliche Grösse eine gebrochene rationale algebraische Function. So ist z. B. die Function

$$\frac{x^4 - 3a^2x^2y^2 + az^2 - bz + c}{4a^2x^2 - b^2y^2}$$

sowohl in Bezug auf x, als auch in Bezug auf y, eine gebrochene rationale algebraische Function, in Bezug auf z dagegen offenbar eine ganze rationale algebraische Function des zweiten Grades.

§. 7.

Jede Function, welche durch ihre veränderlichen Grössen unmittelbar in einem völlig entwickelten Ausdruck dargestellt ist, heisst eine entwickelte Function ihrer veränderlichen Grössen, wie z. B. die folgende Function z der beiden veränderlichen Grössen x und y:

$$z = \frac{a + bx}{\alpha + \beta y}.$$

Wenn dagegen zwischen einer Function und ihren veränderlichen Grössen bloss eine Gleichung, die man in Bezug auf die Function als unbekannte Grösse auflösen müsste, wenn man die Function durch ihre veränderlichen Grössen völlig entwickelt darstellen wollte, gegeben ist; so heisst die Function eine unentwickelte Function ihrer veränderlichen Grössen. Hat man z. B. zwischen x und y die Gleichung

$$a - bx^3 + cxy^2 - dx^2y^3 = 0;$$

so ist kein Zweifel, dass y eine Function von x ist, da der Werth von y offenbar durch den Werth von x bestimmt wird. So lange aber die obige Gleichung in Bezug auf y als unbekannte Grösse nicht allgemein aufgelöst und y durch x und die constanten Grössen a, b, c, d in einem völlig entwickelten analytischen Ausdruck dargestellt ist, heisst y eine unentwickelte Function von x. Eben so ist, wenn zwischen x und φ die Gleichung

$$\varphi + x \sin\varphi = 0$$

gegeben ist, φ so lange eine unentwickelte Function von x, so lange diese Gleichung in Bezug auf φ als unbekannte Grösse nicht allgemein aufgelöst, und also φ nicht in einem völlig entwickelten analytischen Ausdruck durch x dargestellt ist.

§. 8.

Wenn der Werth $f(a)$, welchen die Function $f(x)$ von x für $x=a$ erhält, eine endliche reelle völlig bestimmte Grösse ist, und die Differenz

$$f(a\pm i)-f(a),$$

wo i eine beliebige positive Grösse bezeichnen soll, sich, wenn i sich der Null nähert, auch der Null immer mehr und mehr nähert, und der Null beliebig nahe gebracht werden kann, wenn man nur i der Null nahe genug kommen lässt; so sagt man, dass die Function $f(x)$ für $x=a$, oder in der Nähe des bestimmten Werths a der veränderlichen Grösse x stetig oder continuirlich sey. Sind dagegen für $x=a$ die obigen Bedingungen nicht erfüllt; so sagt man, dass für $x=a$ eine Unterbrechung der Stetigkeit der Function $f(x)$ Statt finde. Wenn endlich die Function $f(x)$ für alle zwischen zwei bestimmten Gränzen liegende Werthe von x stetig ist, oder für keinen zwischen diesen Gränzen liegenden Werth von x eine Unterbrechung der Stetigkeit der Function $f(x)$ Statt findet; so sagt man, dass dieselbe zwischen den beiden in Rede stehenden Gränzen stetig oder continuirlich sey.

Für $x=0$ findet z. B. eine Unterbrechung der Stetigkeit der Function ax^{-1} Statt. Eben so findet überhaupt für $x=\pm\frac{1}{2}(2k+1)\pi$, wo k eine beliebige positive oder negative ganze Zahl bezeichnet, eine Unterbrechung der Stetigkeit der Function $\tang x$ Statt.

Die Stetigkeit einer Function mehrerer veränderlicher Grössen lässt sich bloss in Bezug auf jede ihrer veränderlichen Grössen besonders beurtheilen, so dass also in dieser Beziehung etwas Weiteres dem Obigen hinzuzufügen nicht nöthig ist.

Zweites Kapitel.

Von den Differenzen der Functionen.

§. 9.

In der beliebigen Function

$$y=f(x)$$

der einen veränderlichen Grösse x lasse man sich diese Grösse um eine beliebige positive oder negative Grösse, die wir durch Δx bezeichnen wollen, verändern; so ist, wenn man den diesem veränderten Werthe $x+\Delta x$ der unabhängigen veränderlichen Grösse entsprechenden Werth der gegebenen Function durch $y^{(1)}$ bezeichnet,

$$y^{(1)}=f(x+\Delta x).$$

Zieht man nun von diesem veränderten Werthe der gegebenen Function den primitiven Werth derselben ab; so nennt man die Grösse

$$y^{(1)}-y=f(x+\Delta x)-f(x),$$

welche man auf diese Weise erhält, die Differenz der gegebenen Function, bezeichnet dieselbe durch Δy oder $\Delta f(x)$, und hat also immer in dieser Bezeichnung

$$\Delta y=y^{(1)}-y$$

oder

$$\Delta y=\Delta f(x)=f(x+\Delta x)-f(x).$$

§. 10.

Um den wichtigen Begriff der Differenz einer Function mit einer veränderlichen Grösse an einigen Beispielen zu erläutern, sey

$$1.\ y=ax^3;$$

so ist

$$y^{(1)}=a(x+\Delta x)^3,$$

und folglich

$$\Delta y=a\{(x+\Delta x)^3-x^3\},$$

d. i. nach gehöriger Entwickelung der dritten Potenz von $x+\Delta x$

$$\Delta y=a(3x^2+3x\Delta x+\Delta x^2)\Delta x;$$

wobei wir bemerken, dass überhaupt Δx^n immer die $n$te Potenz von Δx bezeichnen soll. Dagegen soll die Differenz der Function x^n jederzeit durch $\Delta(x^n)$, oder, um die Parenthesen zu ersparen, bloss durch $\Delta.x^n$ bezeichnet werden, indem wir überhaupt der Kürze wegen öfters Parenthesen durch hinter das Differenzenzeichen geschriebene Punkte ersetzen werden.

Ferner sey

$$2.\ y=a\log x;$$

so ist

$$y^{(1)}=a\log(x+\Delta x)$$

und folglich

$$\Delta y=a\{\log(x+\Delta x)-\log x\},$$

woraus, wenn man

$$x+\Delta x=x\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)$$

setzt, leicht

$$\Delta y=a\log\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)$$

erhalten wird.

Ist

$$3.\ y=a^x$$

und folglich

$$y^{(1)}=a^{x+\Delta x};$$

so ist

$$\Delta y=a^{x+\Delta x}-a^x=a^x(a^{\Delta x}-1).$$

Ist ferner

$$4.\ y=\sin x;$$

so ist

$$y^{(1)} = \sin(x + \Delta x),$$

und folglich

$$\Delta y = \sin(x + \Delta x) - \sin x,$$

woraus nach einer bekannten goniometrischen Formel leicht

$$\Delta y = 2 \sin \tfrac{1}{2}\Delta x \cos(x + \tfrac{1}{2}\Delta x)$$

erhalten wird.

Ist endlich

$$5. \quad y = \cos x;$$

so ist

$$y^{(1)} = \cos(x + \Delta x),$$

und folglich

$$\Delta y = \cos(x + \Delta x) - \cos x,$$

woraus sich nach einer bekannten goniometrischen Formel ferner

$$\Delta y = -2 \sin \tfrac{1}{2}\Delta x \sin(x + \tfrac{1}{2}\Delta x)$$

ergiebt.

Aehnliche Beispiele würden sich leicht mehrere geben lassen.

§. 11.

Von ganz vorzüglicher Wichtigkeit für das Folgende ist aber die allgemeine Entwickelung der Differenz der Function

$$y = x^n,$$

wo n eine positive ganze Zahl bezeichnen soll, in eine nach den positiven ganzen Potenzen von Δx fortschreitende Reihe.

Lässt man x sich um Δx verändern; so erhält man

$$y^{(1)} = (x + \Delta x)^n,$$

und folglich

$$\Delta y = (x + \Delta x)^n - x^n,$$

oder

$$\Delta y = x^n \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^n - x^n.$$

Um also die Differenz Δy in eine nach den positiven ganzen Potenzen von Δx fortschreitende Reihe zu entwickeln, wird man bloss die Potenz

$$\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^n$$

in eine solche Reihe zu entwickeln haben. Diese Entwickelung wird aber offenbar gefunden seyn, wenn man die Potenz

$$(1 + x)^n$$

in eine nach den positiven ganzen Potenzen von x fortschreitende Reihe entwickeln kann, indem man in dieser Entwickelung, um die erstere Entwickelung zu erhalten, bloss $\frac{\Delta x}{x}$ für x zu setzen braucht. Also reducirt sich unsere Aufgabe auf die Entwickelung der Potenz

$$(1 + x)^n$$

in eine nach den positiven ganzen Potenzen von x fortschreitende Reihe, welche wir daher zunächst zu finden suchen wollen.

Bevor wir aber zu dieser Entwickelung selbst übergehen können, müssen wir zuvörderst den folgenden für die Analysis überhaupt in vielfacher Beziehung wichtigen Satz beweisen.

§. 12.

Lehrsatz. Wenn, indem

$$A_0, A_1, A_2, A_3, \ldots A_n;$$
$$B_0, B_1, B_2, B_3, \ldots B_n$$

von x ganz unabhängige Grössen bezeichnen, für jedes x

$$A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + \ldots + A_n x^n$$
$$= B_0 + B_1 x + B_2 x^2 + B_3 x^3 + \ldots + B_n x^n$$

ist; so ist jederzeit

$$A_0 = B_0,\ A_1 = B_1,\ A_2 = B_2, \ldots A_n = B_n.$$

Beweis. Weil nach der Voraussetzung für jedes x

$$1.\quad A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \ldots + A_n x^n$$
$$= B_0 + B_1 x + B_2 x^2 + \ldots + B_n x^n$$

ist; so erhält man, wenn man $x = o$ setzt, auf der Stelle

$$2.\quad A_0 = B_0.$$

Durch Subtraction der Gleichung 2. von der Gleichung 1. ergiebt sich die ebenfalls für jedes x geltende Gleichung

$$3.\quad A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + \ldots + A_n x^n$$
$$= B_1 x + B_2 x^2 + B_3 x^3 + \ldots + B_n x^n.$$

Dividirt man, vorausgesetzt, dass x nicht $= 0$ ist, auf beiden Seiten dieser Gleichung mit x; so ergiebt sich die für jedes x, welches nicht $= 0$ ist, geltende Gleichung

$$4.\quad A_1 + A_2 x + A_3 x^2 + \ldots + A_n x^{n-1}$$
$$= B_1 + B_2 x + B_3 x^2 + \ldots + B_n x^{n-1}.$$

Lässt man nun aber x sich der Null nähern, so nähern sich die Grössen auf den beiden Seiten des Gleichheitszeichens in dieser Gleichung immer mehr und mehr respective den Grössen A_1 und B_1 als ihren Gränzen, und können denselben, wie sogleich erhellen wird, beliebig nahe gebracht werden, wenn man nur x nahe genug bei Null nimmt. Weil aber die beiden in Rede stehenden Grössen für jedes nicht verschwindende x, wie nahe diese Grösse auch der Null kommen mag, einander gleich sind; so müssen sich dieselben, wenn x sich der Null nähert, offenbar denselben Gränzen nähern, und es ist also

$$5.\quad A_1 = B_1.$$

Folglich gilt die Gleichung 4. offenbar auch für $x = 0$, also für jedes x.

Durch Subtraction der Gleichung 5. von der Gleichung 4. erhält man nun ferner die für jedes x geltende Gleichung

$$6.\quad A_2 x + A_3 x^2 + A_4 x^3 + \ldots + A_n x^{n-1}$$
$$= B_2 x + B_3 x^2 + B_4 x^3 + \ldots + B_n x^{n-1},$$

und aus dieser Gleichung folgt, wenn man, unter der Voraussetzung, dass x nicht $= 0$ ist, auf beiden Seiten mit x dividirt, die für jedes nicht verschwindende x geltende Gleichung

$$7.\quad A_2 + A_3 x + A_4 x^2 + \ldots + A_n x^{n-2}$$
$$= B_2 + B_3 x + B_4 x^2 + \ldots + B_n x^{n-2},$$

aus der sich dann ferner durch ein ganz ähnliches Raisonnement wie vorher

$$8.\quad A_2 = B_2$$

ergiebt, so dass also die Gleichung 7. auch für $x = 0$, folglich für jedes x gilt.

Wie man auf diese Art weiter schliessen kann, ist klar, und es ist also

$$A_0 = B_0,\ A_1 = B_1,\ A_2 = B_2, \ldots A_n = B_n,$$

wie bewiesen werden sollte.

§. 13.

Zusatz. Wenn sich eine beliebige Function $f(x)$ von x für jedes x sowohl in die Reihe

$$A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + \ldots + A_n x^n,$$

als auch in die Reihe

$$B_0 + B_1 x + B_2 x^2 + B_3 x^3 + \ldots + B_n x^n$$

entwickeln lässt; so ist jederzeit

$$A_0 = B_0,\ A_1 = B_1,\ A_2 = B_2, \ldots A_n = B_n.$$

Weil nämlich nach der Voraussetzung für jedes x

$$f(x) = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + \ldots + A_n x^n$$

und

$$f(x) = B_0 + B_1 x + B_2 x^2 + B_3 x^3 + \ldots + B_n x^n,$$

folglich für jedes x

$$A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + \ldots + A_n x^n$$
$$= B_0 + B_1 x + B_2 x^2 + B_3 x^3 + \ldots + B_n x^n$$

ist; so ist nach §. 12.

$$A_0 = B_0,\ A_1 = B_1,\ A_2 = B_2, \ldots A_n = B_n,$$

wie bewiesen werden sollte.

§. 14.

Nach diesen Vorbereitungen wollen wir nun zu der Entwickelung der Potenz

$$(1 + x)^n,$$

wo n immer eine positive ganze Zahl bezeichnet, in eine nach

den positiven ganzen Potenzen von x fortschreitende Reihe übergehen.

I. Dass überhaupt eine Entwickelung der Potenz

$$(1+x)^n$$

in eine nach den positiven ganzen Potenzen von x fortschreitende Reihe möglich ist, erhellet auf der Stelle, wenn man nur die auf einander folgenden Potenzen von $1+x$ von der ersten an durch gemeine Multiplication entwickelt, indem sich auf diese Weise

$$\begin{aligned}
1+x &= 1+x, \\
(1+x)^2 &= 1+2x+x^2, \\
(1+x)^3 &= 1+3x+3x^2+x^3, \\
(1+x)^4 &= 1+4x+6x^2+4x^3+x^4, \\
(1+x)^5 &= 1+5x+10x^2+10x^3+5x^4+x^5, \\
&\text{u. s. w.}
\end{aligned}$$

ergiebt.

Hieraus schliesst man, dass überhaupt die Potenz

$$(1+x)^n$$

durch eine Reihe von der Form

$$A_0+A_1 x+A_2 x^2+A_3 x^3+\ldots+A_n x^n,$$

wo

$$A_0, A_1, A_2, A_3, \ldots A_n$$

gewisse constante von x ganz unabhängige Coefficienten bezeichnen, dargestellt werden kann.

Ein völlig strenger und allgemeiner Beweis dieser Behauptung würde sich mittelst der gewöhnlich nach Jacob Bernoulli benannten Schlussart von n auf $n+1$ leicht führen lassen, wobei wir aber, da dieser Beweis nicht die mindeste Schwierigkeit darbietet, hier nicht verweilen.

Hauptsächlich kommt es jetzt auf die Bestimmung der constanten Coefficienten

$$A_0, A_1, A_2, A_3, \ldots A_n$$

an, zu der wir nun übergehen wollen.

II. Diese Bestimmung zerfällt in zwei Theile, nämlich in die Bestimmung der beiden ersten Coefficienten A_0 und A_1, und in die Bestimmung der übrigen Coefficienten.

Um nun zuvörderst die Coefficienten A_0 und A_1 zu bestimmen, multipliciren wir die Gleichung

$$(1+x)^n = A_0+A_1 x+A_2 x^2+A_3 x^3+\ldots+A_n x^n$$

auf beiden Seiten mit $1+x$. Dadurch erhalten wir die Gleichung

$$(1+x)^{n+1} = A_0 + \left.\begin{matrix}A_1\\+A_0\end{matrix}\right\} x + \left.\begin{matrix}A_2\\+A_1\end{matrix}\right\} x^2 + \ldots + \left.\begin{matrix}A_n\\+A_{n-1}\end{matrix}\right\} x^n + A_n x^{n+1},$$

und sehen also hieraus, dass die Coefficienten der nach den positiven ganzen Potenzen von x fortschreitenden Reihe, durch welche die Potenz

$$(1+x)^{n+1}$$

dargestellt wird,

$$A_0,\; A_0+A_1,\; A_1+A_2,\ldots A_{n-1}+A_n,\; A_n$$

sind, also aus den Coefficienten der nach den positiven ganzen Potenzen von x fortschreitenden Reihe, durch welche die Potenz

$$(1+x)^n$$

dargestellt wird, immer auf eine höchst einfache Weise durch blosse Addition gefunden werden können.

Was nun insbesondere die beiden ersten Coefficienten betrifft; so folgt hieraus, dass diese Coefficienten, weil dieselben für die erste Potenz von $1+x$ beide die Einheit sind, für die auf einander folgenden Potenzen dieser Grösse, von der ersten an, nach der Reihe

$$1,\; 1;$$
$$1,\; 1+1=2;$$
$$1,\; 1+2=3;$$
$$1,\; 1+3=4;$$
$$1,\; 1+4=5;$$
u. s. w.

sind.

Ueberhaupt sind also für die Potenz

$$(1+x)^n$$

die beiden ersten Coefficienten

$$A_0=1,\; A_1=n.$$

III. Um ferner die übrigen Coefficienten zu bestimmen, wollen wir x sich um die beliebige Grösse z verändern lassen, und wollen die Potenz

$$(1+x+z)^n$$

auf zwei verschiedene Arten in eine nach den positiven ganzen Potenzen von z fortschreitende Reihe zu entwickeln suchen.

Die erste Entwickelung erhält man, so weit man ihrer hier überhaupt bedarf, auf folgende Art.

Da für jedes x

$$(1+x)^n=A_0+A_1x+A_2x^2+A_3x^3+\ldots+A_nx^n$$

ist; so ist, wenn man $x+z$ für x setzt,

$$(1+x+z)^n=A_0+A_1(x+z)+A_2(x+z)^2+\ldots+A_n(x+z)^n$$

oder

$$(1+x+z)^n=A_0+A_1x\left(1+\frac{z}{x}\right)+A_2x^2\left(1+\frac{z}{x}\right)^2+\ldots+A_nx^n\left(1+\frac{z}{x}\right)^n.$$

Denkt man sich nun die Grösse auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens in eine nach den positiven ganzen Potenzen von z fortschreitende Reihe, die offenbar aus $n+1$ Gliedern bestehen wird, entwickelt; so sind die beiden ersten Glieder dieser Reihe, wie sich aus II. sehr leicht ergiebt,

$$A_0+A_1x+A_2x^2+A_3x^3+\ldots+A_nx^n$$

und

$$(A_1+2A_2x+3A_3x^2+4A_4x^3+\ldots+nA_nx^{n-1})z,$$

und mehr Glieder der in Rede stehenden Reihe brauchen wir zu unserm jetzigen Zweck überhaupt nicht.

Die zweite Entwickelung der Potenz

$$(1+x+z)^n$$

in eine nach den positiven ganzen Potenzen von z fortschreitende Reihe ergiebt sich auf folgende Art.

Es ist

$$(1+x+z)^n=(1+x)^n\left(1+\frac{z}{1+x}\right)^n.$$

Weil nun aber für jedes x

$$(1+x)^n=A_0+A_1x+A_2x^2+A_3x^3+\ldots+A_nx^n$$

ist; so ist

$$\left(1+\frac{z}{1+x}\right)^n=A_0+A_1\frac{z}{1+x}+A_2\left(\frac{z}{1+x}\right)^2+\ldots+A_n\left(\frac{z}{1+x}\right)^n,$$

und folglich

$$(1+x+z)^n=A_0(1+x)^n+A_1(1+x)^{n-1}z+A_2(1+x)^{n-2}z^2+\ldots+A_nz^n.$$

Vergleicht man nun die beiden Entwickelungen der Potenz

$$(1+x+z)^n$$

mit einander; so erhält man, weil diese Entwickelungen für jedes z gelten, nach dem in §. 13. bewiesenen Satze die beiden Gleichungen

$$A_0(1+x)^n=A_0+A_1x+A_2x^2+A_3x^3+\ldots+A_nx^n$$

und

$$A_1(1+x)^{n-1}=A_1+2A_2x+3A_3x^2+4A_4x^3+\ldots+nA_nx^{n-1},$$

deren erste, weil nach II.

$$A_0=1$$

ist, die bekannte Gleichung

$$(1+x)^n=A_0+A_1x+A_2x^2+A_3x^3+\ldots+A_nx^n$$

ist, von der wir hier überhaupt unsern Auslauf genommen haben, so dass uns also durch diese Gleichung nichts Neues gelehrt wird.

Sehr wichtig für unsern Zweck ist aber die zweite der beiden obigen Gleichungen.

Multiplicirt man nämlich auf beiden Seiten dieser Gleichung mit $1+x$; so erhält man die Gleichung

$$A_1(1+x)^n$$
$$=\left.\begin{matrix}A_1+2A_2\\+\ A_1\end{matrix}\right\}x+\left.\begin{matrix}3A_3\\+2A_2\end{matrix}\right\}x^2+\left.\begin{matrix}4A_4\\+3A_3\end{matrix}\right\}x^3+\ldots+\left.\begin{matrix}nA_n\\+(n-1)A_{n-1}\end{matrix}\right\}x^{n-1}+nA_nx^n,$$

oder, weil

$$(1+x)^n=A_0+A_1x+A_2x^2+A_3x^3+\ldots+A_nx^n$$

ist, die Gleichung

$$A_1(A_0+A_1x+A_2x^2+A_3x^3+\ldots+A_nx^n)$$
$$=\left.\begin{matrix}A_1+2A_2\\+\ A_1\end{matrix}\right\}x+\left.\begin{matrix}3A_3\\+2A_2\end{matrix}\right\}x^2+\left.\begin{matrix}4A_4\\+3A_3\end{matrix}\right\}x^3+\ldots+\left.\begin{matrix}nA_n\\+(n-1)A_{n-1}\end{matrix}\right\}x^{n-1}+nA_nx^n.$$

Weil nun diese Gleichung offenbar für jedes x gilt; so er-

geben sich mittelst des in §. 12. bewiesenen Satzes auf der Stelle die folgenden höchst merkwürdigen Gleichungen zwischen den Coefficienten, mit deren Bestimmung wir es hier zu thun haben:

$$\begin{aligned}
A_1 A_0 &= A_1,\\
A_1 A_1 &= 2A_2 + A_1,\\
A_1 A_2 &= 3A_3 + 2A_2,\\
A_1 A_3 &= 4A_4 + 3A_3,\\
&\text{u. s. w.}\\
A_1 A_{n-1} &= nA_n + (n-1)A_{n-1},\\
A_1 A_n &= nA_n.
\end{aligned}$$

Die erste dieser Gleichungen ist, weil nach II. bekanntlich $A_0 = 1$ ist, eine identische Gleichung; aus den übrigen erhält man aber, weil nach II.

$$A_1 = n = \frac{n}{1}$$

ist, sehr leicht die folgenden merkwürdigen Ausdrücke für die zu bestimmenden Coefficienten:

$$\begin{aligned}
A_1 &= \frac{n}{1},\\
A_2 &= \frac{A_1(n-1)}{2} = \frac{n(n-1)}{1.2},\\
A_3 &= \frac{A_2(n-2)}{3} = \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3},\\
A_4 &= \frac{A_3(n-3)}{4} = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4},\\
&\text{u. s. w.} \qquad \text{u. s. w.}\\
A_n &= \frac{A_{n-1}(n-(n-1))}{n} = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots3.2.1}{1.2.3.4\ldots n}.
\end{aligned}$$

So sind also nun die gesuchten Coefficienten sämmtlich und in völliger Allgemeinheit bestimmt.

IV. Setzen wir der Kürze wegen, wie in der Folge immer geschehen soll,

$$\begin{aligned}
n_1 &= \frac{n}{1},\\
n_2 &= \frac{n(n-1)}{1.2},\\
n_3 &= \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3},\\
n_4 &= \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4},\\
&\text{u. s. w.}\\
n_n &= \frac{n(n-1)(n-2)\ldots3.2.1}{1.2.3.4\ldots n};
\end{aligned}$$

so ist

$$(1+x)^n = 1 + n_1 x + n_2 x^2 + n_3 x^3 + \ldots + n_n x^n,$$

und folglich, weil

$$(a+b)^n = a^n\left(1+\frac{b}{a}\right)^n$$

ist, wie leicht erhellen wird,

$$(a+b)^n = a^n + n_1 a^{n-1} b + n_2 a^{n-2} b^2 + \ldots + n_{n-1} a b^{n-1} + n_n b^n.$$

Diese Reihe nennt man die Binomial-Reihe für positive ganze Exponenten, und den in vorstehender Gleichung enthaltenen Lehrsatz den Binomischen Lehrsatz oder das Binomial-Theorem für positive ganze Exponenten.

Die Grössen

$$n_1,\ n_2,\ n_3,\ n_4, \ldots n_{n-1},\ n_n$$

heissen die Binomial-Coefficienten der $n$ten Potenz.

V. Aus II. folgt, dass die Binomial-Coefficienten der auf einander folgenden Potenzen nach und nach auf folgende Art entstehen:

1, 1;
1 = 1, 1 + 1 = 2, 1 = 1;
1 = 1, 1 + 2 = 3, 2 + 1 = 3, 1 = 1;
1 = 1, 1 + 3 = 4, 3 + 3 = 6, 3 + 1 = 4, 1 = 1;
1 = 1, 1 + 4 = 5, 4 + 6 = 10, 6 + 4 = 10, 4 + 1 = 5, 1 = 1;
u. s. w. u. s. w.

Wird man also bei irgend einer Untersuchung, wie es in der That nicht selten der Fall ist, auf Zahlen geführt, welche auf diese Weise nach und nach entstehen; so sind dieselben jederzeit dem allgemeinen Gesetze der Binomial-Coefficienten, welches wir in III. kennen gelernt haben, unterworfen.

§. 15.

Kehren wir nun wieder zu der Entwickelung der Differenz der Function

$$y = x^n,$$

wo n eine positive ganze Zahl bezeichnet, in eine nach den positiven ganzen Potenzen von Δx fortschreitende Reihe, von welcher wir in §. 11. ausgingen, zurück; so haben wir

$$\Delta y = (x+\Delta x)^n - x^n.$$

Nach dem Binomischen Lehrsatze für positive ganze Exponenten ist aber, wenn wir uns der eingeführten Bezeichnung der Binomial-Coefficienten auch hier bedienen,

$$(x+\Delta x)^n = x^n + n_1 x^{n-1}\Delta x + n_2 x^{n-2}\Delta x^2 + \ldots \\ \ldots + n_{n-1} x \Delta x^{n-1} + n_n \Delta x^n.$$

Also ist

$$\Delta y = n_1 x^{n-1}\Delta x + n_2 x^{n-2}\Delta x^2 + n_3 x^{n-3}\Delta x^3 + \ldots \\ \ldots + n_{n-1} x \Delta x^{n-1} + n_n \Delta x^n,$$

und hierdurch folglich die gesuchte Entwickelung der Differenz der Function

$$y = x^n,$$

wenn nämlich, was man nie aus den Augen verlieren darf, n eine positive ganze Zahl bezeichnet, gefunden.

Nächst dieser Entwickelung der Differenz der Function $y = x^n$, wo n eine positive ganze Zahl bezeichnet, in eine nach den positiven ganzen Potenzen von Δx fortschreitende Reihe, sind für das Folgende einige allgemeine Formeln von besonderer Wichtigkeit, durch welche die Entwickelung der Differenzen der mittelst der einfachsten Rechnungsoperationen zusammengesetzten Functionen, d. i. der Functionen, welche Summen, Unterschiede, Producte oder Quotienten anderer Functionen sind, ungemein erleichtert wird. Die übrigens sehr einfache Entwickelung dieser allgemeinen Formeln soll daher jetzt unser nächstes Geschäft seyn.

§. 16.

Aufgabe. Wenn, indem a eine constante Grösse, p eine beliebige Function von x bezeichnet,

$$y = ap$$

ist, die Differenz von y durch die Differenz von p auszudrücken.

Auflösung. Setzt man in der Gleichung

$$y = ap$$

$x + \Delta x$ für x, und bezeichnet die diesem Werthe von x entsprechenden Werthe der Functionen y und p wie in §. 9. durch $y^{(1)}$ und $p^{(1)}$; so ist

$$y^{(1)} = ap^{(1)},$$

und folglich

$$\Delta y = y^{(1)} - y = a\{p^{(1)} - p\}.$$

Aber

$$\Delta p = p^{(1)} - p.$$

Also ist

$$\Delta y = a\Delta p,$$

und durch diese Formel unsere Aufgabe aufgelöst.

§. 17.

Aufgabe. Wenn, indem a eine beliebige constante Grösse ist, dagegen $p, q, s, \ldots u$ beliebige Functionen von x bezeichnen,

$$y = a \pm p \pm q \pm s \pm \ldots \pm u$$

ist, die Differenz von y durch die Differenzen von $p, q, s, \ldots u$ auszudrücken.

Auflösung. Aus der Gleichung

$$y = a \pm p \pm q \pm s \pm \ldots \pm u$$

ergiebt sich, wenn man $x + \Delta x$ für x setzt,

$$y^{(1)} = a \pm p^{(1)} \pm q^{(1)} \pm s^{(1)} \pm \ldots \pm u^{(1)}.$$

Folglich ist

$$\Delta y = \pm\{p^{(1)} - p\} \pm \{q^{(1)} - q\} \pm \{s^{(1)} - s\} \pm \ldots \pm \{u^{(1)} - u\},$$

d. i.

$$\Delta y = \pm \Delta p \pm \Delta q \pm \Delta s \pm \ldots \pm \Delta u,$$

wodurch unsere Aufgabe aufgelöst ist.

§. 18.

Dass die Differenz jeder constanten Grösse $= 0$ zu setzen ist, fällt sogleich in die Augen, lässt sich aber auch aus dem Vorhergehenden auf folgende sehr einfache Weise herleiten.

Es sei, indem a eine beliebige constante Grösse, p eine beliebige Function von x bezeichnet,

$$y = a + p;$$

so ist nach §. 17.

$$\Delta y = \Delta p.$$

Ist aber überhaupt von einer Differenz der Grösse a die Rede, so sieht man dieselbe offenbar eigentlich als eine Function von x an, und hat dann nach §. 17. auch

$$\Delta y = \Delta a + \Delta p.$$

Durch Gleichsetzung der beiden gefundenen Ausdrücke von Δy ergiebt sich

$$\Delta p = \Delta a + \Delta p,$$

und hieraus folgt

$$\Delta a = 0,$$

wie bewiesen werden sollte.

§. 19.

Mit Hülfe von §. 15., §. 16. und §. 17. ist man im Stande, die Differenz jeder ganzen rationalen algebraischen Function einer veränderlichen Grösse mit Leichtigkeit zu entwickeln.

Weil nämlich die allgemeine Form einer ganzen rationalen algebraischen Function einer veränderlichen Grösse

$$y = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \ldots + Lx^k$$

ist, wo $A, B, C, D, \ldots L$ constante Grössen bezeichnen; so ist nach §. 16. und §. 17.

$$\Delta y = B\Delta x + C\Delta . x^2 + D\Delta . x^3 + \ldots + L\Delta . x^k.$$

Entwickelt man nun nach §. 15. die sämmtlichen Differenzen der Potenzen von x in nach den positiven ganzen Potenzen von Δx fortschreitende Reihen; so wird man offenbar auch Δy leicht in eine eben solche Reihe entwickeln können, wie wir hier nur an dem folgenden Beispiele zeigen wollen.

Es sei

$$y = A + Bx + Cx^2 + Dx^3;$$

so ist nach §. 16. und §. 17.

$$\Delta y = B\Delta x + C\Delta . x^2 + D\Delta . x^3.$$

Nach §. 15. ist

$$\Delta . x^2 = 2x\,\Delta x + \Delta x^2,$$
$$\Delta . x^3 = 3x^2\Delta x + 3x\Delta x^2 + \Delta x^3.$$

Folglich ist

$$\Delta y = (B + 2Cx + 3Dx^2)\Delta x + (C + 3Dx)\Delta x^2 + D\Delta x^3.$$

Wie man sich in jedem andern Falle zu verhalten hat, wird hieraus deutlich genug erhellen.

§. 20.

Aufgabe. Wenn p und q Functionen von x sind, und

$$y = pq$$

ist, die Differenz von y durch die Differenzen von p und q auszudrücken.

Auflösung. Setzt man in der Gleichung

$$y = pq$$

$x + \Delta x$ für x; so erhält man die Gleichung

$$y^{(1)} = p^{(1)} q^{(1)}.$$

Weil aber bekanntlich

$$\Delta p = p^{(1)} - p, \; \Delta q = q^{(1)} - q,$$

also

$$p^{(1)} = p + \Delta p, \; q^{(1)} = q + \Delta q$$

ist; so ist

$$\begin{aligned} y^{(1)} &= (p + \Delta p)(q + \Delta q) \\ &= pq + p\Delta q + q\Delta p + \Delta p \, \Delta q \\ &= y + p\Delta q + q\Delta p + \Delta p \, \Delta q, \end{aligned}$$

und folglich

$$y^{(1)} - y = p\Delta q + q\Delta p + \Delta p \, \Delta q,$$

d. i.

$$\Delta y = p\Delta q + q\Delta p + \Delta p \, \Delta q,$$

wodurch unsere Aufgabe aufgelöst ist.

Zu bemerken ist noch, dass man diese Gleichung, wenn man auf beiden Seiten derselben mit

$$y = pq$$

dividirt, auch auf die elegante Form

$$\frac{\Delta y}{y} = \frac{\Delta p}{p} + \frac{\Delta q}{q} + \frac{\Delta p}{p} \cdot \frac{\Delta q}{q}$$

bringen kann.

§. 21.

Leicht ist es nun auch, die Differenzen der Producte mit mehr als zwei Factoren durch die Differenzen der einzelnen Factoren auszudrücken, wie wir an den folgenden Beispielen zeigen wollen.

Für $y = pqr$ ist nach §. 20.

$$\frac{\Delta y}{y} = \frac{\Delta . pq}{pq} + \frac{\Delta r}{r} + \frac{\Delta . pq}{pq} \cdot \frac{\Delta r}{r}.$$

Weil nun aber nach §. 20.

$$\frac{\Delta . pq}{pq} = \frac{\Delta p}{p} + \frac{\Delta q}{q} + \frac{\Delta p}{p} \cdot \frac{\Delta q}{q}$$

ist; so ist

$$\frac{\Delta y}{y}=\frac{\Delta p}{p}+\frac{\Delta q}{q}+\frac{\Delta r}{r}$$
$$+\frac{\Delta p}{p}.\frac{\Delta q}{q}+\frac{\Delta p}{p}.\frac{\Delta r}{r}+\frac{\Delta q}{q}.\frac{\Delta r}{r},$$
$$+\frac{\Delta p}{p}.\frac{\Delta q}{q}.\frac{\Delta r}{r}.$$

Für $y=pqrs$ ist nach §. 20.

$$\frac{\Delta y}{y}=\frac{\Delta.pqr}{pqr}+\frac{\Delta s}{s}+\frac{\Delta.pqr}{pqr}.\frac{\Delta s}{s},$$

und folglich, wenn man für

$$\frac{\Delta.pqr}{pqr}$$

den vorher gefundenen Ausdruck einführt:

$$\frac{\Delta y}{y}=\frac{\Delta p}{p}+\frac{\Delta q}{q}+\frac{\Delta r}{r}+\frac{\Delta s}{s}$$
$$+\frac{\Delta p}{p}.\frac{\Delta q}{q}+\frac{\Delta p}{p}.\frac{\Delta r}{r}+\frac{\Delta p}{p}.\frac{\Delta s}{s}+\frac{\Delta q}{q}.\frac{\Delta r}{r}$$
$$+\frac{\Delta q}{q}.\frac{\Delta s}{s}+\frac{\Delta r}{r}.\frac{\Delta s}{s}$$
$$+\frac{\Delta p}{p}.\frac{\Delta q}{q}.\frac{\Delta r}{r}+\frac{\Delta p}{p}.\frac{\Delta q}{q}.\frac{\Delta s}{s}+\frac{\Delta p}{p}.\frac{\Delta r}{r}.\frac{\Delta s}{s}$$
$$+\frac{\Delta q}{q}.\frac{\Delta r}{r}.\frac{\Delta s}{s}$$
$$+\frac{\Delta p}{p}.\frac{\Delta q}{q}.\frac{\Delta r}{r}.\frac{\Delta s}{s}.$$

Wie man sich bei Producten mit noch mehr Factoren zu verhalten hat, wird nun schon deutlich genug erhellen.

§. 22.

Aufgabe. Wenn p und q Functionen von x sind, und

$$y=\frac{p}{q}$$

ist, die Differenz von y durch die Differenzen von p und q auszudrücken.

Auflösung. Setzt man in der Gleichung

$$y=\frac{p}{q}$$

$x+\Delta x$ für x; so erhält man

$$y^{(1)}=\frac{p^{(1)}}{q^{(1)}},$$

oder, weil

$$p^{(1)}=p+\Delta p,\quad q^{(1)}=q+\Delta q$$

ist,

$$y^{(1)}=\frac{p+\Delta p}{q+\Delta q},$$

und folglich

$$\Delta y = y^{(1)} - y = \frac{p + \Delta p}{q + \Delta q} - \frac{p}{q},$$

woraus man nach leichter Rechnung

$$\Delta y = \frac{q\Delta p - p\Delta q}{q(q + \Delta q)}$$

erhält.

Dieselbe Formel ergiebt sich auch leicht auf folgende Art. Weil

$$y = \frac{p}{q}$$

ist, so ist

$$p = qy,$$

und folglich nach §. 20.

$$\Delta p = q\Delta y + y\Delta q + \Delta q\,\Delta y$$

oder

$$\Delta p = (q + \Delta q)\,\Delta y + y\Delta q.$$

Also ist

$$\Delta y = \frac{\Delta p - y\Delta q}{q + \Delta q},$$

und folglich, wenn man in diese Formel für y den Ausdruck

$$y = \frac{p}{q}$$

einführt, in völliger Uebereinstimmung mit dem Vorhergehenden,

$$\Delta y = \frac{q\Delta p - p\Delta q}{q(q + \Delta q)}.$$

§. 23.

Die Differenz Δy der beliebigen Function y von x ist, indem man Δx immer als constant betrachtet, offenbar im Allgemeinen selbst eine Function von x, und man kann also, indem man in der Differenz Δy die veränderliche Grösse x in $x + \Delta x$ übergehen lässt, auf ganz ähnliche Art, wie man die Differenz von y nimmt, die Differenz von Δy nehmen. Diese Differenz von Δy heisst die **zweite Differenz** der Function y, und Δy selbst wird in dieser Beziehung die **erste Differenz** von y genannt. Ganz auf dieselbe Weise ist nun ferner auch die zweite Differenz von y im Allgemeinen eine Function von x, so dass man also, Δx immer als constant betrachtend, auch in dieser zweiten Differenz wieder x in $x + \Delta x$ übergehen lassen und von dieser zweiten Differenz die erste Differenz nehmen kann. Diese erste Differenz der zweiten Differenz der Function y heisst dann die **dritte Differenz** von y. Dass man auf diese Art immer weiter gehen kann, ist klar, und man erhält also überhaupt die $(n+1)$te Differenz der Function y, wenn man von der $n$ten Differenz derselben, diese Differenz als eine Function von x, Δx stets als constant betrachtend, die erste Differenz nimmt.

Die erste, zweite, dritte, vierte, fünfte, u. s. w. $n$te Differenz der Function y bezeichnet man nach der Reihe durch

$$\Delta y,\ \Delta^2 y,\ \Delta^3 y,\ \Delta^4 y,\ \Delta^5 y, \ldots \Delta^n y, \ldots,$$

und nach den obigen allgemeinen Begriffen ist

$$\Delta^{n+1} y = \Delta \Delta^n y.$$

Auch wird nun sogleich der Sinn und die Richtigkeit der allgemeinen Gleichung

$$\Delta^{m+n} y = \Delta^m \Delta^n y$$

erhellen.

§. 24.

Als ein Beispiel zu dem Vorhergehenden wollen wir wieder die einfache Function

$$y = x^n,$$

wo n eine positive ganze Zahl seyn soll, betrachten, indem wir nach und nach $n = 1, 2, 3, 4, 5, \ldots$ setzen.

Für $y = x$ ist

$$\Delta y = \Delta x,$$

und die höhern Differenzen verschwinden folglich, weil Δx eine constante Grösse ist, nach §. 18. sämmtlich.

Für $y = x^2$ ist nach §. 15.

$$\Delta y = 2x\Delta x + \Delta x^2,$$

und folglich, wenn man nun hiervon nach §. 16. und §. 17., Δx immer als constant betrachtend, die Differenz nimmt,

$$\Delta^2 y = 2\Delta x^2,$$

so dass also in diesem Falle die zweite Differenz eine constante Grösse ist, demnach die höhern Differenzen nach §. 18. wieder sämmtlich verschwinden.

Für $y = x^3$ ist nach §. 15.

$$\Delta y = 3x^2\Delta x + 3x\Delta x^2 + \Delta x^3.$$

Nimmt man nun hiervon nach §. 16. und §. 17. die Differenz; so erhält man

$$\Delta^2 y = 3\Delta . x^2 \Delta x + 3\Delta x^3.$$

Nach §. 15. ist aber

$$\Delta . x^2 = 2x\Delta x + \Delta x^2,$$

und folglich nach gehöriger Substitution

$$\Delta^2 y = 2.3x\Delta x^2 + 6\Delta x^3.$$

Nimmt man nun hiervon nach §. 16. und §. 17. wieder die Differenz; so ergiebt sich

$$\Delta^3 y = 2.3\Delta x^3.$$

Also sind in diesem Falle, wo die dritte Differenz eine constante Grösse ist, die höhern Differenzen von der vierten an sämmtlich $= 0$.

Für $y = x^4$ ist nach §. 15.

$$\Delta y = 4x^3\Delta x + 6x^2\Delta x^2 + 4x\Delta x^3 + \Delta x^4.$$

Also ist nach §. 16. und §. 17.

$$\Delta^2 y = 4\Delta . x^3 \Delta x + 6\Delta . x^2 \Delta x^2 + 4\Delta x^4,$$

und folglich, weil nach §. 15.

$$\Delta . x^3 = 3x^2\Delta x + 3x\Delta x^2 + \Delta x^3,$$
$$\Delta . x^2 = 2x\Delta x + \Delta x^2$$

ist, nach gehöriger Substitution:

$$\Delta^2 y = 3.4x^2\Delta x^2 + 24x\Delta x^3 + 14\Delta x^4.$$

Nimmt man hiervon nach §. 16. und §. 17. wieder die Differenz; so erhält man

$$\Delta^3 y = 3.4\Delta . x^2\Delta x^2 + 24\Delta x^4,$$

und folglich, weil nach §. 15.

$$\Delta . x^2 = 2x\Delta x + \Delta x^2$$

ist, nach gehöriger Substitution:

$$\Delta^3 y = 2.3.4x\Delta x^3 + 36\Delta x^4.$$

Nimmt man nun hiervon wieder nach §. 16. und §. 17. die Differenz; so erhält man

$$\Delta^4 y = 2.3.4\Delta x^4,$$

und sieht also, dass im vorliegenden Falle die vierte Differenz constant ist, alle höhern Differenzen folglich verschwinden.

Wir wollen der Kürze wegen diesen an sich ganz leichten Calcul nicht weiter fortführen. Eine in mehrfacher Beziehung wichtige Bemerkung, zu welcher uns dieser Calcul ganz von selbst führt, dürfen wir aber nicht unerwähnt lassen.

Betrachten wir nämlich die nachstehenden vorher gefundenen Differenzen:

$$\Delta x = \Delta x = 1\Delta x,$$
$$\Delta^2 . x^2 = 2\Delta x^2 = 1.2\Delta x^2,$$
$$\Delta^3 . x^3 = 2.3.\Delta x^3 = 1.2.3\Delta x^3,$$
$$\Delta^4 . x^4 = 2.3.4\Delta x^4 = 1.2.3.4\Delta x^4;$$

so ist ein bestimmtes Gesetz, nach welchem diese sämmtlich constanten Differenzen fortschreiten, nicht zu verkennen, und wir werden durch die einfachste Induction sogleich zu dem Schlusse geführt, dass, wenn

$$y = x^n$$

und n eine positive ganze Zahl ist, allgemein

$$\Delta^n y = 1.2.3.4\ldots n\Delta x^n,$$

und daher diese Differenz jederzeit eine constante Grösse ist, die höhern Differenzen der gegebenen Function folglich sämmtlich verschwinden.

Dass nun dieser Schluss, in der Allgemeinheit, wie er so eben ausgesprochen worden, in der That völlig richtig ist, soll im folgenden Paragraphen bewiesen werden.

§. 25.

Lehrsatz. Wenn, indem n eine positive ganze Zahl bezeichnet, $y = x^n$ ist, so ist

$$\Delta^n y = 1.2.3.4 \ldots n \Delta x^n;$$

diese Differenz ist folglich jederzeit eine constante Grösse, und die höhern Differenzen der Function y von der $(n+1)$ten an verschwinden also sämmtlich.

Beweis. Dieser Lehrsatz lässt sich, ohne uns jetzt weiter auf den vorhergehenden Paragraphen zu beziehen, auf folgende Art beweisen.

Für $y = x$ ist

$$\Delta y = \Delta x = 1 \Delta x,$$

also

$$\Delta^2 y = \Delta^3 y = \Delta^4 y = \Delta^5 y = \ldots = 0,$$

und der Satz ist also in diesem Falle offenbar richtig.

Für $y = x^2$ ist nach §. 15.

$$\Delta y = 2x\Delta x + \Delta x^2.$$

Folglich ist nach §. 16. und §. 17.

$$\Delta^2 y = 2\Delta x \Delta x$$

oder

$$\Delta^2 y = 1.2 \Delta x^2;$$

also

$$\Delta^3 y = \Delta^4 y = \Delta^5 y = \Delta^6 y = \ldots = 0,$$

und daher der Satz auch in diesem Falle bewiesen.

Für $y = x^3$ ist nach §. 15.

$$\Delta y = 3x^2\Delta x + 3x\Delta x^2 + \Delta x^3.$$

Nimmt man nun hiervon zwei Mal nach einander die Differenz; so erhält man nach §. 16. und §. 17.

$$\Delta^3 y = 3\Delta^2 . x^2 \Delta x + 3\Delta^2 x \Delta x^2.$$

Nach dem Vorhergehenden ist aber

$$\Delta^2 . x^2 = 1.2 \Delta x^2, \quad \Delta^2 x = 0.$$

Also ist

$$\Delta^3 y = 1.2.3 \Delta x^3,$$

und folglich

$$\Delta^4 y = \Delta^5 y = \Delta^6 y = \Delta^7 y = \ldots = 0,$$

der Satz daher auch in diesem Falle bewiesen.

Für $y = x^4$ ist nach §. 15.

$$\Delta y = 4x^3\Delta x + 6x^2\Delta x^2 + 4x\Delta x^3 + \Delta x^4.$$

Nimmt man nun hiervon nach §. 16. und §. 17. drei Mal die Differenz nach einander; so erhält man

$$\Delta^4 y = 4\Delta^3 . x^3 \Delta x + 6\Delta^3 . x^2 \Delta x^2 + 4\Delta^3 x \Delta x^3.$$

Nach dem Vorhergehenden ist aber

$$\Delta^3 . x^3 = 1.2.3 \Delta x^3, \quad \Delta^3 . x^2 = 0, \quad \Delta^3 x = 0.$$

Also ist

$$\Delta^4 y = 1.2.3.4\,\Delta x^4,$$

und folglich

$$\Delta^5 y = \Delta^6 y = \Delta^7 y = \Delta^8 y = \ldots = 0,$$

der Satz daher auch in diesem Falle bewiesen.

Es erhellet nun auch schon, wie man auf diese Art ohne alle Schwierigkeit immer weiter gehen kann.

Ueberhaupt wollen wir jetzt aber annehmen, dass der Satz schon bis zur $(n-1)$ten Potenz von x bewiesen sey, und wollen zeigen, dass er unter dieser Voraussetzung jederzeit auch für die nächst folgende $n$te Potenz von x, d. i. für $y = x^n$ gelten muss, woraus dann ferner seine allgemeine Gültigkeit auf bekannte Weise folgt.

Für $y = x^n$ ist nach §. 15.

$$\Delta y = n_1 x^{n-1} \Delta x + n_2 x^{n-2} \Delta x^2 + n_3 x^{n-3} \Delta x^3 + \ldots$$
$$\ldots + n_{n-1} x \Delta x^{n-1} + n_n \Delta x^n.$$

Nimmt man nun hiervon $(n-1)$ mal nach einander die Differenz; so erhält man ohne Schwierigkeit nach §. 16. und §. 17.

$$\Delta^n y = n_1 \Delta^{n-1}.x^{n-1} \Delta x + n_2 \Delta^{n-1}.x^{n-2} \Delta x^2 + n_3 \Delta^{n-1}.x^{n-3} \Delta x^3 + \ldots$$
$$\ldots + n_{n-1} \Delta^{n-1} x \Delta x^{n-1}.$$

Weil aber nach der Voraussetzung der zu beweisende Satz bis zur $(n-1)$ten Potenz von x gilt; so ist

$$\Delta^{n-1}.x^{n-1} = 1.2.3\ldots(n-1)\Delta x^{n-1}$$

und

$$\Delta^{n-1}.x^{n-2} = 0,\ \Delta^{n-1}.x^{n-3} = 0, \ldots\ \Delta^{n-1} x = 0.$$

Also ist, weil bekanntlich $n_1 = n$ ist,

$$\Delta^n y = 1.2.3.4\ldots n \Delta x^n,$$

und folglich, weil diese Differenz eine constante Grösse ist,

$$\Delta^{n+1} y = \Delta^{n+2} y = \Delta^{n+3} y = \Delta^{n+4} y = \ldots = 0,$$

so dass also der Satz in der That für $y = x^n$ gilt, wenn er bis zur $(n-1)$ten Potenz von x bewiesen ist, und daher hierdurch nun nach einer bekannten, hier nicht zu wiederholenden, Schlussweise in völliger Allgemeinheit gerechtfertigt ist.

§. 26.

Mittelst des vorhergehenden Satzes kann man nun auch sehr leicht die $n$te Differenz jeder ganzen rationalen algebraischen Function des $n$ten Grades einer veränderlichen Grösse finden.

Weil nämlich die allgemeine Form jeder ganzen rationalen algebraischen Function des $n$ten Grades einer veränderlichen Grösse

$$y = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \ldots + Mx^{n-1} + Nx^n$$

ist, wo $A, B, C, D, \ldots N$ constante Grössen bezeichnen; so ist, wie mittelst §. 16. und §. 17. leicht gefunden wird,

$$\Delta^n y = B\Delta^n x + C\Delta^n.x^2 + D\Delta^n.x^3 + \ldots + M\Delta^n.x^{n-1} + N\Delta^n.x^n.$$

Weil nun aber nach §. 25.

$$\Delta^n x = 0,\ \Delta^n . x^2 = 0,\ \Delta^n . x^3 = 0, \ldots\ \Delta^n . x^{n-1} = 0$$

und

$$\Delta^n . x^n = 1.2.3.4 \ldots n \Delta x^n$$

ist; so ist

$$\Delta^n y = 1.2.3.4 \ldots n N \Delta x^n .$$

Hieraus erhellet zugleich, dass die $n$te Differenz einer jeden ganzen rationalen algebraischen Function des $n$ten Grades einer veränderlichen Grösse eine constante Grösse ist, und alle höhern Differenzen einer solchen Function von der $(n+1)$ten an also verschwinden.

§. 27.

Wie aus der beliebigen Function

$$y = f(x)$$

die Reihe

$$\Delta y,\ \Delta^2 y,\ \Delta^3 y,\ \Delta^4 y, \ldots\ \Delta^n y, \ldots .$$

hergeleitet werden kann, geht aus dem Vorhergehenden deutlich genug hervor.

Nach einem von dem hierbei zum Grunde liegenden verschiedenen Princip kann man aber aus der in Rede stehenden beliebigen Function jederzeit noch eine andere Reihe herleiten.

Setzt man nämlich in der Function

$$y = f(x)$$

$x + \Delta x$ für x, so erhält man die Function

$$f(x + \Delta x),$$

welche oben schon durch $y^{(1)}$ bezeichnet worden ist. Setzt man in dieser Function wieder $x + \Delta x$ für x, so erhält man die Function

$$f(x + 2\Delta x),$$

welche im Folgenden durch $y^{(2)}$ bezeichnet werden soll. Setzt man nun in dieser Function wieder $x + \Delta x$ für x, so ergiebt sich die Function

$$f(x + 3\Delta x),$$

welche wir im Folgenden durch $y^{(3)}$ bezeichnen wollen. Wie man auf diese Art weiter gehen kann, erhellet nun schon deutlich. Ueberhaupt soll im Folgenden die Function

$$f(x + n\Delta x)$$

durch $y^{(n)}$ bezeichnet werden.

Man kann also aus der beliebigen Function

$$y = f(x)$$

jederzeit die beiden Reihen

$$y,\ \Delta y,\ \Delta^2 y,\ \Delta^3 y, \ldots\ \Delta^n y, \ldots .$$

und

$$y,\ y^{(1)},\ y^{(2)},\ y^{(3)}, \ldots\ y^{(n)}, \ldots ,$$

welche in mehrfacher Rücksicht wichtig und merkwürdig sind, herleiten. Vorzüglich bemerkenswerth ist es, dass diese beiden Reihen in einer solchen Beziehung zu einander stehen, dass im-

mer jedes Glied der einen bloss durch Glieder der andern ausgedrückt werden kann. Dies soll nun zunächst in den beiden folgenden Aufgaben gezeigt werden.

§. 28.

Aufgabe. Jedes Glied der Reihe

$$y,\ \Delta y,\ \Delta^2 y,\ \Delta^3 y, \ldots \Delta^n y, \ldots$$

bloss durch Glieder der Reihe

$$y,\ y^{(1)},\ y^{(2)},\ y^{(3)}, \ldots y^{(n)}, \ldots$$

auszudrücken.

Auflösung. Weil

$$y^{(n-1)} = f(x + (n-1)\Delta x),\quad y^{(n)} = f(x + n\Delta x)$$

ist; so geht offenbar überhaupt $y^{(n)}$ aus $y^{(n-1)}$ hervor, wenn man in letzterer Function $x + \Delta x$ für x setzt.

Diese allgemeine Bemerkung liegt der folgenden Rechnung vorzüglich zum Grunde.

Zunächst ist nun, wie sich von selbst versteht,

$$y = y.$$

Nach dem allgemeinen Begriffe der Differenz einer Function ist ferner

$$\Delta y = y^{(1)} - y.$$

Hieraus erhält man bekanntlich $\Delta^2 y$, wenn man x in $x + \Delta x$ übergehen lässt, und dann Δy abzieht. Dies giebt, indem man zugleich die oben gemachte allgemeine Bemerkung in Anwendung bringt, auf der Stelle

$$\begin{aligned}\Delta^2 y &= y^{(2)} - y^{(1)}\\ &\quad - y^{(1)} + y\\ &= y^{(2)} - 2y^{(1)} + y.\end{aligned}$$

Hieraus erhält man $\Delta^3 y$, wenn man x in $x + \Delta x$ übergehen lässt, und dann $\Delta^2 y$ abzieht. Dies giebt, indem man immer die gleich zu Anfang gemachte allgemeine Bemerkung vor Augen behält,

$$\begin{aligned}\Delta^3 y &= y^{(3)} - 2y^{(2)} + y^{(1)}\\ &\quad - y^{(2)} + 2y^{(1)} - y\\ &= y^{(3)} - 3y^{(2)} + 3y^{(1)} - y.\end{aligned}$$

Hieraus erhält man $\Delta^4 y$, wenn man x in $x + \Delta x$ übergehen lässt, und dann $\Delta^3 y$ abzieht. Dies giebt

$$\begin{aligned}\Delta^4 y &= y^{(4)} - 3y^{(3)} + 3y^{(2)} - y^{(1)}\\ &\quad - y^{(3)} + 3y^{(2)} - 3y^{(1)} + y\\ &= y^{(4)} - 4y^{(3)} + 6y^{(2)} - 4y^{(1)} + y.\end{aligned}$$

Hieraus ergiebt sich $\Delta^5 y$, wenn man $x + \Delta x$ für x setzt, und dann $\Delta^4 y$ abzieht. Dadurch erhält man

$$\begin{aligned}\Delta^5 y &= y^{(5)} - 4y^{(4)} + 6y^{(3)} - 4y^{(2)} + y^{(1)}\\ &\quad - y^{(4)} + 4y^{(3)} - 6y^{(2)} + 4y^{(1)} - y\\ &= y^{(5)} - 5y^{(4)} + 10y^{(3)} - 10y^{(2)} + 5y^{(1)} - y.\end{aligned}$$

Auf diese Art immer weiter zu gehen, hat nicht die mindeste Schwierigkeit; auch übersieht man auf der Stelle das allgemeine Gesetz, nach welchem diese Ausdrücke fortschreiten.

Bei der geringsten Aufmerksamkeit kann nämlich nicht unbemerkt bleiben, dass die in diesen Formeln vorkommenden numerischen Coefficienten nach und nach ganz auf dieselbe Art entstehen, wie die in §. 14. V. betrachteten Zahlen, und daher nichts anders sind, als die Binomial-Coefficienten der auf einander folgenden Potenzen mit positiven ganzen Exponenten.

Dies vorausgesetzt, wird man sich, mit gehöriger Berücksichtigung der übrigen sogleich in die Augen fallenden Eigenthümlichkeiten der oben entwickelten Formeln, auf der Stelle von der Richtigkeit der folgenden allgemeinen Formel überzeugen:

$$\Delta^n y = y^{(n)} - n_1 y^{(n-1)} + n_2 y^{(n-2)} - n_3 y^{(n-3)} + \ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots + n_{n-1}(-1)^{n-1} y^{(1)} + n_n(-1)^n y.$$

§. 29.

Aufgabe. Jedes Glied der Reihe

$$y,\ y^{(1)},\ y^{(2)},\ y^{(3)},\ldots\ y^{(n)},\ldots.$$

bloss durch Glieder der Reihe

$$y,\ \Delta y,\ \Delta^2 y,\ \Delta^3 y,\ \ldots\ \Delta^n y,\ \ldots$$

auszudrücken.

Auflösung. Bekanntlich ist allgemein

$$y^{(n)} = f(x + n\Delta x).$$

Lässt man hierin x in $x + \Delta x$ übergehen und zieht $y^{(n)}$ ab; so erhält man

$$\Delta . y^{(n)} = f(x + (n+1)\Delta x) - f(x + n\Delta x),$$

d. i.

$$\Delta . y^{(n)} = y^{(n+1)} - y^{(n)}.$$

Also ist allgemein

$$y^{(n+1)} = y^{(n)} + \Delta . y^{(n)}.$$

Hieraus ergiebt sich nun mit Anwendung von §. 16. und §. 17. nach und nach

$$1.\quad y^{(1)} = y + \Delta y;$$

$$\begin{aligned} 2.\quad y^{(2)} &= y^{(1)} + \Delta . y^{(1)} \\ &= y + \Delta y \\ &\quad\ + \Delta y + \Delta^2 y \\ &= y + 2\Delta y + \Delta^2 y; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3.\quad y^{(3)} &= y^{(2)} + \Delta . y^{(2)} \\ &= y + 2\Delta y + \Delta^2 y \\ &\quad\ + \Delta y + 2\Delta^2 y + \Delta^3 y \\ &= y + 3\Delta y + 3\Delta^2 y + \Delta^3 y; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4.\quad y^{(4)} &= y^{(3)} + \Delta . y^{(3)} \\ &= y + 3\Delta y + 3\Delta^2 y + \Delta^3 y \\ &\quad\ + \Delta y + 3\Delta^2 y + 3\Delta^3 y + \Delta^4 y \\ &= y + 4\Delta y + 6\Delta^2 y + 4\Delta^3 y + \Delta^4 y; \end{aligned}$$

$$5.\quad y^{(5)} = y^{(4)} + \Delta . y^{(4)}$$
$$= y + 4\Delta y + 6\Delta^2 y + 4\Delta^3 y + \Delta^4 y$$
$$+ \Delta y + 4\Delta^2 y + 6\Delta^3 y + 4\Delta^4 y + \Delta^5 y$$
$$= y + 5\Delta y + 10\Delta^2 y + 10\Delta^3 y + 5\Delta^4 y + \Delta^5 y;$$
u. s. w.

Wie man auf diese Art weiter gehen kann, ist klar, und auf ganz ähnliche Art wie in §. 28. überzeugt man sich sogleich, dass allgemein

$$y^{(n)} = y + n_1 \Delta y + n_2 \Delta^2 y + n_3 \Delta^3 y + \ldots + n_n \Delta^n y$$

ist.

§. 30.

Unter den mannigfaltigen Anwendungen, welche sich von den in den beiden vorhergehenden Paragraphen gefundenen allgemeinen Formeln machen lassen, bietet sich zuerst folgende dar.

Wenn $y = x^n$ ist, wo n eine positive ganze Zahl bezeichnen soll, so ist allgemein

$$y^{(k)} = (x + k\Delta x)^n.$$

Also ist nach §. 28.

$$\Delta^n y = \{x + n\Delta x\}^n - n_1 \{x + (n-1)\Delta x\}^n + n_2 \{x + (n-2)\Delta x\}^n - \ldots$$
$$\ldots + n_{n-1}(-1)^{n-1} \{x + \Delta x\}^n + n_n (-1)^n x^n.$$

Nach §. 25. ist aber

$$\Delta^n y = 1.2.3.4 \ldots n\Delta x^n.$$

Also ist für jedes x und jedes Δx

$$1.2.3.4 \ldots n\Delta x^n$$
$$= \{x + n\Delta x\}^n - n_1 \{x + (n-1)\Delta x\}^n + n_2 \{x + (n-2)\Delta x\}^n - \ldots$$
$$\ldots + n_{n-1}(-1)^{n-1} \{x + \Delta x\}^n + n_n (-1)^n x^n,$$

eine offenbar in vieler Rücksicht sehr merkwürdige Summation.

Für $x = 0$ und $\Delta x = 1$ erhält man hieraus die merkwürdige Gleichung

$$1.2.3.4 \ldots n$$
$$= n^n - n_1(n-1)^n + n_2(n-2)^n - \ldots + n_{n-2}(-1)^{n-2}.2^n + n_{n-1}(-1)^{n-1}.1^n.$$

§. 31.

Eine besonders wichtige Anwendung finden die beiden in §. 28. und §. 29. aufgelösten Aufgaben bei dem **Interpoliren** oder **Einschalten**.

Im Allgemeinen lässt sich das **Interpolations-Problem** auf folgende Art aussprechen:

Wenn mehrere, bestimmten Werthen der unabhängigen veränderlichen Grösse entsprechende Werthe einer ihrer Form nach unbekannten Function gegeben sind, eine Function zu finden, deren Werthe für dieselben Werthe der unabhängigen veränderlichen Grösse den gegebenen Werthen der unbekannten Function gleich sind.

Dass dieses Problem hauptsächlich auch für die Naturwissenschaften von der grössten Wichtigkeit ist, lässt sich leicht übersehen.

Seyen nämlich überhaupt x und y zwei in der Natur vorkommende Grössen, die auf eine gewisse Art von einander abhängig sind, so dass die eine aus der andern gefunden werden kann. Das Gesetz dieser Abhängigkeit sey unbekannt, man kenne aber eine gewisse Anzahl bestimmter durch Beobachtung gefundener zusammen gehörender Werthe von x und y, die wir durch

$$x_1, y_1; x_2, y_2; x_3, y_3; x_4, y_4; \ldots x_n, y_n$$

bezeichnen wollen. Lässt sich nun die Form einer Function $y=f(x)$ von x so bestimmen, dass

$$f(x_1)=y_1, f(x_2)=y_2, f(x_3)=y_3, \ldots f(x_n)=y_n$$

ist; so wird offenbar durch die Function $y=f(x)$ das allgemeine Gesetz der Abhängigkeit der Grössen x und y von einander mit desto grösserer Wahrscheinlichkeit ausgedrückt werden, je grösser die Anzahl der gegebenen durch Beobachtung gefundenen zusammen gehörenden Werthe von x und y ist. Zugleich wird diese Wahrscheinlichkeit augenscheinlich erhöhet, wenigstens für den zwischen den Gränzen $x=x_1$ und $x=x_n$ liegenden Theil der unbekannten Function, wenn dieselbe zwischen den angegebenen Gränzen continuirlich ist, und die einzelnen gegebenen Werthe recht nahe bei einander, in einer möglichst stetigen Folge liegen. Dass mehr als Wahrscheinlichkeit auf diesem Wege nie zu erreichen ist, versteht sich von selbst; es ist aber auch bloss von einer empirischen Auffindung von Naturgesetzen die Rede, und es kommt vorzüglich darauf an, durch Vervielfältigung der Beobachtungen die Wahrscheinlichkeit so viel als möglich zu erhöhen.

§. 32.

Als der einfachste Fall der Interpolation ist der zu betrachten, wenn die gegebenen Werthe

$$x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots x_n$$

von x, welchen die ebenfalls gegebenen Werthe

$$y_1, y_2, y_3, y_4, \ldots y_n$$

der ihrer Form nach unbekannten Function $y=f(x)$ entsprechen, in gleichen Abständen von einander liegen, oder, was dasselbe sagt, eine gewöhnliche arithmetische Reihe bilden. Bloss dieser Fall soll hier näher betrachtet werden.

Die Aufgabe ist, eine Function $y=f(x)$ von x von solcher Beschaffenheit zu finden, dass dieselbe, wenn man für x die Werthe

$$x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots x_n$$

setzt, respective die Werthe

$$y_1,\; y_2,\; y_3,\; y_4, \ldots\, y_n$$

erhält.

Eine solche Function lässt sich auf folgende Art finden.

Nach §. 29. ist

$$y^{(n)} = y + n_1\Delta y + n_2\Delta^2 y + n_3\Delta^3 y + \ldots + n_n\Delta^n y,$$

oder, wenn wir der Kürze wegen $\Delta x = \alpha$ setzen,

$$f(x+n\alpha)$$
$$= f(x) + n_1\Delta f(x) + n_2\Delta^2 f(x) + n_3\Delta^3 f(x) + \ldots + n_n{}^n\Delta f(x).$$

Für $n\alpha = k$ ist also, wie leicht erhellen wird,

$$f(x+k) = f(x) + \frac{k}{\alpha}\Delta f(x) + \frac{k(k-\alpha)}{1.2\alpha^2}\Delta^2 f(x)$$
$$+ \frac{k(k-\alpha)(k-2\alpha)}{1.2.3\alpha^3}\Delta^3 f(x) + \ldots + \frac{k(k-\alpha)\ldots(k-(n-1)\alpha)}{1.2.3\ldots n\alpha^n}\Delta^n f(x),$$

oder, wenn wir $n-1$ für n setzen, d. i. für $k = (n-1)\alpha$:

$$f(x+k) = f(x) + \frac{k}{\alpha}\Delta f(x) + \frac{k(k-\alpha)}{1.2\alpha^2}\Delta^2 f(x)$$
$$+ \frac{k(k-\alpha)(k-2\alpha)}{1.2.3\alpha^3}\Delta^3 f(x) + \ldots + \frac{k(k-\alpha)\ldots(k-(n-2)\alpha)}{1.2.3\ldots(n-1)\alpha^{n-1}}\Delta^{n-1} f(x).$$

Für $k = (n-1)\alpha$ ist also auch

$$f(x_1+k) = f(x_1) + \frac{k}{\alpha}\Delta f(x_1) + \frac{k(k-\alpha)}{1.2\alpha^2}\Delta^2 f(x_1)$$
$$+ \frac{k(k-\alpha)(k-2\alpha)}{1.2.3\alpha^3}\Delta^3 f(x_1) + \ldots + \frac{k(k-\alpha)\ldots(k-(n-2)\alpha)}{1.2.3\ldots(n-1)\alpha^{n-1}}\Delta^{n-1} f(x_1).$$

Lässt man nun α die Differenz der arithmetischen Reihe

$$x_1,\; x_2,\; x_3,\; x_4, \ldots\, x_n$$

bezeichnen; so ist

$$y_1 = f(x_1),$$
$$y_2 = f(x_2) = f(x_1+\alpha),$$
$$y_3 = f(x_3) = f(x_1+2\alpha),$$
$$y_4 = f(x_4) = f(x_1+3\alpha),$$
u. s. w.
$$y_n = f(x_n) = f(x_1+(n-1)\alpha).$$

Also ist nach §. 28.

$$f(x_1) = y_1,$$
$$\Delta f(x_1) = y_2 - y_1,$$
$$\Delta^2 f(x_1) = y_3 - 2y_2 + y_1,$$
$$\Delta^3 f(x_1) = y_4 - 3y_3 + 3y_2 - y_1,$$
u. s. w.
$$\Delta^{n-1} f(x_1) = y_n - \frac{n-1}{1}y_{n-1} + \frac{(n-1)(n-2)}{1.2}y_{n-2} - \ldots \mp \frac{n-1}{1}y_2 \pm y_1,$$

und folglich nach dem Vorhergehenden für $k = (n-1)\alpha$:

$$f(x_1+k)= y_1$$
$$+\frac{k}{\alpha}\left\{y_2-y_1\right\}$$
$$+\frac{k(k-\alpha)}{1.2\alpha^2}\left\{y_3-2y_2+y_1\right\}$$
$$+\frac{k(k-\alpha)(k-2\alpha)}{1.2.3\alpha^3}\left\{y_4-3y_3+3y_2-y_1\right\}$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$+\frac{k(k-\alpha)..(k-(n-2)\alpha)}{1.2.3..(n-1)\alpha^{n-1}}\left\{y_n-\frac{n-1}{1}y_{n-1}+\frac{(n-1)(n-2)}{1.2}y_{n-2}-...\pm y_1\right\}.$$

Da für

$$k=0,\ \alpha,\ 2\alpha,\ 3\alpha,\ldots (n-1)\alpha$$

respective

$$x_1+k=x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ldots x_n$$

und folglich

$$f(x_1+k)=f(x_1),\ f(x_2),\ f(x_3),\ f(x_4),\ldots f(x_n)$$
$$=y_1,\ y_2,\ y_3,\ y_4,\ldots y_n$$

ist; so sieht man, dass die Grösse auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens in obiger Gleichung für

$$k=0,\ \alpha,\ 2\alpha,\ 3\alpha,\ldots (n-1)\alpha$$

respective die Werthe

$$y_1,\ y_2,\ y_3,\ y_4,\ldots y_n$$

erhält.

Setzt man nun

$$k=x-x_1;$$

so ist für

$$x-x_1=(n-1)\alpha$$

nach der obigen Gleichung

$$f(x)= y_1$$
$$+\frac{x-x_1}{\alpha}\left\{y_2-y_1\right\}$$
$$+\frac{(x-x_1)(x-x_1-\alpha)}{1.2\alpha^2}\left\{y_3-2y_2+y_1\right\}$$
$$+\frac{(x-x_1)(x-x_1-\alpha)(x-x_1-2\alpha)}{1.2.3\alpha^3}\left\{y_4-3y_3+3y_2-y_1\right\}$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$+\frac{(x-x_1)..(x-x_1-(n-2)\alpha)}{1.2.3..(n-1)\alpha^{n-1}}\left\{y_n-\frac{n-1}{1}y_{n-1}+\frac{(n-1)(n-2)}{1.2}y_{n-2}-...\pm y_1\right\}.$$

Für

$$k=0,\ \alpha,\ 2\alpha,\ 3\alpha,\ldots (n-1)\alpha$$

ist respective

$$x=x_1,\ x_1+\alpha,\ x_1+2\alpha,\ x_1+3\alpha,\ldots x_1+(n-1)\alpha,$$

d. i.

$$x=x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ldots x_n,$$

woraus, in Verbindung mit dem Vorhergehenden, nun auf der Stelle folgt, dass die Grösse auf der rechten Seite des Gleich-

heitszeichens in vorstehender Gleichung eine Function von x ist, welche für

$$x = x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4, \ldots\ x_n$$

respective die Werthe

$$y_1,\ y_2,\ y_3,\ y_4, \ldots\ y_n$$

erhält, und daher den Bedingungen unserer Aufgabe vollständig genügt.

§. 33.

Um die Anwendung der im vorigen Paragraphen entwickelten Interpolations-Formel an einem Beispiele zu erläutern, wollen wir mittelst derselben unter der Voraussetzung, dass man bloss mit einer Tafel bis zur zehnten Bruchstelle berechneter Logarithmen der natürlichen Zahlen von 1 bis 1000 versehen sey, den Logarithmus der Zahl

3,1415926536

berechnen, indem wir bei dieser Rechnung bloss bis zu den vierten Differenzen gehen.

Setzen wir der Kürze wegen

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= y_2 - y_1, \\ \Delta_2 &= y_3 - 2y_2 + y_1, \\ \Delta_3 &= y_4 - 3y_3 + 3y_2 - y_1, \\ \Delta_4 &= y_5 - 4y_4 + 6y_3 - 4y_2 + y_1; \end{aligned}$$

so ist die Formel, nach welcher wir zu rechnen haben, folgende:

$$\begin{aligned} f(x) = {} & y_1 \\ & + \frac{x - x_1}{\alpha} \Delta_1 \\ & + \frac{(x - x_1)(x - x_1 - \alpha)}{1.2\alpha^2} \Delta_2 \\ & + \frac{(x - x_1)(x - x_1 - \alpha)(x - x_1 - 2\alpha)}{1.2.3\alpha^3} \Delta_3 \\ & + \frac{(x - x_1)(x - x_1 - \alpha)(x - x_1 - 2\alpha)(x - x_1 - 3\alpha)}{1.2.3.4\alpha^4} \Delta_4, \end{aligned}$$

oder, wenn wir die ganze zu y_1 addirte Grösse auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens durch Δ bezeichnen:

$$f(x) = y_1 + \Delta.$$

Bemerken wir nun bloss, dass die Zahlen der ersten Vertikalreihe in dem folgenden Rechnungs-Schema die Logarithmen der Zahlen

3,14; 3,15; 3,16; 3,17; 3,18

sind; so wird die ganze folgende Rechnung ohne weitere Erläuterung verständlich seyn.

0,4969296481				
	13809057			
0,4983105538		− 43769		
	13765288		277	
0,4996870826		− 43492		− 3
	13721796		274	
0,5010592622		− 43218		
	13678578			
0,5024271200				

Also ist

$$y_1 = 0,4969296481$$
$$\Delta_1 = + 0,0013809057$$
$$\Delta_2 = - 0,0000043769$$
$$\Delta_3 = + 0,0000000277$$
$$\Delta_4 = - 0,0000000003$$

Ferner ist

$$x = 3,1415926536$$
$$x_1 = 3,1400000000$$
$$x - x_1 = 0,0015926536$$
$$\alpha = 0,0100000000$$

Also ist

$$\frac{x - x_1}{\alpha} = 0,15926536$$

$$\frac{x - x_1 - \alpha}{2\alpha} = \frac{x - x_1}{2\alpha} - \tfrac{1}{2} = - 0,42036732$$

$$\frac{x - x_1 - 2\alpha}{3\alpha} = \frac{x - x_1}{3\alpha} - \tfrac{2}{3} = - 0,61357821$$

$$\frac{x - x_1 - 3\alpha}{4\alpha} = \frac{x - x_1}{4\alpha} - \tfrac{3}{4} = - 0,71018366.$$

Hieraus erhält man nach der obigen Formel

$$\Delta = 0,0002202245$$

und folglich

$$\log 3,1415926536 = \left\{ \begin{array}{r} 0,4969296481 \\ +\ 0.0002202245 \\ \hline 0,4971498726. \end{array} \right.$$

In dieser Zahl ist noch die zehnte Bruchstelle richtig.

§. 34.

Wir schliessen dieses Kapitel mit einer kurzen Bemerkung über die Differenzen der Functionen mit mehrern von einander unabhängigen veränderlichen Grössen.

Lässt man in der Function

$$u = f(x, y, z, v, \ldots)$$

die von einander unabhängigen veränderlichen Grössen x, y, z, v,... sich respective um die beliebigen Grössen Δx, Δy, Δz, Δv,... ändern; so geht u in

$$u^{(1)} = f(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z, v + \Delta v, \ldots)$$

über, und die Differenz

$$u^{(1)} - u$$

heisst die **Differenz** von u, und wird durch Δu bezeichnet, so dass also immer

$$\Delta u = u^{(1)} - u$$
$$= f(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z, v + \Delta v, \ldots) - f(x, y, z, v, \ldots)$$

ist.

Auf ganz ähnliche Art wie bei den Functionen mit einer

veränderlichen Grösse ist ferner, indem man Δx, Δy, Δz, Δv,... immer als constant betrachtet,

$$\Delta^2 u = \Delta u,\ \Delta^3 u = \Delta\Delta^2 u,\ \Delta^4 u = \Delta\Delta^3 u,\ \Delta\Delta^5 u = \Delta\Delta^4 u, \ldots,$$

d. i. allgemein

$$\Delta^{n+1} u = \Delta\Delta^n u.$$

$\Delta^{n+1} u$ wird aus $\Delta^n u$ erhalten, wenn man, die Grössen Δx, Δy, Δz, Δv,... als constant betrachtend, in $\Delta^n u$ für x, y, z, v,... respective $x+\Delta x$, $y+\Delta y$, $z+\Delta z$, $v+\Delta v$,... setzt, und von dem diesen veränderten Werthen von x, y, z, v, ... entsprechenden Werthe von $\Delta^n u$ den ursprünglichen oder primitiven Werth dieser Differenz, d. h. $\Delta^n u$ selbst abzieht.

Drittes Kapitel.

Von den Differentialen der Functionen mit einer veränderlichen Grösse.

A. Allgemeiner Begriff des Differentials einer Function mit einer veränderlichen Grösse.

§. 35.

Die Function $y = f(x)$ der einen veränderlichen Grösse x geht, wenn x sich um Δx ändert, in

$$y^{(1)} = f(x+\Delta x)$$

über, und es ist

$$\Delta y = y^{(1)} - y = f(x+\Delta x) - f(x).$$

Wenn nun die Function y, wie wir im Folgenden immer voraussetzen wollen, in der Nähe von x, welches jetzt als irgend ein bestimmter Werth der unabhängigen veränderlichen Grösse betrachtet wird, stetig ist, und daher auch für diesen Werth der unabhängigen veränderlichen Grösse einen reellen Werth hat; so nähert sich, wenn Δx sich der Null nähert, auch Δy der Null, und kann derselben beliebig nahe gebracht werden, wenn man nur Δx der Null nahe genug kommen lässt. Dessen ungeachtet kann, wenn Δx sich der Null nähert, der Quotient oder das Verhältniss

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

sich einer bestimmten endlichen Gränze immer mehr und mehr und bis zu jedem beliebigen Grade nähern.

Ist z. B. $y=ax^4$; so ist nach §. 15. und §. 16.

$$\Delta y = a(4x^3 + 6x^2\Delta x + 4x\Delta x^2 + \Delta x^3)\Delta x,$$

und folglich

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 4ax^3 + 6ax^2\Delta x + 4ax\Delta x^2 + a\Delta x^3.$$

Nähert nun Δx sich der Null, so nähern die drei letzten Glieder dieses Ausdrucks sich offenbar ebenfalls der Null, und können derselben beliebig nahe gebracht werden, wenn man nur Δx der Null nahe genug kommen lässt. Daher nähert sich, wenn Δx sich der Null nähert, der Differenzenquotient

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

offenbar immer mehr und mehr der Grösse $4ax^3$ als seiner Gränze, und kann dieser Gränze auch beliebig nahe gebracht werden, wenn man nur Δx nahe genug bei Null annimmt.

Ist nun wieder überhaupt $y=f(x)$; so heisst die Gränze, welcher sich, wenn Δx sich der Null nähert, das Differenzenverhältniss oder der Differenzenquotient

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

immer mehr und mehr und bis zu jedem beliebigen Grade nähert, in so fern es nämlich, was jederzeit besonders nachgewiesen werden muss, eine solche Gränze wirklich giebt, der Differentialquotient der Function y, und wird durch

$$\frac{\partial y}{\partial x}$$

bezeichnet.

Zu bemerken ist hierbei, dass dieses Symbol des Differentialquotienten immer als ein einfaches Symbol, nicht als das Symbol einer durch Division zweier andern Grössen durch einander entstandenen Grösse zu betrachten ist, indem dieses Symbol immer bloss die Gränze bezeichnet, welcher der Differenzenquotient

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

sich immer mehr und mehr und bis zu jedem beliebigen Grade nähert, wenn Δx sich der Null nähert, in so fern es nämlich eine solche Gränze wirklich giebt.

Uebrigens hat es nicht an Vorschlägen zu andern Bezeichnungen des Differentialquotienten gefehlt. Unter diesen Bezeichnungen ist aber nur noch eine ihrer besondern Bequemlichkeit wegen in allgemeinen Gebrauch gekommen. Oft bezeichnet man nämlich den Differentialquotienten der Function y bloss durch y', oder, wenn man $y=f(x)$ setzt, durch $f'(x)$. Auch wir werden uns dieser Bezeichnung, wo es die Bequemlichkeit fordert, im Folgenden zuweilen bedienen.

Für die oben als Beispiel gebrauchte Function $y = ax^4$ ist, wie aus dem Obigen hervorgeht,

$$\frac{\partial y}{\partial x} = 4ax^3 \text{ oder } y' = 4ax^3.$$

Absichtlich wiederholen wir hier noch einmal, dass im Folgenden, wenn nicht ausdrücklich etwas Anderes bemerkt wird, immer angenommen werden soll, dass jede zur Betrachtung gezogene Function der veränderlichen Grösse x in der Nähe von x, welches immer als ein beliebiger bestimmter Werth der unabhängigen veränderlichen Grösse gedacht werden muss, stetig sey, und daher auch für diesen bestimmten Werth der unabhängigen veränderlichen Grösse einen reellen Werth habe.

§. 36.

Das Product, welches man erhält, wenn man den Differentialquotienten der Function $y = f(x)$ der einen veränderlichen Grösse x mit der beliebigen Grösse Δx multiplicirt, heisst das Differential der Function y und wird durch ∂y bezeichnet, so dass also, jenachdem man sich der einen oder der andern der Bezeichnungen des Differentialquotienten, welche wir im vorigen Paragraphen kennen gelernt haben, bedient,

$$\partial y = \frac{\partial y}{\partial x} \Delta x = y' \Delta x = f'(x) . \Delta x$$

ist.

Zu bemerken hat man hierbei noch, dass es gewöhnlich geworden ist, ∂x statt Δx zu schreiben, wobei man aber nicht aus den Augen verlieren darf, dass ∂x, wenn es allein steht, und nicht als ein Theil des Symbols des Differentialquotienten erscheint, jederzeit mit Δx völlig einerlei ist, und also, so wie Δx, immer eine ganz beliebige Grösse bezeichnet.

Setzt man nun ∂x statt Δx; so ergiebt sich aus dem Obigen

$$\partial y = \frac{\partial y}{\partial x} \partial x = y' \partial x = f'(x) . \partial x.$$

Für $y = ax^4$ ist nach dem vorigen Paragraphen

$$\partial y = 4ax^3 \partial x.$$

Der Differentialquotient wird, wie aus dem Vorhergehenden unmittelbar folgt, umgekehrt aus dem Differential erhalten, wenn man dieses durch ∂x dividirt.

Die Entwickelung der Differentiale aller Arten von Functionen, als analytischer Algorithmus gedacht, belegt man gewöhnlich mit dem allgemeinen Namen des Differentiirens, und die Wissenschaft, welche alle Arten von Functionen zu differentiiren lehrt, ist die Differentialrechnung.

B. Einige die Entwickelung der Differentiale der zusammengesetzten Functionen betreffende allgemeine Aufgaben.

§. 37.

Aufgabe. Wenn, indem a eine constante Grösse, p eine beliebige Function von x bezeichnet,

$$y = ap$$

ist, das Differential von y durch das Differential von p auszudrücken.

Auflösung. Nach §. 16. ist

$$\Delta y = a\Delta p$$

und folglich

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = a\frac{\Delta p}{\Delta x}.$$

Nähert nun Δx sich der Null, so nähert nach dem allgemeinen Begriffe des Differentialquotienten $\frac{\Delta p}{\Delta x}$ sich der Gränze $\frac{\partial p}{\partial x}$ immer mehr und mehr, und kann derselben beliebig nahe gebracht werden, wenn man nur Δx der Null nahe genug kommen lässt. Also nähert sich, wenn Δx sich der Null nähert, $a\frac{\Delta p}{\Delta x}$ oder $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, weil a eine constante Grösse ist, offenbar der Gränze $a\frac{\partial p}{\partial x}$ immer mehr und mehr und kann derselben beliebig nahe gebracht werden, wenn man nur Δx der Null nahe genug kommen lässt. Daher ist nach dem allgemeinen Begriffe des Differentialquotienten

$$1.\quad \frac{\partial y}{\partial x} = a\frac{\partial p}{\partial x},$$

und folglich, wenn man auf beiden Seiten mit ∂x multiplicirt,

$$\frac{\partial y}{\partial x}\partial x = a\frac{\partial p}{\partial x}\partial x,$$

d. i., weil nach dem allgemeinen Begriffe des Differentials

$$\partial y = \frac{\partial y}{\partial x}\partial x,\quad \partial p = \frac{\partial p}{\partial x}\partial x$$

ist,

$$2.\quad \partial y = a\partial p.$$

Weil $-y = -1.y$ ist; so ist hiernach auch immer $\partial(-y) = -1.\partial y$, d. i. $\partial(-y) = -\partial y$.

§. 38.

Aufgabe. Wenn, indem a eine beliebige constante Grösse ist, dagegen $p, q, s, \ldots u$ beliebige Functionen von x bezeichnen,

$$y = a \pm p \pm q \pm s \pm \ldots \pm u$$

ist, das Differential von y durch die Differentiale von $p, q, s, \ldots u$ auszudrücken.

Auflösung. Nach §. 17. ist

$$\Delta y = \pm \Delta p \pm \Delta q \pm \Delta s \pm \ldots \pm \Delta u$$

und folglich

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \pm \frac{\Delta p}{\Delta x} \pm \frac{\Delta q}{\Delta x} \pm \frac{\Delta s}{\Delta x} \pm \ldots \pm \frac{\Delta u}{\Delta x}.$$

Nach dem allgemeinen Begriffe des Differentialquotienten nähern sich, wenn Δx sich der Null nähert,

$$\frac{\Delta p}{\Delta x}, \frac{\Delta q}{\Delta x}, \frac{\Delta s}{\Delta x}, \ldots \frac{\Delta u}{\Delta x}$$

respective den Gränzen

$$\frac{\partial p}{\partial x}, \frac{\partial q}{\partial x}, \frac{\partial s}{\partial x}, \ldots \frac{\partial u}{\partial x}$$

immer mehr und mehr, und können denselben beliebig nahe gebracht werden, wenn man nur Δx der Null nahe genug kommen lässt. Also nähert sich, wenn Δx sich der Null nähert, die Grösse

$$\pm \frac{\Delta p}{\Delta x} \pm \frac{\Delta q}{\Delta x} \pm \frac{\Delta s}{\Delta x} \pm \ldots \pm \frac{\Delta u}{\Delta x},$$

d. i. $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, der Gränze

$$\pm \frac{\partial p}{\partial x} \pm \frac{\partial q}{\partial x} \pm \frac{\partial s}{\partial x} \pm \ldots \pm \frac{\partial u}{\partial x}$$

offenbar immer mehr und mehr und kann derselben beliebig nahe gebracht werden, wenn man nur Δx der Null nahe genug kommen lässt. Daher ist nach dem allgemeinen Begriffe des Differentialquotienten

$$1. \quad \frac{\partial y}{\partial x} = \pm \frac{\partial p}{\partial x} \pm \frac{\partial q}{\partial x} \pm \frac{\partial s}{\partial x} \pm \ldots \pm \frac{\partial u}{\partial x},$$

und folglich

$$\frac{\partial y}{\partial x}\partial x = \pm \frac{\partial p}{\partial x}\partial x \pm \frac{\partial q}{\partial x}\partial x \pm \frac{\partial s}{\partial x}\partial x \pm \ldots \pm \frac{\partial u}{\partial x}\partial x,$$

d. i. nach dem allgemeinen Begriffe des Differentials

$$2. \quad \partial y = \pm \partial p \pm \partial q \pm \partial s \pm \ldots \pm \partial u.$$

§. 39.

Ganz auf ähnliche Art wie in §. 18. gezeigt worden ist, dass die Differenz jeder constanten Grösse $= 0$ zu setzen ist, lässt sich nun auch aus der im vorigen Paragraphen aufgelösten Aufgabe herleiten, dass das Differential jeder constanten Grösse ebenfalls $= 0$ zu setzen ist.

Ist nämlich, indem a eine beliebige constante Grösse, p eine Function von x bezeichnet,

$$y = a + p;$$

so ist nach §. 38.

$$\partial y = \partial p.$$

Ist aber überhaupt von einem Differential der Grösse a die Rede;

so betrachtet man dieselbe offenbar eigentlich als eine Function von x, und in dieser Beziehung ist also nach §. 38. auch

$$\partial y = \partial a + \partial p.$$

Durch Gleichsetzung der beiden gefundenen Ausdrücke von ∂y erhält man

$$\partial p = \partial a + \partial p$$

und hieraus

$$\partial a = 0.$$

Weil nach dem allgemeinen Begriffe des Differentials

$$\partial a = \frac{\partial a}{\partial x}\partial x$$

ist; so ist natürlich auch

$$\frac{\partial a}{\partial x} = 0.$$

§. 40.

Aufgabe. Wenn p und q Functionen von x sind und

$$y = pq$$

ist, das Differential von y durch die Differentiale von p und q auszudrücken.

Auflösung. Nach §. 20. ist

$$\Delta y = p\Delta q + q\Delta p + \Delta p\Delta q$$

und folglich

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = p\frac{\Delta q}{\Delta x} + q\frac{\Delta p}{\Delta x} + \Delta p\frac{\Delta q}{\Delta x}.$$

Da nun, wenn Δx sich der Null nähert,

$$\frac{\Delta p}{\Delta x},\ \frac{\Delta q}{\Delta x},\ \Delta p$$

sich respective den Gränzen

$$\frac{\partial p}{\partial x},\ \frac{\partial q}{\partial x},\ 0$$

nähern, und denselben beliebig nahe gebracht werden können, wenn man nur Δx nahe genug bei Null annimmt; so nähern sich

$$p\frac{\Delta q}{\Delta x},\ q\frac{\Delta p}{\Delta x},\ \Delta p\frac{\Delta q}{\Delta x},$$

wenn Δx sich der Null nähert, offenbar respective den Gränzen

$$p\frac{\partial q}{\partial x},\ q\frac{\partial p}{\partial x},\ 0,$$

und können denselben beliebig nahe gebracht werden, wenn man nur Δx der Null nahe genug kommen lässt. Also nähert sich, wenn Δx sich der Null nähert, die Grösse

$$p\frac{\Delta q}{\Delta x} + q\frac{\Delta p}{\Delta x} + \Delta p\frac{\Delta q}{\Delta x},$$

d. i. der Differenzenquotient $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, offenbar der Gränze

$$p\frac{\partial q}{\partial x}+q\frac{\partial p}{\partial x},$$

und kann derselben beliebig nahe gebracht werden, wenn man nur Δx der Null nahe genug kommen lässt. Daher ist nach dem allgemeinen Begriffe des Differentialquotienten

$$1.\quad \frac{\partial y}{\partial x}=p\frac{\partial q}{\partial x}+q\frac{\partial p}{\partial x},$$

und folglich

$$\frac{\partial y}{\partial x}\partial x=p\frac{\partial q}{\partial x}\partial x+q\frac{\partial p}{\partial x}\partial x,$$

d. i. nach dem allgemeinen Begriffe des Differentials

$$2.\quad \partial y=p\partial q+q\partial p.$$

Angenommen wird hierbei, wie immer, dass alle Differentialquotienten endliche reelle völlig bestimmte Grössen sind.

Dividirt man auf beiden Seiten der Gleichung 2. mit $y=pq$; so erhält man

$$3.\quad \frac{\partial y}{y}=\frac{\partial p}{p}+\frac{\partial q}{q},$$

welches eine vorzüglich elegante Form der in Rede stehenden Gleichung ist.

§. 41.

Für $y=pqr$, wo p, q, r Functionen von x bezeichnen, ist nach §. 40.

$$\frac{\partial y}{y}=\frac{\partial . pq}{pq}+\frac{\partial r}{r},$$

und folglich

$$1.\quad \frac{\partial y}{y}=\frac{\partial p}{p}+\frac{\partial q}{q}+\frac{\partial r}{r}.$$

Für $y=pqrs$, wo p, q, r, s Functionen von x bezeichnen, ist nach §. 40.

$$\frac{\partial y}{y}=\frac{\partial . pqr}{pqr}+\frac{\partial s}{s},$$

und folglich nach 1.

$$2.\quad \frac{\partial y}{y}=\frac{\partial p}{p}+\frac{\partial q}{q}+\frac{\partial r}{r}+\frac{\partial s}{s}.$$

Für $y=pqrst$, wo p, q, r, s, t Functionen von x bezeichnen, ist nach §. 40.

$$\frac{\partial y}{y}=\frac{\partial . pqrs}{pqrs}+\frac{\partial t}{t},$$

und folglich nach 2.

$$3.\quad \frac{\partial y}{y}=\frac{\partial p}{p}+\frac{\partial q}{q}+\frac{\partial r}{r}+\frac{\partial s}{s}+\frac{\partial t}{t}.$$

Auf diese Art weiter zu gehen, hat nicht die geringste Schwierigkeit.

§. 42.

Aufgabe. Wenn p und q Functionen von x sind und

$$y = \frac{p}{q}$$

ist, das Differential von y durch die Differentiale von p und q auszudrücken.

Auflösung. Nach §. 22. ist

$$\Delta y = \frac{q\Delta p - p\Delta q}{q(q + \Delta q)},$$

und folglich

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{q\frac{\Delta p}{\Delta x} - p\frac{\Delta q}{\Delta x}}{q(q + \Delta q)}.$$

Lässt man nun Δx sich der Null nähern; so nähern

$$\frac{\Delta p}{\Delta x},\ \frac{\Delta q}{\Delta x},\ \Delta q$$

sich respective den Gränzen

$$\frac{\partial p}{\partial x},\ \frac{\partial q}{\partial x},\ 0,$$

und können denselben beliebig nahe gebracht werden, wenn man nur Δx der Null nahe genug kommen lässt. Also nähern sich

$$q\frac{\Delta p}{\Delta x},\ p\frac{\Delta q}{\Delta x},\ q + \Delta q,\ q(q + \Delta q),$$

wenn Δx sich der Null nähert, offenbar respective den Gränzen

$$q\frac{\partial p}{\partial x},\ p\frac{\partial q}{\partial x},\ q,\ q^2,$$

und können denselben beliebig nahe gebracht werden, wenn man nur Δx der Null nahe genug kommen lässt. Die Grösse

$$\frac{q\frac{\Delta p}{\Delta x} - p\frac{\Delta q}{\Delta x}}{q(q + \Delta q)},$$

d.i. der Differenzenquotient $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, nähert sich folglich, wenn Δx sich der Null nähert, offenbar der Gränze

$$\frac{q\frac{\partial p}{\partial x} - p\frac{\partial q}{\partial x}}{q^2},$$

und kann derselben beliebig nahe gebracht werden, wenn man nur Δx der Null nahe genug kommen lässt. Daher ist nach dem allgemeinen Begriffe des Differentialquotienten

$$1.\quad \frac{\partial y}{\partial x} = \frac{q\frac{\partial p}{\partial x} - p\frac{\partial q}{\partial x}}{q^2},$$

und folglich

$$\frac{\partial y}{\partial x}\partial x = \frac{q\frac{\partial p}{\partial x}\partial x - p\frac{\partial q}{\partial x}\partial x}{q^2},$$

d. i. nach dem allgemeinen Begriffe des Differentials

$$2.\quad \partial y = \frac{q\partial p - p\partial q}{q^2}.$$

Bemerken kann man noch, dass sich diese Formel auch leicht aus der in §. 40. gefundenen Formel herleiten lässt.

Weil nämlich

$$y = \frac{p}{q}$$

ist; so ist

$$qy = p.$$

Also ist nach §. 40.

$$\partial p = q\partial y + y\partial q.$$

Bestimmt man aus dieser Gleichung ∂y; so ergiebt sich

$$\partial y = \frac{\partial p - y\partial q}{q},$$

und folglieh, wenn man

$$y = \frac{p}{q}$$

setzt,

$$\partial y = \frac{q\partial p - p\partial q}{q^2},$$

ganz übereinstimmend mit dem Vorhergehenden.

§. 43.

Aufgabe. Wenn z eine Function von y und y eine Function von x ist, den Differentialquotienten der Function z in Bezug auf die unabhängige veränderliche Grösse x zu finden.

Auflösung. Man lasse x sich um Δx verändern, so ändert sich y um Δy, und diese Veränderung von y bringt dann ferner die Veränderung Δz von z hervor. Nähert sich nun Δx der Null; so nähert sich, wobei §. 35. zu vergleichen ist, auch Δy der Null und kann derselben beliebig nahe gebracht werden, wenn man nur Δx nahe genug bei Null annimmt. Die Gränzen, denen sich die Differenzenquotienten

$$\frac{\Delta z}{\Delta y} \text{ und } \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

immer mehr und mehr und bis zu jedem beliebigen Grade nähern, wenn Δx sich der Null nähert, sind also nach dem allgemeinen Begriffe des Differentialquotienten respective

$$\frac{\partial z}{\partial y} \text{ und } \frac{\partial y}{\partial x},$$

wo bei dem ersten dieser beiden Differentialquotienten y als eine unabhängige veränderliche Grösse zu betrachten, und bei der Entwickelung dieses Differentialquotienten jederzeit wie eine solche zu behandeln ist.

Das Product

$$\frac{\Delta z}{\Delta y}\cdot\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

nähert sich folglich, wenn Δx sich der Null nähert, immer mehr und mehr und bis zu jedem beliebigen Grade der Gränze

$$\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial x}.$$

Da nun aber offenbar

$$\frac{\Delta z}{\Delta x}=\frac{\Delta z}{\Delta y}\cdot\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

ist; so nähert sich auch der Differenzenquotient

$$\frac{\Delta z}{\Delta x},$$

wenn Δx sich der Null nähert, immer mehr und mehr und bis zu jedem beliebigen Grade der Gränze

$$\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial x}$$

und nach dem allgemeinen Begriffe des Differentialquotienten ist folglich

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial x}.$$

Der Sinn dieser Gleichung ist folgender: Wenn z eine Function von y, y eine Function von x ist, und der Differentialquotient von z in Bezug auf die unabhängige veränderliche Grösse x entwickelt werden soll; so braucht man bloss den Differentialquotienten

$$\frac{\partial z}{\partial y}$$

von z in Bezug auf y als unabhängige veränderliche Grösse, und den Differentialquotienten

$$\frac{\partial y}{\partial x}$$

von y in Bezug auf x als unabhängige veränderliche Grösse zu entwickeln. Dann wird jederzeit das Product

$$\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial x}$$

der gesuchte Differentialquotient von z in Bezug auf x als unabhängige veränderliche Grösse, d. i.

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial x}$$

seyn.

Für $z = ay^4$ und $y = cx^4$ ist z. B. nach §. 35.

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 4ay^3,\quad \frac{\partial y}{\partial x} = 4cx^3.$$

Also ist nach dem Vorhergehenden

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial x} = 16acx^3y^3,$$

oder, weil

$$y^3 = c^3x^{12}$$

ist,

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 16ac^4x^{15},$$

und folglich nach dem allgemeinen Begriffe des Differentials

$$\partial z = 16ac^4x^{15}\partial x.$$

C. Differentiation der algebraischen Functionen.

§. 44.

Weil jede algebraische Function von x bloss mittelst der vier einfachen Rechnungsarten aus constanten Grössen und beliebigen Potenzen von x zusammengesetzt ist; so sind die in B. aufgelösten Aufgaben zur Entwickelung des Differentials einer jeden algebraischen Function offenbar völlig hinreichend, wenn man nur noch für jedes beliebige positive oder negative, ganze oder gebrochene n das Differential der Function $y = x^n$ entwikkeln kann, wodurch wir also von selbst zu der folgenden Aufgabe geführt werden:

Aufgabe. Für jedes beliebige positive oder negative, ganze oder gebrochene n das Differential der Function $y = x^n$ zu finden.

Auflösung. I. Wenn n eine positive ganze Zahl ist, so ist nach §. 15.

$$\Delta y = n_1 x^{n-1}\Delta x + n_2 x^{n-2}\Delta x^2 + n_3 x^{n-3}\Delta x^3 + \ldots\ldots + n_{n-1}x\Delta x^{n-1} + n_n\Delta x^n,$$

und folglich, weil $n_1 = n$ ist,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = nx^{n-1} + n_2 x^{n-2}\Delta x + n_3 x^{n-3}\Delta x^2 + \ldots\ldots + n_{n-1}x\Delta x^{n-2} + n_n\Delta x^{n-1}.$$

Lässt man nun Δx sich der Null nähern; so nähert sich offenbar die Grösse auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens der Grösse nx^{n-1} immer mehr und mehr, und kann derselben beliebig nahe gebracht werden, wenn man nur Δx der Null nahe genug kommen lässt. Daher nähert sich auch der Differenzenquotient $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, wenn Δx sich der Null nähert, der Grösse nx^{n-1} immer mehr und mehr, und kann derselben beliebig nahe gebracht werden, wenn man nur Δx nahe genug bei Null annimmt. Folglich

ist nach dem allgemeinen Begriffe des Differentialquotienten für jedes positive ganze n

$$\frac{\partial y}{\partial x} = nx^{n-1}.$$

II. Wenn n eine negative ganze Zahl ist, so sey $n = -m$, und folglich

$$y = \frac{1}{x^m}.$$

Weil m eine positive ganze Zahl ist, so ist nach I.

$$\frac{\partial . x^m}{\partial x} = mx^{m-1}.$$

Differentiirt man nun die gebrochene Function

$$y = \frac{1}{x^m}$$

nach §. 42. und §. 39.; so erhält man

$$\frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{1}{x^{2m}} . \frac{\partial . x^m}{\partial x}.$$

Folglich ist

$$\frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{mx^{m-1}}{x^{2m}} = -mx^{-m-1};$$

also, wenn man wieder n für $-m$ setzt,

$$\frac{\partial y}{\partial x} = nx^{n-1}.$$

III. In dem Falle, wo n ein positiver oder negativer Bruch ist, wollen wir

$$n = \frac{p}{q},$$

wo p und q ganze Zahlen sind, setzen, und wollen annehmen, dass dieser Bruch in den kleinsten Zahlen ausgedrückt sey.

Auch bemerken wir, dass, wenn q eine gerade Zahl ist, damit

$$y = x^{\frac{p}{q}}$$

reell sey, x immer als positiv angenommen werden muss.

Setzen wir nun

$$z = y^q = x^p;$$

so ist nach I. und II.

$$\frac{\partial z}{\partial y} = qy^{q-1}, \quad \frac{\partial z}{\partial x} = px^{p-1}.$$

Nach §. 43. ist aber

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial y} . \frac{\partial y}{\partial x}.$$

Also ist

$$px^{p-1} = qy^{q-1}\frac{\partial y}{\partial x},$$

und folglich

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{p}{q} \cdot \frac{x^{p-1}}{y^{q-1}}$$

oder

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{p}{q} \cdot \frac{x^{p-1} y}{y^q} = \frac{p}{q} \cdot \frac{x^{p-1} y}{x^p} = \frac{p}{q} \cdot \frac{y}{x};$$

also

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{p}{q} x^{\frac{p}{q}-1} = n x^{n-1}.$$

In dem Falle, wo n ein in den kleinsten Zahlen ausgedrückter Bruch und der Nenner dieses Bruchs eine gerade Zahl ist, muss noch eine Bestimmung wegen des Vorzeichens gegeben werden, mit welchem man die Potenz x^{n-1} zu nehmen hat. Diese Bestimmung ergiebt sich aber sehr leicht, wenn man nur bedenkt, dass nach dem Vorhergehenden

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{p}{q} \cdot \frac{y}{x} = n \frac{y}{x}$$

und folglich

$$x^{n-1} = \frac{y}{x}$$

ist. Weil nämlich in dem in Rede stehenden Falle x immer positiv seyn muss; so ergiebt sich hieraus auf der Stelle, dass man die Potenz x^{n-1} immer mit demselben Vorzeichen nehmen muss, mit welchem man die Potenz $y = x^n$ genommen hat.

IV. Nach dem Vorhergehenden ist also für jedes positive oder negative, ganze oder gebrochene n

$$1.\ \frac{\partial y}{\partial x} = n x^{n-1}$$

und folglich nach dem allgemeinen Begriffe des Differentials

$$2.\ \partial y = n x^{n-1} \partial x.$$

Wenn n ein in den kleinsten Zahlen ausgedrückter Bruch, und der Nenner dieses Bruchs eine gerade Zahl ist; so muss x positiv seyn, und die Potenz x^{n-1} muss mit demselben Vorzeichen genommen werden, mit welchem man die Potenz $y = x^n$ genommen hat.

§. 45.

Wenn p eine Function von x und

$$y = p^n$$

ist; so ist nach §. 43.

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial y}{\partial p} \cdot \frac{\partial p}{\partial x}.$$

Nach §. 44. ist aber

$$\frac{\partial y}{\partial p} = n p^{n-1}.$$

Also ist

$$1. \quad \frac{\partial y}{\partial x} = np^{n-1}\frac{\partial p}{\partial x},$$

und folglich

$$\frac{\partial y}{\partial x}\partial x = np^{n-1}\frac{\partial p}{\partial x}\partial x,$$

d. i. nach dem allgemeinen Begriffe des Differentials

$$2. \quad \partial y = np^{n-1}\partial p,$$

wo natürlich ∂p das Differential der Function p in Bezug auf x als unabhängige veränderliche Grösse ist.

Wenn n ein in den kleinsten Zahlen ausgedrückter Bruch, und der Nenner dieses Bruchs eine gerade Zahl ist; so muss p positiv seyn, und die Potenz p^{n-1} muss mit demselben Vorzeichen genommen werden, mit welchem man die Potenz $y=p^n$ genommen hat.

§. 46.

Dass das Bisherige zur Differentiation jeder algebraischen Function völlig hinreicht, lässt sich nun leicht übersehen.

I. Jede ganze rationale algebraische Function hat die Form

$$y = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \ldots + Lx^n.$$

Also ist nach §. 38., §. 37. und §. 44.

$$\frac{\partial y}{\partial x} = B + 2Cx + 3Dx^2 + \ldots + nLx^{n-1}$$

und

$$\partial y = (B + 2Cx + 3Dx^2 + \ldots + nLx^{n-1})\partial x.$$

II. Jede gebrochene rationale algebraische Function hat die Form

$$y = \frac{A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \ldots + Lx^n}{A' + B'x + C'x^2 + D'x^3 + \ldots + L'x^m}.$$

Setzt man nun

$$p = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \ldots + Lx^n,$$
$$q = A' + B'x + C'x^2 + D'x^3 + \ldots + L'x^m;$$

so ist

$$y = \frac{p}{q},$$

und folglich nach §. 42.

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{q\frac{\partial p}{\partial x} - p\frac{\partial q}{\partial x}}{q^2}.$$

Nach I. ist

$$\frac{\partial p}{\partial x} = B + 2Cx + 3Dx^2 + \ldots + nLx^{n-1},$$
$$\frac{\partial q}{\partial x} = B' + 2C'x + 3D'x^2 + \ldots + mL'x^{m-1};$$

also

$$q\frac{\partial p}{\partial x} =$$

$$(A' + B'x + C'x^2 + \ldots + L'x^m)\,(B + 2Cx + 3Dx^2 + \ldots + nLx^{n-1}),$$

$$p\frac{\partial q}{\partial x} =$$

$$(A + Bx + Cx^2 + \ldots + Lx^n)\,(B' + 2C'x + 3D'x^2 + \ldots + mL'x^{m-1}).$$

Entwickelt man nun diese Producte und das Quadrat

$$q^2 = (A' + B'x + C'x^2 + D'x^3 + \ldots + L'x^m)^2$$

nach Potenzen von x, und führt die erhaltenen Ausdrücke in den obigen Ausdruck des Differentialquotienten von y ein; so erhält man den gesuchten Ausdruck dieses Differentialquotienten, welcher dann ferner, wenn man ihn mit ∂x multiplicirt, unmittelbar das Differential ∂y giebt.

Ist z. B.

$$y = \frac{a^2 - x^2}{a^4 + a^2x^2 + x^4};$$

so ist

$$p = a^2 - x^2, \quad q = a^4 + a^2x^2 + x^4;$$

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -2x, \quad \frac{\partial q}{\partial x} = 2a^2x + 4x^3.$$

Folglich ist

$$q\frac{\partial p}{\partial x} - p\frac{\partial q}{\partial x}$$

$$= -2x\,(a^4 + a^2x^2 + x^4) - (a^2 - x^2)\,(2a^2x + 4x^3)$$

$$= 2x\,(x^4 - 2a^2x^2 - 2a^4),$$

und daher

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{2x\,(x^4 - 2a^2x^2 - 2a^4)}{(a^4 + a^2x^2 + x^4)^2},$$

$$\partial y = \frac{2x\,(x^4 - 2a^2x^2 - 2a^4)\,\partial x}{(a^4 + a^2x^2 + x^4)^2},$$

wo man nun, zufolge der vorher gegebenen allgemeinen Regel, das Quadrat im Nenner eigentlich noch nach Potenzen von x entwickeln müsste, welches man aber der Kürze wegen, wenn nicht besondere Zwecke diese Entwickelung fordern, gewöhnlich nicht thut.

III. Die Differentiation der irrationalen algebraischen Functionen wollen wir nur an ein Paar speciellen Fällen erläutern.

Ist z. B. die Function

$$y = x\,(a^2 - x^2)\sqrt{a^2 + x^2}$$

gegeben, so setze man

$$p = x\,(a^2 - x^2), \quad q = \sqrt{a^2 + x^2};$$

folglich $y = pq$. Nach §. 40 ist

$$\partial y = p\partial q + q\partial p.$$

Nach §. 45. erhält man

$$\partial q = \partial \,.\, (a^2+x^2)^{\frac{1}{2}} = \tfrac{1}{2}\,(a^2+x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x\,\partial x = \frac{x\,\partial x}{\sqrt{a^2+x^2}},$$

und nach I. ist

$$\partial p = \partial\,(a^2x - x^3) = (a^2 - 3x^2)\,\partial x.$$

Also ist

$$\partial y = \frac{x^2\,(a^2-x^2)\,\partial x}{\sqrt{a^2+x^2}} + (a^2-3x^2)\sqrt{a^2+x^2}\,.\,\partial x$$

$$= \frac{x^2\,(a^2-x^2) + (a^2-3x^2)\,(a^2+x^2)}{\sqrt{a^2+x^2}}\,\partial x;$$

folglich nach gehöriger Entwickelung des Zählers

$$\partial y = \frac{(a^4 - a^2x^2 - 4x^4)\,\partial x}{\sqrt{a^2+x^2}},$$

und hieraus ferner

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{a^4 - a^2x^2 - 4x^4}{\sqrt{a^2+x^2}}.$$

Ist

$$y = a + \frac{b}{\sqrt[3]{x^2}} - \frac{c}{x\sqrt[3]{x}} + \frac{e}{x^2}$$

die gegebene Function; so setze man

$$y = a + bx^{-\frac{2}{3}} - cx^{-\frac{4}{3}} + ex^{-2},$$

und erhält nun nach §. 38., §. 37. und §. 44. sehr leicht

$$\frac{\partial y}{\partial x} = -\tfrac{2}{3}\,bx^{-\frac{2}{3}-1} + \tfrac{4}{3}\,cx^{-\frac{4}{3}-1} - 2ex^{-2-1}$$

$$= -\tfrac{2}{3}\,bx^{-\frac{5}{3}} + \tfrac{4}{3}\,cx^{-\frac{7}{3}} - 2ex^{-3}$$

$$= -\frac{2b}{3\sqrt[3]{x^5}} + \frac{4c}{3\sqrt[3]{x^7}} - \frac{2e}{x^3}$$

$$= -\frac{2b}{3x\sqrt[3]{x^2}} + \frac{4c}{3x^2\sqrt[3]{x}} - \frac{2e}{x^3};$$

also

$$\partial y = -\frac{2b\,\partial x}{3x\sqrt[3]{x^2}} + \frac{4c\,\partial x}{3x^2\sqrt[3]{x}} - \frac{2e\,\partial x}{x^3}.$$

D. Differentiale der Exponential-Functionen.

§. 47.

Indem wir jetzt zur Betrachtung der Exponential-Function

$$y = a^x$$

übergehen, bemerken wir zuvörderst, dass im Folgenden die Grösse a immer als positiv angenommen werden soll, damit, wie

sich auch x ändern möge, y stets reell sey. Auch soll a nicht $=0$ seyn.

Nach §. 10. 3. ist

$$\Delta y = a^x(a^{\Delta x} - 1),$$

und folglich

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = a^x . \frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x}.$$

Da es nun, wenn man vom Differenzenquotienten zum Differentialquotienten übergehen will, jederzeit darauf ankommt, ob sich der Differenzenquotient, wenn Δx sich der Null nähert, immer mehr und mehr und bis zu jedem beliebigen Grade einer gewissen bestimmten endlichen Gränze nähert; so werden wir uns jetzt zunächst offenbar mit der Untersuchung zu beschäftigen haben, ob sich die Grösse

$$\frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x},$$

wenn Δx sich der Null nähert, immer mehr und mehr einer gewissen bestimmten endlichen Gränze nähert, und derselben beliebig nahe gebracht werden kann, wenn man nur Δx der Null nahe genug kommen lässt.

Findet sich dann, dass es eine solche Gränze wirklich giebt; so kann dieselbe natürlich nicht mehr von Δx abhängen, sondern wird bloss eine Function von a seyn, und kann daher durch $\varphi(a)$ bezeichnet werden.

Unter dieser Voraussetzung ist die Gränze, welcher, wenn Δx sich der Null nähert, der Differenzenquotient

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = a^x . \frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x}$$

sich immer mehr und mehr und bis zu jedem beliebigen Grade nähert, offenbar das Product $a^x . \varphi(a)$, und folglich nach dem allgemeinen Begriffe des Differentialquotienten

$$\frac{\partial y}{\partial x} = a^x . \varphi(a).$$

Indem wir uns nun zu der oben näher angedeuteten Untersuchung wenden, wollen wir jedoch der Kürze wegen, welches offenbar verstattet ist, statt der Grösse

$$\frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x}$$

die Function

$$y = \frac{a^x - 1}{x}$$

betrachten, und wollen folglich untersuchen, ob es eine endliche völlig bestimmte Gränze giebt, welcher sich diese Function, wenn x sich der Null nähert, immer mehr und mehr, und auch, wenn man nur x der Null nahe genug kommen lässt, bis zu jedem beliebigen Grade nähert.

Die oben in Bezug auf die Grösse a gemachten Voraussetzungen behalten auch hierbei ihre völlige Gültigkeit.

§. 48.

Lehrsatz. Wenn x sich der Null nähert; so nähert die Grösse a^x sich immer mehr und mehr der Einheit, und kann derselben beliebig nahe gebracht werden, wenn man nur x der Null nahe genug kommen lässt.

Beweis. I. Wenn $a > 1$ und x positiv ist, so ist $a^x > 1$. Setzt man also die Potenzen

$$a^{\frac{1}{2^n}}, \quad a^{\frac{1}{2^{n+1}}}, \quad a^{\frac{1}{2^{n+2}}}, \quad a^{\frac{1}{2^{n+3}}}, \quad a^{\frac{1}{2^{n+4}}}, \ldots,$$

wo n eine positive ganze Zahl bezeichnen soll, nach der Reihe den Grössen

$$1 + \Delta, \; 1 + \Delta_1, \; 1 + \Delta_2, \; 1 + \Delta_3, \; 1 + \Delta_4, \ldots$$

gleich; so sind $\Delta, \Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \Delta_4, \ldots$ sämmtlich positive Grössen, und keine derselben ist $= 0$. Es ist aber

$$(1 + \Delta_1)^2 = 1 + \Delta$$

oder

$$2\Delta_1 + \Delta_1^2 = \Delta,$$

und folglich

$$\Delta_1 = \frac{\Delta}{2 + \Delta_1};$$

also

$$\Delta_1 < \tfrac{1}{2}\Delta.$$

Auf diese Art hat man überhaupt

$$\Delta_1 < \tfrac{1}{2}\Delta, \; \Delta_2 < \tfrac{1}{2}\Delta_1, \; \Delta_3 < \tfrac{1}{2}\Delta_2, \; \Delta_4 < \tfrac{1}{2}\Delta_3, \ldots$$

oder

$$\Delta_1 < \tfrac{1}{2}\Delta, \; \Delta_2 < \tfrac{1}{4}\Delta, \; \Delta_3 < \tfrac{1}{8}\Delta, \; \Delta_4 < \tfrac{1}{16}\Delta, \ldots,$$

und sieht hieraus, dass sich die Grössen

$$\Delta, \; \Delta_1, \; \Delta_2, \; \Delta_3, \; \Delta_4, \ldots$$

der Null immer mehr und mehr nähern, und derselben beliebig nahe gebracht werden können, wenn man vorstehende Reihe nur weit genug fortsetzt.

Also nähern sich die Grössen

$$1 + \Delta, \; 1 + \Delta_1, \; 1 + \Delta_2, \; 1 + \Delta_3, \; 1 + \Delta_4, \ldots,$$

d. i. die Grössen

$$a^{\frac{1}{2^n}}, \quad a^{\frac{1}{2^{n+1}}}, \quad a^{\frac{1}{2^{n+2}}}, \quad a^{\frac{1}{2^{n+3}}}, \quad a^{\frac{1}{2^{n+4}}},$$

immer mehr und mehr der Einheit, und können derselben beliebig nahe gebracht werden, wenn man vorstehende Reihe nur weit genug fortsetzt.

Folglich nähert sich in dem vorliegenden Falle, wo $a > 1$ und x positiv ist, die Grösse a^x, wenn x sich der Null nähert, der Einheit offenbar immer mehr und mehr, und kann derselben beliebig nahe gebracht werden, wenn man nur x nahe genug bei Null annimmt.

II. Da nun aber ferner

$$a^{-x} = \frac{1}{a^x}$$

ist, und nach I. der Nenner dieses Bruchs, unter der Voraussetzung, das $a > 1$ ist, sich immer mehr und mehr und bis zu jedem beliebigen Grade der Einheit nähert, wenn x sich der Null nähert; so gilt dies offenbar auch von dem obigen Bruche selbst, und es ist daher hierdurch die Richtigkeit unsers Satzes auch in dem Falle bewiesen, wo $a > 1$ und x negativ ist.

III. Wenn $a < 1$ ist, so setze man

$$\frac{1}{a} = \alpha, \quad \frac{1}{a^x} = \alpha^x.$$

Dann ist $\alpha > 1$, und nach I. und II. nähert sich, wenn x sich der Null nähert, α^x, d. i. $\frac{1}{a^x}$, immer mehr und mehr der Einheit, und kann derselben beliebig nahe gebracht werden, wenn man nur x nahe genug bei Null annimmt. Da nun dies offenbar auch von dem Nenner des Bruchs $\frac{1}{a^x}$, weil der Zähler desselben die Einheit ist, gelten muss; so wird sich also a^x auch in dem Falle, wo $a < 1$ ist, immer mehr und mehr und bis zu jedem beliebigen Grade der Einheit nähern, wenn x sich der Null nähert.

IV. Weil nun endlich für $a = 1$ immer $a^x = 1$ ist; so ist klar, dass der Satz auch in diesem Falle als gültig zu betrachten ist, und derselbe ist daher durch das Vorhergehende nun in völliger Allgemeinheit bewiesen.

§. 49.

Lehrsatz. Für keinen von Null verschiedenen Werth der Grösse x findet eine Unterbrechung der Stetigkeit der Function

$$y = \frac{a^x - 1}{x}$$

Statt.

Beweis. Man lasse x sich um Δx verändern; so erhält man

$$\Delta y = \frac{a^{x+\Delta x} - 1}{x+\Delta x} - \frac{a^x - 1}{x},$$

und hieraus nach leichter Rechnung

$$\Delta y = \frac{a^x\,(a^{\Delta x} - 1) - \frac{a^x - 1}{x}\Delta x}{x + \Delta x},$$

Lässt man nun Δx sich der Null nähern; so nähert nach §. 48. $a^{\Delta x}$ sich immer mehr und mehr und bis zu jedem beliebigen Grade der Einheit, und $a^{\Delta x}-1$, also auch $a^x(a^{\Delta x}-1)$, nähert sich folglich offenbar immer mehr und mehr und bis zu jedem beliebigen Grade der Null. Eben so nähert sich, wenn Δx sich der Null nähert, das Product

$$\frac{a^x-1}{x}\Delta x,$$

dessen erster Factor, weil x nach der Voraussetzung nicht $=0$ ist, eine endliche völlig bestimmte Grösse ist, immer mehr und mehr und bis zu jedem beliebigen Grade der Null. Folglich nähert sich offenbar auch der Zähler des Bruchs

$$\frac{a^x(a^{\Delta x}-1)-\frac{a^x-1}{x}\Delta x}{x+\Delta x},$$

wenn Δx sich der Null nähert, immer mehr und mehr und bis zu jedem beliebigen Grade der Null. Da nun der Nenner $x+\Delta x$ sich, wenn Δx sich der Null nähert, immer mehr und mehr und bis zu jedem beliebigen Grade der völlig bestimmten von Null verschiedenen Grösse x nähert; so nähert sich der obige Bruch, d. i. Δy, wenn Δx sich der Null nähert, offenbar immer mehr und mehr und bis zu jedem beliebigen Grade der Null, wodurch, weil die Function

$$y=\frac{a^x-1}{x}$$

offenbar auch für jedes x, welches nicht $=0$ ist, einen endlichen völlig bestimmten Werth hat, der zu beweisende Satz offenbar vollständig bewiesen ist.

§. 50.

Lehrsatz. Wenn $a>1$ und x positiv ist; so ist die Function

$$y=\frac{a^x-1}{x}$$

stets positiv, und nimmt fortwährend ab, wenn x abnimmt.

Beweis. I. Dass unter den gemachten Voraussetzungen y stets positiv ist, erhellet auf der Stelle, und bedarf daher keines besondern Beweises.

II. Um aber ferner zu beweisen, dass die Function y mit x zugleich fortwährend abnimmt, wollen wir zuerst zwey positive ganze Zahlen m und n betrachten, und wollen, unter der Voraussetzung, dass $n<m$ ist, zeigen, dass jederzeit

$$\frac{a^n-1}{n}<\frac{a^m-1}{m},$$

oder dass, wenn wir $a = 1 + \theta$ setzen, wo $\theta > o$ ist, jederzeit

$$\frac{(1+\theta)^n - 1}{n} < \frac{(1+\theta)^m - 1}{m}$$

ist.

Nach dem Binomischen Lehrsatze (§. 14.) ist

$$(1+\theta)^n = 1 + n_1\,\theta + n_2\,\theta^2 + n_3\,\theta^3 + \ldots + n_n\,\theta^n,$$

$$(1+\theta)^m = 1 + m_1\,\theta + m_2\,\theta^2 + m_3\,\theta^3 + \ldots + m_m\,\theta^m;$$

folglich

$$(1+\theta)^n - 1 = n_1\,\theta + n_2\,\theta^2 + n_3\,\theta^3 + \ldots + n_n\,\theta^n,$$

$$(1+\theta)^m - 1 = m_1\,\theta + m_2\,\theta^2 + m_3\,\theta^3 + \ldots + m_m\,\theta^m.$$

Nun ist aber allgemein

$$n_k = \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{1.2.3\ldots k} = \frac{n}{k}\cdot\frac{(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}{1.2.3\ldots(k-1)},$$

d. i.

$$n_k = \frac{n}{k}\cdot(n-1)_{k-1},$$

und folglich

$$\frac{n_k}{n} = \frac{(n-1)_{k-1}}{k}.$$

Also ist

$$\frac{(1+\theta)^n - 1}{n} = \theta + \frac{(n-1)_1}{2}\,\theta^2 + \frac{(n-1)_2}{3}\,\theta^3 + \ldots + \frac{(n-1)_{n-1}}{n}\,\theta^n,$$

$$\frac{(1+\theta)^m - 1}{m} = \theta + \frac{(m-1)_1}{2}\,\theta^2 + \frac{(m-1)_2}{3}\,\theta^3 + \ldots + \frac{(m-1)_{m-1}}{m}\,\theta^m.$$

Die Glieder dieser beiden Reihen sind, wie leicht erhellen wird, sämmtlich positiv, und die erste Reihe hat, weil nach der Voraussetzung $n < m$ ist, jederzeit eine geringere Anzahl von Gliedern wie die zweite Reihe. Ferner ist, weil $n < m$ ist, jedes Glied der ersten Reihe offenbar kleiner wie das gleichstellige Glied der zweiten Reihe, wenn man nur die beiden ersten Glieder ausnimmt, welche einander gleich sind. Daher hat augenscheinlich die erste Reihe jederzeit eine kleinere Summe wie die zweite, und es ist folglich

$$\frac{(1+\theta)^n - 1}{n} < \frac{(1+\theta)^m - 1}{m},$$

wie bewiesen werden sollte.

III. Hiernach lässt sich nun ferner leicht zeigen, dass unter der Voraussetzung, dass

$$\frac{n}{p} < \frac{m}{q}$$

ist, jederzeit auch

$$\frac{(1+\theta)^{\frac{n}{p}}-1}{\frac{n}{p}} < \frac{(1+\theta)^{\frac{m}{q}}-1}{\frac{m}{q}}$$

ist. Dies wird bewiesen seyn, wenn man zeigen kann, dass unter der gemachten Voraussetzung

$$\frac{(1+\theta)^{\frac{nq}{pq}}-1}{\frac{nq}{pq}} < \frac{(1+\theta)^{\frac{mp}{pq}}-1}{\frac{mp}{pq}}$$

ist. Dies lässt sich aber auf folgende Art beweisen. Weil

$$(1+\theta)^{\frac{1}{pq}} > 1$$

ist; so setze man

$$(1+\theta)^{\frac{1}{pq}} = 1+\theta',$$

wo $\theta' > 0$ ist. Da nun nach der Voraussetzung

$$\frac{n}{p} < \frac{m}{q}$$

ist; so ist $nq < mp$, und folglich nach II.

$$\frac{(1+\theta')^{nq}-1}{nq} < \frac{(1+\theta')^{mp}-1}{mp}.$$

Aber

$$(1+\theta')^{nq} = (1+\theta)^{\frac{nq}{pq}},\ (1+\theta')^{mp} = (1+\theta)^{\frac{mp}{pq}};$$

folglich

$$\frac{(1+\theta)^{\frac{nq}{pq}}-1}{nq} < \frac{(1+\theta)^{\frac{mp}{pq}}-1}{mp};$$

also offenbar auch

$$\frac{(1+\theta)^{\frac{nq}{pq}}-1}{\frac{nq}{pq}} < \frac{(1+\theta)^{\frac{mp}{pq}}-1}{\frac{mp}{pq}},$$

wie bewiesen werden sollte.

IV. Durch I., II. und III. ist unser Satz nun offenbar vollständig bewiesen.

§. 51.

Lehrsatz. Wenn $a > 1$ und x positiv ist; so nähert sich, wenn x sich der Null nähert, die Function

$$y = \frac{a^x - 1}{x}$$

immer mehr und mehr einer gewissen endlichen völlig bestimmten Gränze, und kann derselben beliebig

nahe gebracht werden, wenn man nur x der Null nahe genug kommen lässt. Auch ist diese Gränze jederzeit eine positive Grösse.

Beweis. Dieser Satz ist, wie man sogleich übersehen wird, eine unmittelbare Folge aus den beiden in §. 49. und §. 50. bewiesenen Sätzen.

§. 52.

Lehrsatz. Wenn $a > 1$ und x positiv ist; so nähern sich, wenn x sich der Null nähert, die beiden Functionen

$$y = \frac{a^x - 1}{x}, \quad z = \frac{a^{-x} - 1}{-x}$$

einander immer mehr und mehr, und können einander bis zu jedem beliebigen Grade genähert werden, wenn man nur x der Null nahe genug kommen lässt.

Beweis. Es ist, wie man leicht findet,

$$y - z = \frac{a^x - 1}{x}\left(1 - \frac{1}{a^x}\right).$$

Nähert sich nun x der Null; so nähert nach §. 51. die Grösse

$$\frac{a^x - 1}{x}$$

sich einer bestimmten endlichen Gränze immer mehr und mehr, und kann derselben beliebig nahe gebracht werden, wenn man nur x der Null nahe genug kommen lässt. Die Grösse

$$1 - \frac{1}{a^x}$$

nähert sich nach §. 48., wenn x sich der Null nähert, der Null offenbar immer mehr und mehr und bis zu jedem beliebigen Grade. Also nähert sich offenbar, wenn x sich der Null nähert, das Product

$$\frac{a^x - 1}{x}\left(1 - \frac{1}{a^x}\right),$$

d. i. die Differenz $y - z$, der Null immer mehr und mehr und bis zu jedem beliebigen Grade, wodurch unser Satz, wie leicht erhellen wird, bewiesen ist.

§. 53.

Lehrsatz. Wenn $a > 1$ ist; so nähert sich, wenn x sich der Null nähert, die Function

$$y = \frac{a^x - 1}{x},$$

x mag positiv oder negativ seyn, immer mehr und

mehr einer gewissen bestimmten endlichen Gränze, und kann derselben beliebig nahe gebracht werden, wenn man nur x der Null nahe genug kommen lässt.

Beweis. Dieser Satz ist eine unmittelbare Folge aus den in §. 51. und §. 52. bewiesenen Sätzen.

§. 54.

Lehrsatz. **Auch wenn $a<1$ ist nähert sich, wenn x sich der Null nähert, die Function**

$$y=\frac{a^x-1}{x}$$

immer mehr und mehr einer gewissen bestimmten endlichen Gränze, und kann derselben beliebig nahe gebracht werden, wenn man nur x der Null nahe genug kommen lässt.

Beweis. Man setze

$$\frac{1}{a}=\alpha;$$

so ist, weil $a<1$ ist, $\alpha>1$. Nun ist, wie man leicht findet,

$$\frac{a^x-1}{x}=-\frac{\alpha^x-1}{x}\cdot\frac{1}{\alpha^x},$$

und nach §. 53. nähert sich, wenn x sich der Null nähert, die Grösse

$$\frac{\alpha^x-1}{x}$$

immer mehr und mehr und bis zu jedem beliebigen Grade einer gewissen bestimmten endlichen Gränze. Also nähert sich, wenn x sich der Null nähert, auch das Product

$$\frac{\alpha^x-1}{x}\cdot\frac{1}{\alpha^x}$$

immer mehr und mehr und bis zu jedem beliebigen Grade einer gewissen bestimmten endlichen Gränze. Nach §. 48. nähert sich aber $\frac{1}{\alpha^x}$, wenn x sich der Null nähert, immer mehr und mehr und bis zu jedem beliebigen Grade der Einheit. Also muss sich, wenn x sich der Null nähert, offenbar auch

$$\frac{a^x-1}{x}$$

immer mehr und mehr und bis zu jedem beliebigen Grade einer gewissen bestimmten endlichen Gränze nähern, wie bewiesen werden sollte.

§. 55.

Verbindet man mit den in §. 53. und §. 54. bewiesenen

Sätzen nun bloss noch die Bemerkung, dass, wenn $a = 1$ ist, für jedes x, welches nicht $= 0$ ist,

$$\frac{a^x - 1}{x} = 0$$

ist; so ergiebt sich auf der Stelle das folgende wichtige allgemeine Theorem:

Für jedes nicht verschwindende positive a nähert sich, wenn x sich der Null nähert, die Function

$$y = \frac{a^x - 1}{x}$$

einer gewissen bestimmten endlichen Gränze immer mehr und mehr, und kann derselben beliebig nahe gebracht werden, wenn man nur x der Null nahe genug kommen lässt.

Die Existenz einer solchen Gränze ist also hierdurch ausser allem Zweifel gesetzt, und wenn auch die wirkliche Bestimmung derselben spätern Untersuchungen überlassen bleiben muss; so ist doch so viel klar, dass diese Gränze nicht von x abhängen, sondern bloss eine Function von a seyn kann, weshalb wir dieselbe, wie auch schon in §. 47. geschehen ist, durch $\varphi(a)$ bezeichnen wollen. Dass nun auch die Grösse

$$\frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x}$$

sich, wenn Δx sich der Null nähert, der Gränze $\varphi(a)$ immer mehr und mehr nähert, und derselben beliebig nahe gebracht werden kann, wenn man nur Δx nahe genug bei Null annimmt, versteht sich von selbst, und in §. 47. ist auch schon gezeigt worden, dass für die Function

$$y = a^x$$

der Differentialquotient

$$\frac{\partial y}{\partial x} = a^x \varphi(a),$$

folglich

$$\partial y = a^x \varphi(a) \partial x$$

ist.

§. 56.

Die wirkliche Bestimmung der Function $\varphi(a)$ bleibt, wie schon erinnert worden ist, spätern Untersuchungen vorbehalten, indem es uns für jetzt völlig genügt, dass wir uns von der Existenz der durch $\varphi(a)$ bezeichneten Gränze versichert haben. Jedoch bieten sich uns schon jetzt die folgenden in mehrfacher Beziehung wichtigen, und daher wohl zu beachtenden Bemerkungen dar.

Weil $\varphi(a)$ eine Function von a ist; so wird sich der Werth von $\varphi(a)$ ändern, wenn a sich ändert, und jedem bestimmten

Werthe von a wird im Allgemeinen ein bestimmter Werth von $\varphi(a)$, so wie umgekehrt jedem bestimmten Werthe von $\varphi(a)$ ein bestimmter Werth von a entsprechen, womit aber nicht gesagt seyn soll, dass $\varphi(a)$ auch wirklich jeden bestimmten reellen Werth haben kann. Wir wollen nun aber annehmen, dass die Einheit ein Werth der Function $\varphi(a)$ seyn könne, behalten uns jedoch vor, erst weiter unten, wo wir auf diesen wichtigen Gegenstand zurückkommen werden, zu entscheiden, ob diese Annahme, die wir für jetzt als zulässig betrachten wollen, wirklich zulässig oder unzulässig ist. Dies vorausgesetzt, wollen wir, wie dies in der Analysis allgemein gebräuchlich ist, den Werth der Grösse a, für welchen die Function $\varphi(a)$ der Einheit gleich wird, durch den Buchstaben e bezeichnen, so dass also e eine solche Grösse ist, dass

$$\varphi(e) = 1$$

ist, wobei es aber, obgleich wir e als eine reelle Grösse betrachten werden, für jetzt ebenfalls völlig unentschieden bleibt, ob diese Grösse wirklich reell oder imaginär ist, so wie denn überhaupt auch von der wirklichen Bestimmung der Grösse e erst weiter unten ausfürlich die Rede seyn wird.

Gewöhnlich betrachtet man e als die Basis eines logarithmischen Systems, und nennt die sich auf diese Basis beziehenden Logarithmen natürliche oder hyperbolische Logarithmen, e selbst aber eben deshalb die Basis der natürlichen oder hyperbolischen Logarithmen, wobei man zugleich noch zu merken hat, dass man die natürlichen oder hyperbolischen Logarithmen bloss durch den Buchstaben l zu bezeichnen pflegt, eine Bezeichnung, die auch in diesem Werke ihrer Einfachheit wegen durchgängig beibehalten werden soll.

§. 57.

Die in §. 55. bewiesene wichtige Differentialformel

$$\partial \,.\, a^x = a^x \varphi(a)\, \partial x$$

lässt sich mittelst der natürlichen Logarithmen, deren Begriff im vorigen Paragraphen entwickelt worden ist, nun noch auf einen andern Ausdruck bringen.

Setzt man in der in Rede stehenden Formel e für a; so erhält man die Gleichung

$$\partial \,.\, e^x = e^x \varphi(e)\, \partial x.$$

Nach §. 56. ist aber

$$\varphi(e) = 1.$$

Also ist

$$1.\quad \partial.\, e^x = e^x \partial x.$$

Nach dem allgemeinen Begriffe der Logarithmen ist, wobei wegen der Bezeichnung der vorige Paragraph zu vergleichen,

$$a = e^{la};$$

folglich

$$a^x = e^{xla},$$

oder, wenn wir

$$2.\quad xla = z$$

setzen,

$$3.\quad a^x = e^z.$$

Nach dem in §. 43. bewiesenen Satze ist also

$$\frac{\partial\,.\,a^x}{\partial x} = \frac{\partial\,.\,e^z}{\partial z}\,.\,\frac{\partial z}{\partial x},$$

und folglich, weil nach 1. und 2.

$$\partial\,.\,e^z = e^z\,\partial z,\quad \partial z = la\,\partial x$$

oder

$$\frac{\partial\,.\,e^z}{\partial z} = e^z,\quad \frac{\partial z}{\partial x} = la$$

ist,

$$\frac{\partial\,.\,a^x}{\partial x} = e^z\,la,$$

d. i. nach 3.

$$\frac{\partial\,.\,a^x}{\partial x} = a^x\,la$$

oder

$$4.\quad \partial\,.\,a^x = a^x\,la\,\partial x.$$

Weil nun aber auch

$$\partial\,.\,a^x = a^x\,\varphi(a)\,\partial x$$

ist; so ist

$$5.\quad \varphi(a) = la,$$

wodurch wir zugleich noch einen andern Ausdruck der Function $\varphi(a)$ gefunden haben, der freilich für jetzt auch weiter nichts als ein blosser symbolischer Ausdruck, für das Folgende aber von nicht geringer Wichtigkeit ist.

§. 58.

Wichtig ist es auch noch für das Folgende, den Zusammenhang zwischen den natürlichen und den sich auf die Basis b beziehenden Logarithmen, die wir nach §. 4. durch *log* bezeichnen, zu ermitteln.

Zu dem Ende sey N eine beliebige Zahl; so ist bekanntlich

$$N = b^{\log N} \text{ und } N = e^{lN},$$

woraus

$$b^{\log N} = e^{lN}$$

folgt. Nimmt man nun auf beiden Seiten dieser Gleichung zuerst die durch *log* bezeichneten, dann die natürlichen Logarithmen; so erhält man die beiden Gleichungen

$$\log N.\ \log b = lN.\ \log e$$

und

$$\log N.\ lb = lN.\ le,$$

d. i., weil bekanntlich

$$log\, b = 1\,,\; le = 1$$

ist,

$$log\, N = lN.\, log\, e$$

und

$$log N.\, lb = lN\,;$$

folglich

$$log\, N = log\, e.\, lN = \frac{1}{lb}\, lN\,,$$

oder, wenn man

$$M = log\, e = \frac{1}{lb}$$

setzt,

$$log\, N = M\, l\, N\,,$$

so dass man also die natürlichen Logarithmen mit der Grösse M multipliciren muss, um die der Basis b entsprechenden Logarithmen zu erhalten. Die Grösse M ist daher für jedes logarithmische System von der grössten Wichtigkeit, und deshalb auch mit einem besondern Namen, nämlich mit dem Namen des Modulus des logarithmischen Systems, dessen Basis die Grösse b ist, belegt worden. Kennt man die natürlichen Logarithmen und den Modulus eines beliebigen Systems; so ist es jederzeit leicht, alle Logarithmen dieses Systems zu finden.

Bemerkenswerth ist endlich auch noch die aus dem Obigen sich unmittelbar ergebende Gleichung

$$log\, e.\, lb = 1.$$

E. Differentiale der logarithmischen Functionen.

§. 59.

Die gegebene Function sey

$$y = log\, x\,,$$

wobei wir x als positiv annehmen; so ist nach dem allgemeinen Begriffe der Logarithmen

$$x = b^y\,,$$

und folglich nach dem in §. 43. bewiesenen Satze

$$\frac{\partial x}{\partial x} = \frac{\partial\, .\, b^y}{\partial y}\, .\, \frac{\partial y}{\partial x}\, .$$

Aber

$$\frac{\partial x}{\partial x} = 1$$

und nach §. 57.

$$\frac{\partial\, .\, b^y}{\partial y} = b^y\, lb = x lb.$$

Also

$$1 = x lb.\, \frac{\partial y}{\partial x}\,,$$

und folglich

$$1. \quad \frac{\partial y}{\partial x} = \frac{1}{xlb}, \quad \partial y = \frac{\partial x}{xlb},$$

oder nach §. 58.

$$2. \quad \frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\log e}{x}, \quad \partial y = \frac{\log e}{x} \partial x.$$

Für die Function

$$y = lx,$$

wo x ebenfalls immer als positiv angenommen wird, ist $b = e$, $lb = 1$, und folglich nach 1.

$$3. \quad \frac{\partial y}{\partial x} = \frac{1}{x}, \quad \partial y = \frac{\partial x}{x}.$$

Diese sehr einfachen Formeln werden im Folgenden häufige Anwendung finden.

F. Differentiale der Kreis-Functionen.

§. 60.

Für $y = \sin x$ ist nach §. 10. 4.

$$\Delta y = 2 \sin \tfrac{1}{2} \Delta x \cos (x + \tfrac{1}{2} \Delta x),$$

und folglich

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2 \frac{\sin \frac{1}{2} \Delta x}{\Delta x} \cos (x + \tfrac{1}{2} \Delta x)$$

oder

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sin \frac{1}{2} \Delta x}{\frac{1}{2} \Delta x} \cos (x + \tfrac{1}{2} \Delta x).$$

Lässt man nun Δx sich der Null nähern; so nähert $\cos (x + \frac{1}{2} \Delta x)$ sich offenbar immer mehr und mehr der Gränze $\cos x$ und kann derselben beliebig nahe gebracht werden, wenn man nur Δx nahe genug bei Null annimmt, oder es ist

$$Lim \cos (x + \tfrac{1}{2} \Delta x) = \cos x,$$

immer unter der Voraussetzung, dass Δx sich der Null nähert.

Um ferner die Gränze zu finden, welcher sich der Bruch

$$\frac{\sin \frac{1}{2} \Delta x}{\frac{1}{2} \Delta x},$$

wofern es nämlich überhaupt eine solche Gränze giebt, immer mehr und mehr und bis zu jedem beliebigen Grade nähert, wenn Δx sich der Null nähert, nehme man, welches offenbar immer möglich ist, den absoluten Werth von Δx so klein, dass

$$\sin \tfrac{1}{2} \Delta x, \quad \tfrac{1}{2} \Delta x, \quad \tan g \tfrac{1}{2} \Delta x$$

gleiche Vorzeichen haben, und dass für den in Rede stehenden Werth von Δx und für alle ihren absoluten Werthen nach klei-

nere Δx, in Bezug auf die absoluten Werthe der folgenden Grössen,

$$\sin \tfrac{1}{2} \Delta x < \tfrac{1}{2} \Delta x < \tang \tfrac{1}{2} \Delta x$$

ist. Dann ist

$$\frac{\sin \frac{1}{2} \Delta x}{\sin \frac{1}{2} \Delta x} > \frac{\sin \frac{1}{2} \Delta x}{\frac{1}{2} \Delta x} > \frac{\sin \frac{1}{2} \Delta x}{\tang \frac{1}{2} \Delta x},$$

d. i.

$$1 > \frac{\sin \frac{1}{2} \Delta x}{\frac{1}{2} \Delta x} > \cos \tfrac{1}{2} \Delta x.$$

Man sieht also, dass für die in Rede stehenden Werthe von Δx der Bruch

$$\frac{\sin \frac{1}{2} \Delta x}{\frac{1}{2} \Delta x}$$

immer zwischen 1 und $\cos \frac{1}{2} \Delta x$ enthalten ist. Da nun, wenn Δx sich der Null nähert, $\cos \frac{1}{2} \Delta x$ sich immer mehr und mehr der Einheit nähert, und derselben beliebig nahe gebracht werden kann, wenn man nur Δx der Null nahe genug kommen lässt; so nähert sich, wenn Δx sich der Null nähert, offenbar auch der obige Bruch immer mehr und mehr der Einheit, und kann derselben beliebig nahe gebracht werden, wenn man nur Δx der Null nahe genug kommen lässt. Also ist

$$Lim \frac{\sin \frac{1}{2} \Delta x}{\frac{1}{2} \Delta x} = 1,$$

immer unter der Voraussetzung, dass Δx sich der Null nähert.

Weil nun unter derselben Voraussetzung, da nach dem Obigen

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sin \frac{1}{2} \Delta x}{\frac{1}{2} \Delta x} \cos (x + \tfrac{1}{2} \Delta x)$$

ist, offenbar

$$Lim \frac{\Delta y}{\Delta x} = Lim \frac{\sin \frac{1}{2} \Delta x}{\frac{1}{2} \Delta x} . Lim \cos (x + \tfrac{1}{2} \Delta x)$$

ist; so ist nach dem Vorhergehenden

$$Lim \frac{\Delta y}{\Delta x} = \cos x,$$

immer unter der Voraussetzung, dass Δx sich der Null nähert.

Nach dem allgemeinen Begriffe des Differentialquotienten ist aber

$$Lim \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\partial y}{\partial x}.$$

Also ist

$$1. \quad \frac{\partial y}{\partial x} = \cos x,$$

und folglich

$$2. \quad \partial y = \cos x \, \partial x.$$

§. 61.

Das Differential der Function $y = \cos x$ kann man auf ganz ähnliche Art finden.

Nach §. 10. 5. ist nämlich

$$\Delta y = -2\sin\tfrac{1}{2}\Delta x \sin(x + \tfrac{1}{2}\Delta x)$$

und folglich

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = -2\frac{\sin\frac{1}{2}\Delta x}{\Delta x}\sin(x + \tfrac{1}{2}\Delta x)$$

oder

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{\sin\frac{1}{2}\Delta x}{\frac{1}{2}\Delta x}\sin(x + \tfrac{1}{2}\Delta x);$$

also offenbar

$$Lim\frac{\Delta y}{\Delta x} = -Lim\frac{\sin\frac{1}{2}\Delta x}{\frac{1}{2}\Delta x}.\,Lim\sin(x + \tfrac{1}{2}\Delta x),$$

immer unter der Voraussetzung, dass Δx sich der Null nähert.

Weil nun aber, wie sogleich erhellet,

$$Lim\sin(x + \tfrac{1}{2}\Delta x) = \sin x,$$

und nach §. 60.

$$Lim\frac{\sin\frac{1}{2}\Delta x}{\frac{1}{2}\Delta x} = 1$$

ist; so ist

$$Lim\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\sin x,$$

d. i.

$$1.\quad \frac{\partial y}{\partial x} = -\sin x,$$

und folglich

$$2.\quad \partial y = -\sin x\,\partial x.$$

Man kann aber dieses Differential auch noch auf folgende Art finden. Bekanntlich ist

$$y^2 = 1 - \sin x^2,$$

und folglich, wenn man auf beiden Seiten dieser Gleichung differentiirt,

$$2y\frac{\partial y}{\partial x} = -2\sin x\frac{\partial\sin x}{\partial x}$$

oder

$$y\frac{\partial y}{\partial x} = -\sin x\frac{\partial\sin x}{\partial x}.$$

Weil nun nach §. 60.

$$\frac{\partial\sin x}{\partial x} = \cos x$$

ist; so ist

$$y\frac{\partial y}{\partial x} = -\sin x\cos x,$$

und folglich, wenn man auf beiden Seiten mit $y = \cos x$ dividirt,

$$1^*.\quad \frac{\partial y}{\partial x} = -\sin x;$$

also

$$2^*.\ \partial y = -\sin x\,\partial x.$$

Endlich kann man dieses Differential auch noch auf folgende sehr einfache Art finden. Bekanntlich ist

$$y = \sin(\tfrac{1}{2}\pi - x)$$

oder, wenn wir

$$\tfrac{1}{2}\pi - x = z$$

setzen,

$$y = \sin z.$$

Weil nun nach §. 43.

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial y}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x},$$

und nach §. 60.

$$\frac{\partial y}{\partial z} = \cos z,$$

auch offenbar

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -1$$

ist; so ist

$$\frac{\partial y}{\partial x} = -\cos z,$$

d. i., weil $\cos z = \sin x$ ist,

$$1^{**}.\ \frac{\partial y}{\partial x} = -\sin x,$$

und folglich

$$2^{**}.\ \partial y = -\sin x\,\partial x.$$

§. 62.

Für $y = tang\,x$ ist bekanntlich

$$y = \frac{\sin x}{\cos x}$$

und folglich

$$\Delta y = \frac{\sin(x+\Delta x)}{\cos(x+\Delta x)} - \frac{\sin x}{\cos x},$$

woraus leicht

$$\Delta y = \frac{\sin \Delta x}{\cos x \cos(x+\Delta x)},$$

oder

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sin \Delta x}{\Delta x} \cdot \frac{1}{\cos x \cos(x+\Delta x)}$$

erhalten wird.

Folglich ist, immer unter der Voraussetzung, dass Δx sich der Null nähert, offenbar

$$Lim \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{\cos x}\, Lim \frac{\sin \Delta x}{\Delta x} \,.\, Lim \frac{1}{\cos(x+\Delta x)}.$$

Aus §. 60. geht aber hervor, dass

$$Lim \frac{\sin \Delta x}{\Delta x} = 1$$

ist. Folglich ist, weil offenbar

$$Lim\,\frac{1}{\cos(x+\Delta x)}=\frac{1}{\cos x}$$

ist,

$$Lim\,\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{1}{\cos x^2}.$$

Nach dem allgemeinen Begriffe des Differentialquotienten ist aber

$$Lim\,\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\partial y}{\partial x}.$$

Also ist

$$\frac{\partial y}{\partial x}=\frac{1}{\cos x^2},\quad \partial y=\frac{\partial x}{\cos x^2}.$$

Dieselben Ausdrücke ergeben sich auch auf folgende Art. Weil

$$y=\frac{\sin x}{\cos x},$$

oder, wenn wir

$$\sin x=p,\quad \cos x=q$$

setzen,

$$y=\frac{p}{q}$$

ist; so ist nach §. 42.

$$\frac{\partial y}{\partial x}=\frac{q\frac{\partial p}{\partial x}-p\frac{\partial q}{\partial x}}{q^2}.$$

Nach §. 60. und §. 61. ist

$$\frac{\partial p}{\partial x}=\cos x,\quad \frac{\partial q}{\partial x}=-\sin x.$$

Also ist

$$\frac{\partial y}{\partial x}=\frac{\cos x^2+\sin x^2}{\cos x^2},$$

und folglich nach einem bekannten goniometrischen Satze

$$\frac{\partial y}{\partial x}=\frac{1}{\cos x^2},\quad \partial y=\frac{\partial x}{\cos x^2},$$

ganz übereinstimmend mit dem Vorhergehenden.

§. 63.

Für $y=\cot x$ ist

$$y=\frac{\cos x}{\sin x}$$

und folglich

$$\Delta y=\frac{\cos(x+\Delta x)}{\sin(x+\Delta x)}-\frac{\cos x}{\sin x},$$

woraus sich leicht

$$\Delta y=-\frac{\sin\Delta x}{\sin x\ \sin(x+\Delta x)};$$

also

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{\sin \Delta x}{\Delta x} \cdot \frac{1}{\sin x \sin(x+\Delta x)}$$

ergiebt.

Folglich ist

$$Lim \frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{1}{\sin x} Lim \frac{\sin \Delta x}{\Delta x} \cdot Lim \frac{1}{\sin(x+\Delta x)},$$

und hieraus auf ganz ähnliche Art wie in §. 62.

$$Lim \frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{1}{\sin x^2},$$

d. i.

$$\frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{1}{\sin x^2}, \quad \partial y = -\frac{\partial x}{\sin x^2}.$$

Dieselben Ausdrücke ergeben sich auch auf folgende Art. Man setze

$$\cos x = p, \sin x = q, y = \frac{p}{q};$$

so ist nach §. 42.

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{q\frac{\partial p}{\partial x} - p\frac{\partial q}{\partial x}}{q^2}.$$

Weil nun nach §. 61. und §. 60.

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\sin x, \quad \frac{\partial q}{\partial x} = \cos x$$

ist; so ist

$$\frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{\sin x^2 + \cos x^2}{\sin x^2},$$

d. i.

$$\frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{1}{\sin x^2}, \quad \partial y = -\frac{\partial x}{\sin x^2},$$

ganz wie vorher.

Endlich kann man diese Ausdrücke auch noch auf folgendem Wege erhalten. Weil

$$\cot x = tang\left(\tfrac{1}{2}\pi - x\right)$$

ist; so ist, wenn wir $\frac{1}{2}\pi - x = z$ setzen,

$$y = tang\, z.$$

Nach §. 43. ist

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial y}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x},$$

und nach §. 62. ist

$$\frac{\partial y}{\partial z} = \frac{1}{\cos z^2};$$

auch ist offenbar

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -1.$$

Also ist

$$\frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{1}{\cos z^2},$$

d. i., weil $\cos z = \sin x$ ist,

$$\frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{1}{\sin x^2}, \quad \partial y = -\frac{\partial x}{\sin x^2},$$

ganz wie vorher.

§. 64.

Für $y = \sec x$ ist

$$\Delta y = \frac{1}{\cos (x + \Delta x)} - \frac{1}{\cos x}$$

$$= \frac{\cos x - \cos (x + \Delta x)}{\cos x \cos (x + \Delta x)}$$

$$= \frac{2 \sin \frac{1}{2} \Delta x \sin (x + \frac{1}{2} \Delta x)}{\cos x \cos (x + \Delta x)},$$

und folglich

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sin \frac{1}{2} \Delta x}{\frac{1}{2} \Delta x} \cdot \frac{\sin (x + \frac{1}{2} \Delta x)}{\cos x \cos (x + \Delta x)};$$

also

$$Lim \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{\cos x} \cdot Lim \frac{\sin \frac{1}{2} \Delta x}{\frac{1}{2} \Delta x} \cdot Lim \frac{\sin (x + \frac{1}{2} \Delta x)}{\cos (x + \Delta x)}.$$

Weil nun nach §. 60.

$$Lim \frac{\sin \frac{1}{2} \Delta x}{\frac{1}{2} \Delta x} = 1$$

und offenbar

$$Lim \frac{\sin (x + \frac{1}{2} \Delta x)}{\cos (x + \Delta x)} = \frac{\sin x}{\cos x} = tang\, x$$

ist; so ist

$$Lim \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{tang\, x}{\cos x},$$

d. i.

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{tang\, x}{\cos x} = \frac{\sin x}{\cos x^2}, \quad \partial y = \frac{tang\, x}{\cos x} \partial x = \frac{\sin x}{\cos x^2} \partial x.$$

Dieselben Ausdrücke ergeben sich auf folgende Art. Setzen wir $\cos x = p$, so ist

$$y = p^{-1},$$

und folglich nach §. 45.

$$\frac{\partial y}{\partial x} = -p^{-2} \frac{\partial p}{\partial x}.$$

Nach §. 61. ist

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\sin x,$$

Also ist

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\sin x}{\cos x^2} = \frac{\tang x}{\cos x}, \ \partial y = \frac{\sin x}{\cos x^2}\partial x = \frac{\tang x}{\cos x}\partial x,$$

wie vorher.

§. 65.

Für $y = \operatorname{cosec} x$ ist

$$\Delta y = \frac{1}{\sin(x+\Delta x)} - \frac{1}{\sin x}$$

$$= \frac{\sin x - \sin(x+\Delta x)}{\sin x \sin(x+\Delta x)}$$

$$= -\frac{2\sin\frac{1}{2}\Delta x \cos(x+\frac{1}{2}\Delta x)}{\sin x \sin(x+\Delta x)};$$

also

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{\sin\frac{1}{2}\Delta x}{\frac{1}{2}\Delta x} \cdot \frac{\cos(x+\frac{1}{2}\Delta x)}{\sin x \sin(x+\Delta x)},$$

und folglich

$$Lim\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{1}{\sin x}\,Lim\frac{\sin\frac{1}{2}\Delta x}{\frac{1}{2}\Delta x}\,.\,Lim\frac{\cos(x+\frac{1}{2}\Delta x)}{\sin(x+\Delta x)}.$$

Weil nun nach §. 60.

$$Lim\frac{\sin\frac{1}{2}\Delta x}{\frac{1}{2}\Delta x} = 1$$

und offenbar

$$Lim\frac{\cos(x+\frac{1}{2}\Delta x)}{\sin(x+\Delta x)} = \frac{\cos x}{\sin x} = \cot x$$

ist; so ist

$$Lim\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{\cot x}{\sin x},$$

d. i.

$$\frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{\cot x}{\sin x} = -\frac{\cos x}{\sin x^2}, \ \partial y = -\frac{\cot x}{\sin x}\partial x = -\frac{\cos x}{\sin x^2}\partial x.$$

Zu denselben Ausdrücken gelangt man auch auf folgendem Wege. Für $\sin x = p$ ist

$$y = p^{-1},$$

und folglich nach §. 45.

$$\frac{\partial y}{\partial x} = -p^{-2}\frac{\partial p}{\partial x}.$$

Nach §. 60. ist aber

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \cos x.$$

Also ist

$$\frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{\cos x}{\sin x^2} = -\frac{\cot x}{\sin x}, \ \partial y = -\frac{\cos x}{\sin x^2}\partial x = -\frac{\cot x}{\sin x}\partial x.$$

Endlich kann man zu diesen Formeln auch auf folgende Art gelangen. Für $\frac{1}{2}\pi - x = z$ ist

$$y = sec\, z,$$

Nach §. 43. ist

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial y}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x},$$

und nach §. 64. ist

$$\frac{\partial y}{\partial z} = \frac{tang\, z}{cos\, z};$$

auch ist offenbar

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -1.$$

Also ist

$$\frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{tang\, z}{cos\, z},$$

d. i.

$$\frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{cot\, x}{sin\, x} = -\frac{cos\, x}{sin\, x^2},\ \partial y = -\frac{cot\, x}{sin\, x}\,\partial x = -\frac{cos\, x}{sin\, x^2}\,\partial x,$$

ganz wie vorher.

§. 66.

Für $y = sinv\, x$ ist

$$\Delta y = sinv\,(x + \Delta x) - sinv\, x$$
$$= cos\, x - cos\,(x + \Delta x)$$
$$= 2 sin \tfrac{1}{2}\Delta x\ sin\,(x + \tfrac{1}{2}\Delta x);$$

also

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{sin \frac{1}{2}\Delta x}{\frac{1}{2}\Delta x}\, sin\,(x + \tfrac{1}{2}\Delta x),$$

und folglich

$$Lim \frac{\Delta y}{\Delta x} = Lim \frac{sin \frac{1}{2}\Delta x}{\frac{1}{2}\Delta x} \cdot Lim\, sin\,(x + \tfrac{1}{2}\Delta x).$$

Aber nach §. 60.

$$Lim \frac{sin \frac{1}{2}\Delta x}{\frac{1}{2}\Delta x} = 1$$

und offenbar

$$Lim\, sin\,(x + \tfrac{1}{2}\Delta x) = sin\, x.$$

Also

$$Lim \frac{\Delta y}{\Delta x} = sin\, x,$$

d. i.

$$\frac{\partial y}{\partial x} = sin\, x,\quad \partial y = sin\, x\, \partial x.$$

Noch leichter ergeben sich diese Ausdrücke auf folgende Art. Bekanntlich ist

$$y = 1 - \cos x,$$

und folglich

$$\frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{\partial \cos x}{\partial x},$$

d. i. nach §. 61.

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \sin x, \quad \partial y = \sin x \, \partial x,$$

wie vorher.

§. 67.

Für $y = \cos v x$ ist

$$\Delta y = \cos v(x + \Delta x) - \cos v x$$
$$= \sin x - \sin(x + \Delta x)$$
$$= -2 \sin \tfrac{1}{2}\Delta x \cos(x + \tfrac{1}{2}\Delta x);$$

folglich

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{\sin \frac{1}{2}\Delta x}{\frac{1}{2}\Delta x} \cos(x + \tfrac{1}{2}\Delta x);$$

also

$$Lim \frac{\Delta y}{\Delta x} = -Lim \frac{\sin \frac{1}{2}\Delta x}{\frac{1}{2}\Delta x} \cdot Lim \cos(x + \tfrac{1}{2}\Delta x).$$

Weil nun nach §. 60.

$$Lim \frac{\sin \frac{1}{2}\Delta x}{\frac{1}{2}\Delta x} = 1$$

und offenbar

$$Lim \cos(x + \tfrac{1}{2}\Delta x) = \cos x$$

ist; so ist

$$Lim \frac{\Delta y}{\Delta x} = -\cos x,$$

und folglich

$$\frac{\partial y}{\partial x} = -\cos x, \quad \partial y = -\cos x \, \partial x.$$

Dieselben Formeln ergeben sich auch leicht auf folgende Art. Weil

$$y = 1 - \sin x$$

ist; so ist

$$\frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{\partial \sin x}{\partial x}$$

und folglich nach §. 60.

$$\frac{\partial y}{\partial x} = -\cos x, \quad \partial y = -\cos x \, \partial x.$$

Endlich ist, wenn man $\frac{1}{2}\pi - x = z$ setzt, auch

$$y = \sin v z.$$

Endlich ... gelangen.

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial y}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x},$$

Nach §. ...

$$\frac{\partial y}{\partial z} = \sin z;$$

und ...

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -1.$$

auch ...

$$\frac{\partial y}{\partial x} = -\sin z,$$

$$\frac{\partial y}{\partial x} = -\cos x, \quad \partial y = -\cos x \, \partial x;$$

§. 68.

... nun ferner $y = Arc \sin x$ die gegebene Function ...

$$x = \sin y,$$

... §. 43. ist

$$\frac{\partial x}{\partial x} = \frac{\partial x}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial x}.$$

...

$$\frac{\partial x}{\partial x} = 1, \quad \frac{\partial x}{\partial y} = \cos y \quad (\text{§. 60.}).$$

...

$$1 = \cos y \frac{\partial y}{\partial x}, \quad \frac{\partial y}{\partial x} = \frac{1}{\cos y}.$$

Weil nun

$$\cos y^2 = 1 - \sin y^2 = 1 - x^2$$

... so ist

$$1. \quad \frac{\partial y}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

und folglich

$$2. \quad \partial y = \frac{\partial x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Zu bemerken hat man aber hierbei, dass man in diesen beiden Formeln die Quadratwurzel im Nenner positiv oder negativ zu nehmen hat, jenachdem $\cos y$, d. i. der Cosinus des gegebenen Bogens, positiv oder negativ ist, wie augenblicklich erhellet, wenn man nur bemerkt, dass vorher

$$\cos y = \sqrt{1-x^2}$$

gesetzt worden ist. Ist $Arc \sin x$ der zu dem Sinus x gehörende Bogen, welcher den kleinsten absoluten Werth hat; so ist

cos y positiv, und in diesem Falle also die Quadratwurzel in den obigen Formeln positiv zu nehmen. Dass x zwischen -1 und $+1$ liegen muss, wenn die in Rede stehenden Formeln reell seyn und keine unendlichen Werthe liefern sollen, bedarf wohl kaum noch einer besondern Erwähnung.

§. 69.

Für $y = Arc\cos x$ ist

$$x = \cos y.$$

Nach §. 43. ist

$$\frac{\partial x}{\partial x} = \frac{\partial x}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial x}.$$

Aber

$$\frac{\partial x}{\partial x} = 1, \quad \frac{\partial x}{\partial y} = -\sin y \text{ (§. 61.).}$$

Also

$$1 = -\sin y \cdot \frac{\partial y}{\partial x}, \quad \frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{1}{\sin y}.$$

Weil nun

$$\sin y^2 = 1 - \cos y^2 = 1 - x^2$$

ist; so ist

$$1. \quad \frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

und folglich

$$2. \quad \partial y = -\frac{\partial x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Die Quadratwurzel ist in diesen Formeln positiv oder negativ zu nehmen, jenachdem *sin y* positiv oder negativ ist. Wenn *Arc cos x* der kleinste dem Cosinus x entsprechende positive Bogen ist; so ist *sin y* positiv, und folglich in den obigen Formeln die Quadratwurzel positiv zu nehmen. Auch hier muss x zwischen -1 und $+1$ liegen.

§. 70.

Für $y = Arc\tang x$ ist

$$x = \tang y.$$

Nach §. 43. ist

$$\frac{\partial x}{\partial x} = \frac{\partial x}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial x}.$$

Aber

$$\frac{\partial x}{\partial x} = 1, \quad \frac{\partial x}{\partial y} = \frac{1}{\cos y^2} \text{ (§. 62.).}$$

Also

$$1 = \frac{1}{\cos y^2} \cdot \frac{\partial y}{\partial x}, \quad \frac{\partial y}{\partial x} = \cos y^2.$$

Nach …

$$\frac{\cdot}{\cdot y^2} = \frac{1-\cos y^2}{\cos y^2}$$

un

$$[illegible] = \frac{1}{1+x^2}$$

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{1}{1+x^2},$$

$$\partial y = \frac{\partial x}{1+x^2}.$$

§. 71.

… ist

$$x = \cot y.$$

$$\frac{\partial x}{\partial x} = \frac{\partial x}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial x}.$$

$$\frac{\partial x}{\partial x} = 1, \quad \frac{\partial x}{\partial y} = -\frac{1}{\sin y^2} \quad (\text{§. 63.}).$$

Also

$$1 = -\frac{1}{\sin y^2} \cdot \frac{\partial y}{\partial x}, \quad \frac{\partial y}{\partial x} = -\sin y^2.$$

Nun ist aber

$$x^2 = \cot y^2 = \frac{\cos y^2}{\sin y^2} = \frac{1-\sin y^2}{\sin y^2}$$

und folglich

$$\sin y^2 = \frac{1}{1+x^2}.$$

Also ist

$$1. \quad \frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{1}{1+x^2},$$

und

$$2. \quad \partial y = -\frac{\partial x}{1+x^2}.$$

§. 72.

Für $y = Arc\sec x$ ist

$$x = \sec y.$$

Nach §. 43. ist

$$\frac{\partial x}{\partial x} = \frac{\partial x}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial x}.$$

Aber

$$\frac{\partial x}{\partial x} = 1, \quad \frac{\partial x}{\partial y} = \frac{\tang y}{\cos y} \quad (\text{§. 64.}).$$

Also

$$1 = \frac{\tang y}{\cos y} \cdot \frac{\partial y}{\partial x}, \quad \frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\cos y}{\tang y}.$$

Weil nun

$$\cos y = \frac{1}{\sec y} = \frac{1}{x}$$

und

$$\tang y = \sqrt{\sec y^2 - 1} = \sqrt{x^2 - 1}$$

ist; so ist

$$1. \quad \frac{\partial y}{\partial x} = \frac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}}$$

und

$$2. \quad \partial y = \frac{\partial x}{x\sqrt{x^2 - 1}}.$$

Die Quadratwurzel ist in diesen Formeln positiv oder negativ zu nehmen, jenachdem $\tang y$ positiv oder negativ ist. Bezeichnet $Arc \sec x$ den kleinsten zu der Secante x gehörenden positiven Bogen; so ist die Quadratwurzel positiv oder negativ zu nehmen, jenachdem x positiv oder negativ ist, d. h. die Quadratwurzel ist in diesem Falle immer mit einem solchen Vorzeichen zu nehmen, dass in den obigen Formeln der Nenner $x\sqrt{x^2 - 1}$ positiv ist. Dass der absolute Werth von x grösser als die Einheit seyn muss, wenn die Formeln reell seyn und nicht unendlich werden sollen, versteht sich von selbst.

§. 73.

Für $y = Arc \operatorname{cosec} x$ ist

$$x = \operatorname{cosec} y.$$

Nach §. 43. ist

$$\frac{\partial x}{\partial x} = \frac{\partial x}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial x}.$$

Aber

$$\frac{\partial x}{\partial x} = 1, \quad \frac{\partial x}{\partial y} = -\frac{\cot y}{\sin y} \quad (§. 65.).$$

Also

$$1 = -\frac{\cot y}{\sin y} \cdot \frac{\partial y}{\partial x}, \quad \frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{\sin y}{\cot y}.$$

Weil nun

$$\sin y = \frac{1}{\operatorname{cosec} y} = \frac{1}{x}$$

und

$$\cot y = \sqrt{\operatorname{cosec} y^2 - 1} = \sqrt{x^2 - 1}$$

ist; so ist

$$1. \quad \frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}}$$

und

$$2. \quad \partial y = -\frac{\partial x}{x\sqrt{x^2 - 1}}.$$

Die Quadratwurzel ist in diesen Formeln positiv oder negativ zu nehmen, jenachdem $\cot y$ positiv oder negativ ist. Wenn $Arc\,cosec\,x$ der zu der Cosecante x gehörende Bogen ist, welcher den kleinsten absoluten Werth hat; so ist die Quadratwurzel positiv oder negativ zu nehmen, jenachdem x positiv oder negativ ist, d. h. die Quadratwurzel ist in diesem Falle immer mit einem solchen Vorzeichen zu nehmen, dass in den obigen Formeln der Nenner $x\sqrt{x^2-1}$ positiv ist. Auch hier muss der absolute Werth von x grösser als die Einheit seyn.

§. 74.

Für $y = Arc\,sinv\,x$ ist

$$x = sinv\,y.$$

Nach §. 43. ist

$$\frac{\partial x}{\partial x} = \frac{\partial x}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial x}.$$

Aber

$$\frac{\partial x}{\partial x} = 1,\quad \frac{\partial x}{\partial y} = \sin y \text{ (§. 66.)}.$$

Also

$$1 = \sin y \frac{\partial y}{\partial x},\quad \frac{\partial y}{\partial x} = \frac{1}{\sin y}.$$

Weil nun

$$\cos y = 1 - sinv\,y = 1 - x$$

und folglich

$$\sin y = \sqrt{1-(1-x)^2} = \sqrt{2x - x^2} = \sqrt{x(2-x)}$$

ist; so ist

$$1.\quad \frac{\partial y}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{x(2-x)}}$$

und

$$2.\quad \partial y = \frac{\partial x}{\sqrt{x(2-x)}}.$$

Die Quadratwurzel im Nenner ist positiv oder negativ zu nehmen, jenachdem $\sin y$ positiv oder negativ ist. Bezeichnet $Arc\,sinv\,x$ den kleinsten zu dem Sinus versus x gehörenden positiven Bogen; so ist die Quadratwurzel positiv zu nehmen. x muss hier stets positiv und kleiner als Zwei seyn.

§. 75.

Für $y = Arc\,cosv\,x$ ist

$$x = cosv\,y.$$

Nach §. 43. ist

$$\frac{\partial x}{\partial x} = \frac{\partial x}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial x}.$$

Aber

$$\frac{\partial x}{\partial x} = 1, \quad \frac{\partial x}{\partial y} = -\cos y \quad (\S. 67.).$$

Also

$$1 = -\cos y \frac{\partial y}{\partial x}; \quad \frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{1}{\cos y}.$$

Weil nun

$$\sin y = 1 - \operatorname{cosv} y = 1 - x$$

und folglich

$$\cos y = \sqrt{1-(1-x)^2} = \sqrt{2x-x^2} = \sqrt{x(2-x)}$$

ist; so ist

$$1. \quad \frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{1}{\sqrt{x(2-x)}}$$

und

$$2. \quad \partial y = -\frac{\partial x}{\sqrt{x(2-x)}}.$$

Die Quadratwurzel im Nenner ist positiv oder negativ zu nehmen, jenachdem $\cos y$ positiv oder negativ ist. Bezeichnet $\operatorname{Arc} \operatorname{cosv} x$ den zu dem Cosinus versus x gehörenden Bogen, welcher den kleinsten absoluten Werth hat; so ist die Quadratwurzel positiv zu nehmen. Auch hier muss x stets positiv und kleiner als Zwei seyn.

G. Differentiation der zusammengesetzten transcendenten Functionen.

§. 76.

Die Differentation der zusammengesetzten transcendenten Functionen hat jetzt nicht die geringste Schwierigkeit mehr, und einige Beispiele werden zur Erläuterung des Verfahrens, welches man in jedem Falle zu befolgen hat, völlig hinreichend seyn.

1. Wenn $y = a^{b^x}$, wo a und b positive Grössen seyn sollen, die gegebene Function ist; so setze man $b^x = z$ und folglich $y = a^z$.

Nach §. 43. ist

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial y}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x}.$$

Weil nun nach §. 57.

$$\frac{\partial y}{\partial z} = a^z \, la, \quad \frac{\partial z}{\partial x} = b^x \, lb$$

ist; so ist

$$\frac{\partial y}{\partial x} = a^z \, b^x \, la \, lb = a^{b^x} \, b^x \, la \, lb,$$

und folglich

$$\partial y = a^{b^x} \, b^x \, la \, lb \, \partial x.$$

2. Für $y = e^{e^x}$ ist im Vorhergehenden $a = b = e$, $la = lb = le = 1$ zu setzen. Folglich ist in diesem Falle

$$\partial y = e^{e^x} e^x \, \partial x.$$

3. Ist $y = e^{x^2}$ die gegebene Function; so setze man $x^2 = z$, also $y = e^z$.

Nach §. 43. ist

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial y}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x}.$$

Weil nun nach §. 57. und §. 44.

$$\frac{\partial y}{\partial z} = e^z, \quad \frac{\partial z}{\partial x} = 2x$$

ist; so ist

$$\frac{\partial y}{\partial x} = 2xe^z = 2xe^{x^2}, \quad \partial y = 2xe^{x^2} \, \partial x.$$

4. Wenn $y = \frac{e^{ax}}{x} = x^{-1} e^{ax}$ die gegebene Function ist; so ist nach §. 40.

$$\frac{\partial y}{\partial x} = x^{-1} \frac{\partial \, . \, e^{ax}}{\partial x} + e^{ax} \frac{\partial \, . \, x^{-1}}{\partial x}.$$

Für $ax = z$ ist nach §. 43., §. 57. und §. 37.

$$\frac{\partial \, . \, e^{ax}}{\partial x} = \frac{\partial \, . \, e^z}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = ae^z = ae^{ax}.$$

Nach §. 44. ist

$$\frac{\partial \, . \, x^{-1}}{\partial x} = -x^{-2}.$$

Also ist

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{ae^{ax}}{x} - \frac{e^{ax}}{x^2} = \frac{e^{ax}}{x}\left(a - \frac{1}{x}\right),$$

und folglich

$$\partial y = \frac{e^{ax}}{x}\left(a - \frac{1}{x}\right) \partial x.$$

5. Wenn $y = e^{\sin x}$ die gegebene Function ist; so setze man $\sin x = z$, folglich $y = e^z$. Nach §. 43. ist

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial y}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x}.$$

Weil nun nach §. 57. und §. 60.

$$\frac{\partial y}{\partial z} = e^z, \quad \frac{\partial z}{\partial x} = \cos x$$

ist; so ist

$$\frac{\partial y}{\partial x} = e^z \cos x = e^{\sin x} \cos x,$$

und folglich

$$\partial y = e^{\sin x} \cos x \, \partial x.$$

§. 77.

Ist $y = l\sqrt{a^2+x^2}$ die gegebene Function; so setze man

$$\sqrt{a^2+x^2} = z$$

und folglich $y = lz$. Nach §. 43. ist

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial y}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x}.$$

Weil nun nach §. 59.

$$\frac{\partial y}{\partial z} = \frac{1}{z}$$

und nach §. 45.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \tfrac{1}{2}(a^2+x^2)^{-\frac{1}{2}}.\, 2x = \frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}$$

ist; so ist

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{x}{z\sqrt{a^2+x^2}} = \frac{x}{a^2+x^2},$$

und folglich

$$\partial y = \frac{x\,\partial x}{a^2+x^2}.$$

Ist ferner

$$y = x\sqrt{a^2+x^2} + l(x+\sqrt{a^2+x^2})$$

die gegebene Function; so ist nach §. 38.

$$\partial y = \partial.x\sqrt{a^2+x^2} + \partial l(x+\sqrt{a^2+x^2}).$$

Ferner ist nach §. 40.

$$\partial.x\sqrt{a^2+x^2} = x\,\partial\sqrt{a^2+x^2} + \sqrt{a^2+x^2}.\,\partial x,$$

und folglich nach §. 43. und §. 44.

$$\partial.x\sqrt{a^2+x^2} = \tfrac{1}{2}x(a^2+x^2)^{-\frac{1}{2}}.\, 2x\,\partial x + \sqrt{a^2+x^2}.\,\partial x$$
$$= \frac{a^2+2x^2}{\sqrt{a^2+x^2}}\,\partial x.$$

Setzen wir aber

$$x+\sqrt{a^2+x^2} = z;$$

so ist nach §. 43. und §. 59.

$$\partial l(x+\sqrt{a^2+x^2}) = \frac{\partial lz}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x}\,\partial x = \frac{1}{z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x}\,\partial x.$$

Aber nach §. 38., §. 43. und §. 44.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 1 + \tfrac{1}{2}(a^2+x^2)^{-\frac{1}{2}}.\, 2x = \frac{x+\sqrt{a^2+x^2}}{\sqrt{a^2+x^2}} = \frac{z}{\sqrt{a^2+x^2}}.$$

Also

$$\partial l(x+\sqrt{a^2+x^2}) = \frac{\partial x}{\sqrt{a^2+x^2}}.$$

Folglich ist

$$\partial y = \frac{1+a^2+2x^2}{\sqrt{a^2+x^2}}\,\partial x.$$

Wäre $a = 1$, d. i.

$$y = x\sqrt{1+x^2} + l(x + \sqrt{1+x^2});$$

so wäre

$$\partial y = 2\sqrt{1+x^2} \, . \, \partial x \, .$$

§. 78.

Ist

$$y = \sqrt[3]{3e^x - \frac{x^2}{\sin x}}$$

die gegebene Function; so setze man

$$3e^x - \frac{x^2}{\sin x} = z$$

und folglich

$$y = \sqrt[3]{z}.$$

Nach §. 43. ist

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial y}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x},$$

und nach §. 44. ist

$$\frac{\partial y}{\partial z} = \tfrac{1}{3} z^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{z^2}}.$$

Also ist

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{1}{3\sqrt[3]{\left(3e^x - \frac{x^2}{\sin x}\right)^2}} \cdot \frac{\partial z}{\partial x},$$

und es kommt folglich jetzt bloss noch auf die Entwickelung des Differentialquotienten $\frac{\partial z}{\partial x}$ an.

Nach §. 37., §. 38., §. 42., §. 44., §. 57. und §. 60. erhält man aber leicht

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3e^x - \frac{2x \sin x - x^2 \cos x}{\sin x^2}$$

$$= \frac{(3e^x \sin x - 2x) \sin x + x^2 \cos x}{\sin x^2}$$

$$= \frac{3e^x \sin x - 2x + x^2 \cot x}{\sin x}.$$

Also ist

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{3e^x \sin x - 2x + x^2 \cot x}{3 \sin x \sqrt[3]{\left(3e^x - \frac{x^2}{\sin x}\right)^2}},$$

und folglich

$$\partial y = \frac{3e^x \sin x - 2x + x^2 \cot x}{3 \sin x \sqrt[3]{\left(3e^x - \frac{x^2}{\sin x}\right)^2}} \, \partial x.$$

Ist ferner

$$y = Arc\,sin\,\frac{a^2-x^2}{a^2+x^2}$$

die gegebene Function; so setze man

$$\frac{a^2-x^2}{a^2+x^2} = z,\quad y = Arc\,sin\,z.$$

Nach §. 43. ist

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial y}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial x},$$

und nach §. 68. ist

$$\frac{\partial y}{\partial z} = \frac{1}{\sqrt{1-z^2}},$$

die Quadratwurzel positiv oder negativ genommen, jenachdem *cos y* positiv oder negativ ist.

Ferner ist, wie man leicht findet,

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{4a^2x}{(a^2+x^2)^2}.$$

Also ist

$$\frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{4a^2x}{(a^2+x^2)^2\sqrt{1-z^2}},$$

die Quadratwurzel positiv oder negativ genommen, jenachdem *cos y* positiv oder negativ ist.

Weil nun aber

$$1-z^2 = 1-\left(\frac{a^2-x^2}{a^2+x^2}\right)^2 = \frac{4a^2x^2}{(a^2+x^2)^2}$$

ist; so ist, wie leicht erhellen wird,

$$\frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{2a^2x}{(a^2+x^2)\sqrt{a^2x^2}},$$

die Quadratwurzel positiv oder negativ genommen, jenachdem *cos y* positiv oder negativ ist.

Ist nun zuerst ax positiv; so ist

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \mp\frac{2a}{a^2+x^2},\quad \partial y = \mp\frac{2a\partial x}{a^2+x^2},$$

und das obere oder untere Zeichen zu nehmen, jenachdem *cos y* positiv oder negativ ist.

Ist aber ax negativ; so ist

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \pm\frac{2a}{a^2+x^2},\quad \partial y = \pm\frac{2a\partial x}{a^2+x^2},$$

und wieder das obere oder das untere Zeichen zu nehmen, jenachdem *cos y* positiv oder negativ ist.

Ist also *cos y* positiv; so ist

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \mp\frac{2a}{a^2+x^2},\quad \partial y = \mp\frac{2a\partial x}{a^2+x^2}$$

und das obere oder untere Zeichen zu nehmen, jenachdem ax positiv oder negativ ist.

Ist aber $\cos y$ negativ; so ist

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \pm \frac{2a}{a^2+x^2}, \; \partial y = \pm \frac{2a\partial x}{a^2+x^2},$$

und das obere oder untere Zeichen zu nehmen, jenachdem ax positiv oder negativ ist.

H. Differentiale der imaginären Functionen.

§. 79.

Unter dem Differentialquotienten einer imaginären Function von der Form

$$y = u + v\sqrt{-1},$$

wo u und v reelle Functionen von x bezeichnen sollen, versteht man die Grösse

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial x}\sqrt{-1}.$$

Eben so versteht man unter dem Differential der imaginären Function

$$y = u + v\sqrt{-1}$$

die Grösse

$$\partial y = \partial u + \partial v . \sqrt{-1}.$$

Weil bekanntlich

$$\partial u = \frac{\partial u}{\partial x}\partial x, \; \partial v = \frac{\partial v}{\partial x}\partial x$$

und folglich

$$\partial y = \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial x}\sqrt{-1}\right)\partial x$$

ist; so ist auch hier immer

$$\partial y = \frac{\partial y}{\partial x}\partial x.$$

Ist überhaupt von dem Differentialquotienten oder dem Differential einer beliebigen imaginären Function von x die Rede; so muss dieselbe, bevor man zur wirklichen Entwickelung des Differentialquotienten oder des Differentials schreiten kann, eigentlich immer zuerst auf die Form $u + v\sqrt{-1}$, wo u und v reelle Functionen von x bezeichnen, gebracht werden, wenn dies nämlich überhaupt möglich ist. Nachdem dies geschehen, unterliegt die wirkliche Entwickelung des Differentialquotienten oder Differentials nach den obigen allgemeinen Vorschriften nicht der geringsten Schwierigkeit weiter.

Durch die folgenden, den in *B.* aufgelösten entsprechenden allgemeinen Aufgaben lässt sich die Entwickelung der Differen-

tiale der imaginären Functionen oft sehr abkürzen und vereinfachen.

§. 80.

Aufgabe. Wenn

$$y = (\alpha + \beta\sqrt{-1})(u + v\sqrt{-1})$$

ist, wo α und β reelle constante Grössen, u und v reelle Functionen von x bezeichnen, das Differential von y zu finden.

Auflösung. Es ist, wie man nach leichter Rechnung findet,

$$y = \alpha u - \beta v + (\beta u + \alpha v)\sqrt{-1},$$

und folglich nach §. 79.

$$\partial y = \partial(\alpha u - \beta v) + \partial(\beta u + \alpha v).\sqrt{-1}.$$

Aber

$$\partial(\alpha u - \beta v) = \alpha\partial u - \beta\partial v,\ \partial(\beta u + \alpha v) = \beta\partial u + \alpha\partial v.$$

Also

$$\partial y = \alpha\partial u - \beta\partial v + (\beta\partial u + \alpha\partial v).\sqrt{-1}.$$

Nun ist aber nach §. 79.

$$\partial(u + v\sqrt{-1}) = \partial u + \partial v.\sqrt{-1},$$

und folglich, wie man nach leichter Rechnung findet,

$$(\alpha + \beta\sqrt{-1})\,\partial(u + v\sqrt{-1}) = \alpha\partial u - \beta\partial v + (\beta\partial u + \alpha\partial v).\sqrt{-1}.$$

Folglich ist

$$\partial y = (\alpha + \beta\sqrt{-1})\,\partial(u + v\sqrt{-1}),$$

eine rücksichtlich ihrer Form mit der Gleichung 2. in §. 37. offenbar ganz übereinstimmende Gleichung.

§. 81.

Aufgabe. Wenn, indem α, β reelle constante Grössen und $u, u_1, \ldots u_k$; $v, v_1, \ldots v_k$ reelle Functionen von x bezeichnen,

$$y = \alpha + \beta\sqrt{-1} \pm (u + v\sqrt{-1}) \pm (u_1 + v_1\sqrt{-1}) \pm \ldots \pm (u_k + v_k\sqrt{-1})$$

ist, das Differential von y zu finden.

Auflösung. Weil

$$y = \alpha \pm u \pm u_1 \pm \ldots \pm u_k + (\beta \pm v \pm v_1 \pm \ldots \pm v_k).\sqrt{-1}$$

ist; so ist nach §. 79.

$$\partial y = \partial(\alpha \pm u \pm u_1 \pm \ldots \pm u_k) + \partial(\beta \pm v \pm v_1 \pm \ldots \pm v_k).\sqrt{-1},$$

und folglich, weil

$$\partial(\alpha \pm u \pm u_1 \pm \ldots \pm u_k) = \pm\partial u \pm \partial u_1 \pm \ldots \pm \partial u_k,$$

$$\partial(\beta \pm v \pm v_1 \pm \ldots \pm v_k) = \pm\partial v \pm \partial v_1 \pm \ldots \pm \partial v_k$$

ist,

$$\partial y = \pm(\partial u + \partial u_1 + \ldots + \partial u_k) \pm (\partial v + \partial v_1 + \ldots + \partial v_k)\sqrt{-1}$$

oder

$$\partial y = \pm(\partial u + \partial v . \sqrt{-1}) \pm (\partial u_1 + \partial v_1 . \sqrt{-1}) \pm \ldots \pm (\partial u_k + \partial v_k . \sqrt{-1}).$$

Weil nun nach §. 79.

$$\partial(u + v\sqrt{-1}) = \partial u + \partial v . \sqrt{-1},$$

$$\partial(u_1 + v_1\sqrt{-1}) = \partial u_1 + \partial v_1 \cdot \sqrt{-1},$$

u. s. w.

$$\partial(u_k + v_k\sqrt{-1}) = \partial u_k + \partial v_k . \sqrt{-1}$$

ist; so ist

$$\partial y = \pm\partial(u + v\sqrt{-1}) \pm \partial(u_1 + v_1\sqrt{-1}) \pm \ldots \pm \partial(u_k + v_k\sqrt{-1}),$$

eine rücksichtlich ihrer Form mit der Gleichung 2. in §. 38. ganz übereinstimmende Gleichung.

§. 82.

Dass, wenn α und β reelle constante Grössen bezeichnen, jederzeit

$$\partial(\alpha + \beta\sqrt{-1}) = 0$$

ist, liesse sich eben so aus §. 81. ableiten, wie §. 39. aus §. 38. abgeleitet worden ist. Noch leichter gelangt man aber zu diesem Resultat auf folgende Art.

Nach §. 79. ist

$$\partial(\alpha + \beta\sqrt{-1}) = \partial\alpha + \partial\beta . \sqrt{-1} .$$

Nach §. 39. ist aber, weil α und β reelle constante Grössen sind, $\partial\alpha = 0$, $\partial\beta = 0$. Also ist auch

$$\partial(\alpha + \beta\sqrt{-1}) = 0,$$

wie bewiesen werden sollte.

§. 83.

Aufgabe. Wenn, indem $p, q; u, v$ reelle Functionen von x bezeichnen,

$$y = (p + q\sqrt{-1})(u + v\sqrt{-1})$$

ist, das Differential von y zu finden.

Auflösung. Mittelst leichter Rechnung findet man

$$y = pu - qv + (qu + pv)\sqrt{-1} .$$

Also ist nach §. 79.

$$\partial y = \partial(pu - qv) + \partial(qu + pv) . \sqrt{-1} .$$

Aber

$$\partial(pu - qv) = p\partial u + u\partial p - q\partial v - v\partial q,$$

$$\partial(qu + pv) = q\partial u + u\partial q + p\partial v + v\partial p.$$

Folglich

$$\partial y = p\partial u + u\partial p - q\partial v - v\partial q$$
$$+ (q\partial u + u\partial q + p\partial v + v\partial p)\sqrt{-1}.$$

Weil nun nach §. 79.

$$\partial(u + v\sqrt{-1}) = \partial u + \partial v . \sqrt{-1} ,$$
$$\partial(p + q\sqrt{-1}) = \partial p + \partial q . \sqrt{-1}$$

ist; so ist

$$(p + q\sqrt{-1})\ \partial(u + v\sqrt{-1}) + (u + v\sqrt{-1})\ \partial(p + q\sqrt{-1})$$
$$= (p + q\sqrt{-1})\ (\partial u + \partial v . \sqrt{-1}) + (u + v\sqrt{-1})\ (\partial p + \partial q . \sqrt{-1})$$
$$= p\partial u - q\partial v + (q\partial u + p\partial v)\sqrt{-1}$$
$$+ u\partial p - v\partial q + (v\partial p + u\partial q)\sqrt{-1}$$
$$= p\partial u + u\partial p - q\partial v - v\partial q$$
$$+ (q\partial u + u\partial q + p\partial v + v\partial p)\sqrt{-1}.$$

Vergleicht man dies mit dem Obigen; so ergiebt sich

$$\partial y = (p + q\sqrt{-1})\ \partial(u + v\sqrt{-1}) + (u + v\sqrt{-1})\ \partial(p + q\sqrt{-1})$$

oder

$$\frac{\partial y}{y} = \frac{\partial(p + q\sqrt{-1})}{p + q\sqrt{-1}} + \frac{\partial(u + v\sqrt{-1})}{u + v\sqrt{-1}} ,$$

zwei Gleichungen, die mit den Gleichungen 2. und 3. in §. 40. rücksichtlich ihrer Form ganz übereinstimmen.

§. 84.

Für

$$y = (p + q\sqrt{-1})\ (u + v\sqrt{-1})\ (r + s\sqrt{-1}),$$

wo $p, q; u, v; r, s$ reelle Functionen von x sind, ist

$$\frac{\partial y}{y} = \frac{\partial(p + q\sqrt{-1})}{p + q\sqrt{-1}} + \frac{\partial(u + v\sqrt{-1})}{u + v\sqrt{-1}} + \frac{\partial(r + s\sqrt{-1})}{r + s\sqrt{-1}} .$$

Für

$$y = (p + q\sqrt{-1})\ (u + v\sqrt{-1})\ (r + s\sqrt{-1})\ (t + w\sqrt{-1}),$$

wo $p, q; u, v; r, s; t, w$ reelle Functionen von x sind, ist

$$\frac{\partial y}{y} = \frac{\partial(p + q\sqrt{-1})}{p + q\sqrt{-1}} + \frac{\partial(u + v\sqrt{-1})}{u + v\sqrt{-1}} + \frac{\partial(r + s\sqrt{-1})}{r + s\sqrt{-1}} + \frac{\partial(t + w\sqrt{-1})}{t + w\sqrt{-1}} .$$

Das allgemeine Gesetz dieser Formeln fällt sogleich in die Augen.

Wegen des Beweises vergleiche man §. 41.

§. 85.

Aufgabe. Wenn, indem $p, q; u, v$ reelle Functionen von x bezeichnen,

$$y = \frac{p + q\sqrt{-1}}{u + v\sqrt{-1}}$$

ist, das Differential von y zu finden.

Auflösung. Man setze

$$y = \frac{p + q\sqrt{-1}}{u + v\sqrt{-1}} = P + Q\sqrt{-1},$$

und suche P, Q so zu bestimmen, dass dieser Gleichung genügt wird. Dieser Gleichung wird aber offenbar genügt, wenn man P, Q so bestimmen kann, dass

$$p + q\sqrt{-1} = (u + v\sqrt{-1})(P + Q\sqrt{-1}),$$

d. i.

$$p + q\sqrt{-1} = Pu - Qv + (Pv + Qu)\sqrt{-1}$$

ist. Dieser Gleichung wird aber im Allgemeinen genügt, wenn man P, Q so bestimmt, dass

$$Pu - Qv = p \text{ und } Pv + Qu = q$$

ist. Da man nun aus diesen beiden Gleichungen sehr leicht

$$P = \frac{pu + qv}{u^2 + v^2}, \quad Q = \frac{qu - pv}{u^2 + v^2}$$

erhält; so ist

$$y = \frac{pu + qv}{u^2 + v^2} + \frac{qu - pv}{u^2 + v^2}\sqrt{-1}.$$

Nach §. 79. ist

$$\partial y = \partial P + \partial Q.\sqrt{-1}$$

und durch Differentiation der Grössen P, Q findet man leicht

$$\begin{aligned}
&(u^2 + v^2)^2.\ \partial P.\\
&= (u^2 + v^2)(u\partial p + v\partial q) - \{p(u^2 - v^2) + 2quv\}\partial u\\
&\qquad + \{q(u^2 - v^2) - 2puv\}\partial v,\\
&(u^2 + v^2)^2.\ \partial Q\\
&= (u^2 + v^2)(u\partial q - v\partial p) - \{q(u^2 - v^2) - 2puv\}\partial u\\
&\qquad - \{p(u^2 - v^2) + 2quv\}\partial v.
\end{aligned}$$

Setzt man ferner

$$\frac{(u + v\sqrt{-1})\partial(p + q\sqrt{-1}) - (p + q\sqrt{-1})\partial(u + v\sqrt{-1})}{(u + v\sqrt{-1})^2} = P' + Q'\sqrt{-1},$$

d. i. nach §. 79.

$$\frac{(u + v\sqrt{-1})(\partial p + \partial q.\sqrt{-1}) - (p + q\sqrt{-1})(\partial u + \partial v.\sqrt{-1})}{(u + v\sqrt{-1})^2} = P' + Q'\sqrt{-1},$$

oder

$$\begin{aligned}
&P' + Q'\sqrt{-1}\\
&= \frac{u\partial p - v\partial q - p\partial u + q\partial v + (v\partial p + u\partial q - q\partial u - p\partial v)\sqrt{-1}}{u^2 - v^2 + 2uv\sqrt{-1}};
\end{aligned}$$

so findet man, wenn man nur bemerkt, dass

$$(u^2-v^2)^2+4u^2v^2=(u^2+v^2)^2$$

ist, auf dieselbe Art, wie man vorher P, Q gefunden hat, leicht

$$(u^2+v^2)^2.\ P'=(u^2-v^2)(u\partial p-v\partial q-p\partial u+q\partial v)$$
$$+2uv(v\partial p+u\partial q-q\partial u-p\partial v),$$

$$(u^2+v^2)^2.\ Q'=(u^2-v^2)(v\partial p+u\partial q-q\partial u-p\partial v)$$
$$-2uv(u\partial p-v\partial q-p\partial u+q\partial v);$$

oder

$$(u^2+v^2)^2.\ P'$$
$$=(u^2+v^2)(u\partial p+v\partial q)-\{p(u^2-v^2)+2quv\}\partial u$$
$$+\{q(u^2-v^2)-2puv\}\partial v,$$

$$(u^2+v^2)^2.\ Q'$$
$$=(u^2+v^2)(u\partial q-v\partial p)-\{q(u^2-v^2)-2puv\}\partial u$$
$$-\{p(u^2-v^2)+2quv\}\partial v.$$

Hieraus, mit dem Obigen verglichen, ergiebt sich

$$\partial P=P',\ \partial Q=Q',$$

und folglich

$$\partial y=P'+Q'\sqrt{-1};$$

also

$$\partial y=\frac{(u+v\sqrt{-1})\,\partial(p+q\sqrt{-1})-(p+q\sqrt{-1})\,\partial(u+v\sqrt{-1})}{(u+v\sqrt{-1})^2}.$$

Dass auch diese Gleichung rücksichtlich ihrer Form mit der Gleichung 2. in §. 42. ganz übereinstimmt, fällt sogleich in die Augen.

§. 86.

Lehrsatz. Jede imaginäre Grösse von der Form $\alpha\pm\beta\sqrt{-1}$, wo α und β beliebige reelle Grössen bezeichnen, kann immer auf die Form

$$\varrho(\cos\varphi\pm\sin\varphi\sqrt{-1}),$$

wo ϱ eine reelle positive Grösse bezeichnet, und auch φ stets reell ist, gebracht werden.

Beweis. Dieser in vieler Beziehung wichtige Satz wird bewiesen seyn, wenn man zeigen kann, dass ϱ und φ sich immer so bestimmen lassen, dass den beiden Gleichungen

$$\varrho\cos\varphi=\alpha,\ \varrho\sin\varphi=\beta$$

genügt wird, und ϱ eine reelle positive, φ eine reelle Grösse ist.

Aus den beiden zu erfüllenden Gleichungen folgt

$$\alpha^2+\beta^2=\varrho^2(\cos\varphi^2+\sin\varphi^2),$$

d. i.

$$\alpha^2+\beta^2=\varrho^2;$$

also

$$\varrho = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2},$$

die Quadratwurzel, damit ϱ positiv sey, positiv genommen.

Nachdem auf diese Weise ϱ bestimmt ist, muss nun φ so bestimmt werden, dass den beiden Gleichungen

$$\cos\varphi = \frac{\alpha}{\varrho} = \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}},$$

$$\sin\varphi = \frac{\beta}{\varrho} = \frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}},$$

oder

$$\varphi = Arc\cos\frac{\alpha}{\varrho} = Arc\cos\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}},$$

$$\varphi = Arc\sin\frac{\beta}{\varrho} = Arc\sin\frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}$$

zugleich genügt wird.

Dass dies immer möglich ist, fällt sogleich in die Augen, wenn man nur bedenkt, dass

$$\left(\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}\right)^2 + \left(\frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}\right)^2 = 1$$

ist.

Zu bemerken hat man nur, dass, wenn α und β beide positiv sind, der Bogen φ sich im ersten Quadranten endigen muss; sind dagegen α und β beide negativ, so muss der Bogen φ sich im dritten Quadranten endigen; ist α positiv und β negativ, so muss sich φ im vierten Quadranten endigen; ist endlich α negativ und β positiv, so muss sich φ im zweiten Quadranten endigen. Uebrigens kann φ positiv oder negativ seyn, und kann überhaupt unendlich viele verschiedene Werthe haben.

§. 87.

Lehrsatz. Das Product der imaginären Grössen

$$\cos\varphi \pm \sin\varphi\sqrt{-1},\ \cos\varphi_1 \pm \sin\varphi_1\sqrt{-1},\ \ldots \cos\varphi_{n-1} \pm \sin\varphi_{n-1}\sqrt{-1},$$

wo $\varphi, \varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_{n-1}$ beliebige Winkel oder Bogen bezeichnen, ist die Grösse

$$\cos(\varphi + \varphi_1 + \ldots + \varphi_{n-1}) \pm \sin(\varphi + \varphi_1 + \ldots + \varphi_{n-1}).\sqrt{-1}.$$

Beweis. Es ist, wie man nach leichter Rechnung findet,

$$\begin{aligned}(\cos\varphi \pm \sin\varphi\sqrt{-1})(\cos\varphi_1 \pm \sin\varphi_1\sqrt{-1}) \\ = \cos\varphi\cos\varphi_1 - \sin\varphi\sin\varphi_1 \\ \pm (\sin\varphi\cos\varphi_1 + \cos\varphi\sin\varphi_1)\sqrt{-1}.\end{aligned}$$

Weil nun nach einem sehr bekannten goniometrischen Satze

$$\cos(\varphi + \varphi_1) = \cos\varphi\cos\varphi_1 - \sin\varphi\sin\varphi_1,$$

$$\sin(\varphi + \varphi_1) = \sin\varphi\cos\varphi_1 + \cos\varphi\sin\varphi_1$$

ist; so ist

$$(\cos\varphi \pm \sin\varphi \sqrt{-1})\ (\cos\varphi_1 \pm \sin\varphi_1 \sqrt{-1})$$
$$= \cos(\varphi + \varphi_1) \pm \sin(\varphi + \varphi_1) . \sqrt{-1} .$$

Folglich ist

$$(\cos\varphi \pm \sin\varphi \sqrt{-1})(\cos\varphi_1 \pm \sin\varphi_1 \sqrt{-1})(\cos\varphi_2 \pm \sin\varphi_2 \sqrt{-1})$$
$$= \{\cos(\varphi + \varphi_1) \pm \sin(\varphi + \varphi_1) . \sqrt{-1}\}(\cos\varphi_2 \pm \sin\varphi_2 \sqrt{-1})$$
$$= \cos(\varphi + \varphi_1 + \varphi_2) \pm \sin(\varphi + \varphi_1 + \varphi_2) . \sqrt{-1} .$$

Da man nun auf diese Art offenbar immer weiter gehen kann; so erhellet die Richtigkeit des zu beweisenden Satzes.

§. 88.

Lehrsatz. Wenn n eine positive oder negative ganze Zahl ist; so ist jederzeit

$$(\cos\varphi \pm \sin\varphi \sqrt{-1})^n = \cos n\varphi \pm \sin n\varphi . \sqrt{-1} .$$

Beweis. I. Wenn n eine positive ganze Zahl ist; so folgt der Satz unmittelbar aus §. 87., wenn man dort, wie es offenbar verstattet ist, $\varphi = \varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3 = \ldots = \varphi_{n-1}$ setzt.

II. Ist ferner n eine negative ganze Zahl, so ist bekanntlich

$$(\cos\varphi \pm \sin\varphi \sqrt{-1})^n = \frac{1}{(\cos\varphi \pm \sin\varphi \sqrt{-1})^{-n}} ;$$

also, weil $-n$ eine positive ganze Zahl ist, nach I.

$$(\cos\varphi \pm \sin\varphi \sqrt{-1})^n = \frac{1}{\cos(-n\varphi) \pm \sin(-n\varphi) . \sqrt{-1}} ,$$

oder, weil bekanntlich

$$\cos(-n\varphi) = \cos n\varphi,\ \sin(-n\varphi) = -\sin n\varphi$$

ist,

$$(\cos\varphi \pm \sin\varphi \sqrt{-1})^n = \frac{1}{\cos n\varphi \mp \sin n\varphi . \sqrt{-1}} ,$$

und folglich, wenn man Zähler und Nenner des Bruchs auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens mit

$$\cos n\varphi \pm \sin n\varphi . \sqrt{-1}$$

multiplicirt,

$$(\cos\varphi \pm \sin\varphi \sqrt{-1})^n = \frac{\cos n\varphi \pm \sin n\varphi . \sqrt{-1}}{(\cos n\varphi)^2 + (\sin n\varphi)^2} ,$$

d. i., weil

$$(\cos n\varphi)^2 + (\sin n\varphi)^2 = 1$$

ist, auch in diesem Falle

$$(\cos\varphi \pm \sin\varphi \sqrt{-1})^n = \cos n\varphi \pm \sin n\varphi . \sqrt{-1} ,$$

wie bewiesen werden sollte.

§. 89.

Wir wollen nun auch die Potenz

$$(\cos\varphi \pm \sin\varphi\sqrt{-1})^{\frac{m}{n}},$$

wo m und n ganze Zahlen bezeichnen sollen, einer genauern Untersuchung unterwerfen, vorzüglich diese Potenz auf die Form

$$p + q\sqrt{-1},$$

oder, was nach §. 86. dasselbe ist, auf die Form

$$\varrho(\cos\psi + \sin\psi\sqrt{-1}),$$

wo ϱ eine reelle positive Grösse und auch ψ reell ist, zu bringen suchen.

Die Gleichung

$$(\cos\varphi \pm \sin\varphi\sqrt{-1})^{\frac{m}{n}} = \varrho(\cos\psi + \sin\psi\sqrt{-1})$$

ist erfüllt, wenn die Gleichung

$$(\cos\varphi \pm \sin\varphi\sqrt{-1})^m = \varrho^n(\cos\psi + \sin\psi\sqrt{-1})^n,$$

d. i. nach §. 88., weil m und n ganze Zahlen sind, wenn die Gleichung

$$\cos m\varphi \pm \sin m\varphi\,.\sqrt{-1} = \varrho^n(\cos n\psi + \sin n\psi\,.\sqrt{-1})$$

erfüllt ist.

Letztere Gleichung ist aber erfüllt, wenn die beiden Gleichungen

$$\cos m\varphi = \varrho^n \cos n\psi,\quad \pm\sin m\varphi = \varrho^n \sin n\psi$$

erfüllt sind, und wir müssen also jetzt ϱ und ψ diesen beiden Gleichungen gemäss und zugleich so zu bestimmen suchen, dass ϱ eine reelle positive, ψ eine reelle Grösse ist.

Quadrirt man die beiden in Rede stehenden Gleichungen und addirt sie dann zu einander; so erhält man

$$\varrho^{2n} = 1,$$

und folglich, weil ϱ reell und positiv seyn soll,

$$\varrho = 1.$$

Nachdem auf diese Weise ϱ bestimmt ist, muss nun ferner ψ so bestimmt werden, dass den beiden Gleichungen

$$\cos m\varphi = \cos n\psi,\quad \pm\sin m\varphi = \sin n\psi$$

oder

$$\cos(\pm m\varphi) = \cos n\psi,\quad \sin(\pm m\varphi) = \sin n\psi$$

zugleich genügt wird.

Nach bekannten goniometrischen Sätzen erfordert die erste dieser beiden Gleichungen, dass, indem k eine beliebige positive oder negative ganze Zahl bezeichnet, entweder

$$n\psi = 2k\pi \pm m\varphi$$

oder

$$n\psi = 2k\pi \mp m\varphi$$

ist.

Die zweite der beiden obigen Gleichungen erfordert dagegen, dass entweder

$$n\psi = 2k\pi \pm m\varphi$$

oder

$$n\psi = (2k+1)\pi \mp m\varphi$$

ist.

Da nun beide Gleichungen zugleich erfüllt seyn sollen; so muss offenbar

$$n\psi = 2k\pi \pm m\varphi$$

oder

$$\psi = \frac{2k\pi \pm m\varphi}{n}$$

seyn, wo k immer eine ganz beliebige positive oder negative ganze Zahl bezeichnet.

Nach dem Obigen ist also für jedes positive oder negative ganze k

$$(\cos\varphi \pm \sin\varphi \sqrt{-1})^{\frac{m}{n}} = \cos\frac{2k\pi \pm m\varphi}{n} + \sin\frac{2k\pi \pm m\varphi}{n}\sqrt{-1},$$

oder auch, weil

$$\cos\frac{2k\pi \pm m\varphi}{n} = \cos\frac{\pm(m\varphi \pm 2k\pi)}{n} = \cos\frac{m\varphi \pm 2k\pi}{n},$$

$$\sin\frac{2k\pi \pm m\varphi}{n} = \sin\frac{\pm(m\varphi \pm 2k\pi)}{n} = \pm\sin\frac{m\varphi \pm 2k\pi}{n}$$

ist, für jedes positive oder negative ganze k,

$$(\cos\varphi \pm \sin\varphi \sqrt{-1})^{\frac{m}{n}} = \cos\frac{m\varphi \pm 2k\pi}{n} \pm \sin\frac{m\varphi \pm 2k\pi}{n}\sqrt{-1}.$$

Uebrigens erhellet aber leicht, dass man unbeschadet der nöthigen Allgemeinheit auch bloss

$$(\cos\varphi \pm \sin\varphi \sqrt{-1})^{\frac{m}{n}} = \cos\frac{m\varphi + 2k\pi}{n} \pm \sin\frac{m\varphi + 2k\pi}{n}\sqrt{-1}$$

setzen kann, wenn man nur k immer jede positive oder negative ganze Zahl bezeichnen lässt.

Man sieht hieraus, dass die Potenz

$$(\cos\varphi \pm \sin\varphi \sqrt{-1})^{\frac{m}{n}}$$

nicht bloss einen, sondern, weil k jede beliebige positive oder negative ganze Zahl bezeichnet, eigentlich unendlich viele Werthe hat, wobei sich aber immer noch fragen lässt, ob diese unendlich vielen Werthe auch wirklich sämmtlich von einander verschieden sind, oder ob unter denselben nicht vielleicht welche vorkommen, die einander gleich sind. In der That lässt sich, wie jetzt geschehen soll, zeigen, dass die Gleichung

$$(\cos\varphi \pm \sin\varphi \sqrt{-1})^{\frac{m}{n}} = \cos\frac{m\varphi + 2k\pi}{n} \pm \sin\frac{m\varphi + 2k\pi}{n}\sqrt{-1}$$

immer nur eine endliche völlig bestimmte Anzahl unter einander verschiedener Werthe der Potenz

$$(\cos\varphi \pm \sin\varphi \sqrt{-1})^{\frac{m}{n}}$$

liefert.

Wir nehmen, was offenbar verstattet ist, bei dieser Untersuchung n als positiv an, und unterscheiden nun zwei Fälle, jenachdem n eine gerade oder eine ungerade Zahl ist.

I. Wenn n eine gerade Zahl ist, so sey $n = 2\theta$.

Ueberhaupt sey nun

$$k = \pm (\theta\lambda + \theta'),$$

wo λ eine positive ganze Zahl und $\theta' < \theta$ ist; so ist

$$\cos\frac{m\varphi + 2k\pi}{n} = \cos\frac{m\varphi \pm 2(\theta\lambda + \theta')\pi}{n},$$

$$\sin\frac{m\varphi + 2k\pi}{n} = \sin\frac{m\varphi \pm 2(\theta\lambda + \theta')\pi}{n},$$

d. i., weil $n = 2\theta$ ist,

$$\cos\frac{m\varphi + 2k\pi}{n} = \cos\left(\frac{m\varphi \pm 2\theta'\pi}{n} \pm \lambda\pi\right),$$

$$\sin\frac{m\varphi + 2k\pi}{n} = \sin\left(\frac{m\varphi \pm 2\theta'\pi}{n} \pm \lambda\pi\right).$$

Ist nun λ eine gerade Zahl; so ist

$$\cos\frac{m\varphi + 2k\pi}{n} = \cos\frac{m\varphi \pm 2\theta'\pi}{n},$$

$$\sin\frac{m\varphi + 2k\pi}{n} = \sin\frac{m\varphi \pm 2\theta'\pi}{n},$$

und folglich

$$\cos\frac{m\varphi + 2k\pi}{n} + \sin\frac{m\varphi + 2k\pi}{n}\sqrt{-1}$$

$$= \cos\frac{m\varphi \pm 2\theta'\pi}{n} + \sin\frac{m\varphi \pm 2\theta'\pi}{n}\sqrt{-1},$$

$$\cos\frac{m\varphi + 2k\pi}{n} - \sin\frac{m\varphi + 2k\pi}{n}\sqrt{-1}$$

$$= \cos\frac{m\varphi \pm 2\theta'\pi}{n} - \sin\frac{m\varphi \pm 2\theta'\pi}{n}\sqrt{-1}.$$

Ist aber λ eine ungerade, also $\lambda + 1$ eine gerade Zahl; so kann man

$$\cos\frac{m\varphi + 2k\pi}{n} = \cos\left\{\frac{m\varphi \pm 2\theta'\pi}{n} \pm (\lambda + 1)\pi \mp \pi\right\},$$

$$\sin\frac{m\varphi + 2k\pi}{n} = \sin\left\{\frac{m\varphi \pm 2\theta'\pi}{n} \pm (\lambda + 1)\pi \mp \pi\right\},$$

oder

$$\cos\frac{m\varphi+2k\pi}{n}=\cos\left\{\frac{m\varphi\mp2(\theta-\theta')\pi}{n}\pm(\lambda+1)\pi\right\},$$

$$\sin\frac{m\varphi+2k\pi}{n}=\sin\left\{\frac{m\varphi\mp2(\theta-\theta')\pi}{n}\pm(\lambda+1)\pi\right\}$$

setzen. Dann ist, weil $\lambda+1$ eine gerade Zahl ist,

$$\cos\frac{m\varphi+2k\pi}{n}=\cos\frac{m\varphi\mp2(\theta-\theta')\pi}{n},$$

$$\sin\frac{m\varphi+2k\pi}{n}=\sin\frac{m\varphi\mp2(\theta-\theta')\pi}{n},$$

und folglich

$$\cos\frac{m\varphi+2k\pi}{n}+\sin\frac{m\varphi+2k\pi}{n}\sqrt{-1}$$

$$=\cos\frac{m\varphi\mp2(\theta-\theta')\pi}{n}+\sin\frac{m\varphi\mp2(\theta-\theta')}{n}\sqrt{-1},$$

$$\cos\frac{m\varphi+2k\pi}{n}-\sin\frac{m\varphi+2k\pi}{n}\sqrt{-1}$$

$$=\cos\frac{m\varphi\mp2(\theta-\theta')\pi}{n}-\sin\frac{m\varphi\mp2(\theta-\theta')\pi}{n}\sqrt{-1},$$

wo $\theta-\theta'$ nie grösser als θ ist.

Aus dieser Darstellung geht hervor, dass man in der Gleichung

$$(\cos\varphi\pm\sin\varphi\sqrt{-1})^{\frac{m}{n}}=\cos\frac{m\varphi+2k\pi}{n}\pm\sin\frac{m\varphi+2k\pi}{n}\sqrt{-1}$$

bloss

$$k=0,\pm1,\pm2,\pm3,\ldots\pm\theta$$

zu setzen braucht, weil unter den auf diese Weise erhaltenen Werthen von

$$(\cos\varphi\pm\sin\varphi\sqrt{-1})^{\frac{m}{n}}$$

nach dem Vorhergehenden offenbar alle übrigen enthalten sind.

Die Werthe von

$$(\cos\varphi+\sin\varphi\sqrt{-1})^{\frac{m}{n}},$$

welche man auf diese Weise erhält, sind:

$$\cos\frac{m\varphi}{n}+\sin\frac{m\varphi}{n}\sqrt{-1},$$

$$\cos\frac{m\varphi\pm2\pi}{n}+\sin\frac{m\varphi\pm2\pi}{n}\sqrt{-1},$$

$$\cos\frac{m\varphi\pm4\pi}{n}+\sin\frac{m\varphi\pm4\pi}{n}\sqrt{-1},$$

$$\cos\frac{m\varphi\pm 6\pi}{n}+\sin\frac{m\varphi\pm 6\pi}{n}\sqrt{-1},$$

u. s. w.

$$\cos\frac{m\varphi\pm n\pi}{n}+\sin\frac{m\varphi\pm n\pi}{n}\sqrt{-1};$$

und eben so sind die Werthe von

$$(\cos\varphi-\sin\varphi\sqrt{-1})^{\frac{m}{n}},$$

welche man auf die obige Weise erhält, folgende:

$$\cos\frac{m\varphi}{n}-\sin\frac{m\varphi}{n}\sqrt{-1},$$

$$\cos\frac{m\varphi\pm 2\pi}{n}-\sin\frac{m\varphi\pm 2\pi}{n}\sqrt{-1},$$

$$\cos\frac{m\varphi\pm 4\pi}{n}-\sin\frac{m\varphi\pm 4\pi}{n}\sqrt{-1},$$

$$\cos\frac{m\varphi\pm 6\pi}{n}-\sin\frac{m\varphi\pm 6\pi}{n}\sqrt{-1},$$

u. s. w.

$$\cos\frac{m\varphi\pm n\pi}{n}-\sin\frac{m\varphi\pm n\pi}{n}\sqrt{-1}.$$

In jeder dieser beiden Reihen sind offenbar $n+1$ Werthe enthalten, und es fragt sich nun, ob in jeder der beiden Reihen diese $n+1$ Werthe sämmtlich unter einander verschieden sind. Sollten aber zwei Werthe in einer der beiden Reihen einander gleich seyn; so müsste, indem weder $2\theta'$, noch $2\theta''$ grösser als n ist, entweder zugleich

$$\cos\frac{m\varphi\pm 2\theta'\pi}{n}=\cos\frac{m\varphi\pm 2\theta''\pi}{n},$$

$$\sin\frac{m\varphi\pm 2\theta'\pi}{n}=\sin\frac{m\varphi\pm 2\theta''\pi}{n},$$

oder zugleich

$$\cos\frac{m\varphi\pm 2\theta'\pi}{n}=\cos\frac{m\varphi\mp 2\theta''\pi}{n},$$

$$\sin\frac{m\varphi\pm 2\theta'\pi}{n}=\sin\frac{m\varphi\mp 2\theta''\pi}{n}$$

seyn.

Im ersten Falle müsste, wenn k wieder eine beliebige positive oder negative ganze Zahl bezeichnet,

$$\frac{m\varphi\pm 2\theta'\pi}{n}=\frac{m\varphi\pm 2\theta''\pi}{n}+2k\pi,$$

d. i.

$$\pm\theta'=\pm\theta''+kn$$

oder

$$\pm(\theta'-\theta'')=kn$$

seyn, welches, da weder θ', noch θ'' grösser als $\frac{1}{2}n$ ist, offenbar ungereimt ist.

Im zweiten Falle müsste

$$\frac{m\varphi \pm 2\theta'\pi}{n} = \frac{m\varphi \mp 2\theta''\pi}{n} + 2k\pi,$$

d. i.

$$\pm\theta' = \mp\theta'' + kn$$

oder

$$\pm(\theta' + \theta'') = kn$$

seyn. Dies ist aber, weil weder θ', noch θ'' grösser als $\frac{1}{2}n$ ist, nur dann möglich, wenn

$$\theta' = \theta'' = \tfrac{1}{2}n$$

oder

$$2\theta' = 2\theta'' = n$$

ist; und in der That ist auch

$$\cos\frac{m\varphi \pm n\pi}{n} = \cos\left(\frac{m\varphi}{n} \pm \pi\right) = -\cos\frac{m\varphi}{n},$$

$$\sin\frac{m\varphi \pm n\pi}{n} = \sin\left(\frac{m\varphi}{n} \pm \pi\right) = -\sin\frac{m\varphi}{n},$$

so dass sich also sowohl die beiden Werthe

$$\cos\frac{m\varphi \pm n\pi}{n} + \sin\frac{m\varphi \pm n\pi}{n}\sqrt{-1},$$

als auch die beiden Werthe

$$\cos\frac{m\varphi \pm n\pi}{n} - \sin\frac{m\varphi \pm n\pi}{n}\sqrt{-1},$$

auf einen Werth reduciren.

In den beiden obigen Reihen sind folglich, mit Ausnahme der beiden letzten, alle Werthe unter einander ungleich, und die erste Reihe enthält also n sämmtlich unter einander ungleiche Werthe der Grösse

$$(\cos\varphi + \sin\varphi\sqrt{-1})^{\frac{m}{n}},$$

die zweite Reihe dagegen n sämmtlich unter einander ungleiche Werthe der Grösse

$$(\cos\varphi - \sin\varphi\sqrt{-1})^{\frac{m}{n}}.$$

II. Ist ferner n eine ungerade Zahl, so sey $n = 2\theta + 1$. Ueberhaupt sey

$$2k = \pm((2\theta + 1)\lambda + \theta')$$

wo λ eine positive ganze Zahl und $\theta' < 2\theta + 1$ ist; so ist

$$\cos\frac{m\varphi + 2k\pi}{n} = \cos\frac{m\varphi \pm ((2\theta + 1)\lambda + \theta')\pi}{n},$$

$$\sin\frac{m\varphi+2k\pi}{n}=\sin\frac{m\varphi\pm((2\theta+1)\lambda+\theta')\pi}{n}$$

d. i. weil $n = 2\theta + 1$ ist,

$$\cos\frac{m\varphi+2k\pi}{n}=\cos\left(\frac{m\varphi\pm\theta'\pi}{n}\pm\lambda\pi\right),$$

$$\sin\frac{m\varphi+2k\pi}{n}=\sin\left(\frac{m\varphi\pm\theta'\pi}{n}\pm\lambda\pi\right).$$

Ist nun λ eine gerade Zahl; so ist

$$\cos\frac{m\varphi+2k\pi}{n}=\cos\frac{m\varphi\pm\theta'\pi}{n},$$

$$\sin\frac{m\varphi+2k\pi}{n}=\sin\frac{m\varphi\pm\theta'\pi}{n},$$

und folglich

$$\cos\frac{m\varphi+2k\pi}{n}+\sin\frac{m\varphi+2k\pi}{n}\sqrt{-1}$$
$$=\cos\frac{m\varphi\pm\theta'\pi}{n}+\sin\frac{m\varphi\pm\theta'\pi}{n}\sqrt{-1},$$
$$\cos\frac{m\varphi+2k\pi}{n}-\sin\frac{m\varphi+2k\pi}{n}\sqrt{-1}$$
$$=\cos\frac{m\varphi\pm\theta'\pi}{n}-\sin\frac{m\varphi\pm\theta'\pi}{n}\sqrt{-1},$$

wobei zu bemerken ist, dass in diesem Falle, wegen der Gleichung

$$2k=\pm((2\theta+1)\lambda+\theta'),$$

θ' eine gerade Zahl und nicht grösser als 2θ ist.

Ist λ eine ungerade, also $\lambda+1$ eine gerade Zahl; so kann man wieder

$$\cos\frac{m\varphi+2k\pi}{n}=\cos\left\{\frac{m\varphi\pm\theta'\pi}{n}\pm(\lambda+1)\pi\mp\pi\right\},$$

$$\sin\frac{m\varphi+2k\pi}{n}=\sin\left\{\frac{m\varphi\pm\theta'\pi}{n}\pm(\lambda+1)\pi\mp\pi\right\},$$

oder

$$\cos\frac{m\varphi+2k\pi}{n}=\cos\left\{\frac{m\varphi\mp(n-\theta')\pi}{n}\pm(\lambda+1)\pi\right\},$$

$$\sin\frac{m\varphi+2k\pi}{n}=\sin\left\{\frac{m\varphi\mp(n-\theta')\pi}{n}\pm(\lambda+1)\pi\right\},$$

d. i., weil $\lambda+1$ eine gerade Zahl ist,

$$\cos\frac{m\varphi+2k\pi}{n}=\cos\frac{m\varphi\mp(n-\theta')\pi}{n},$$

$$\sin\frac{m\varphi+2k\pi}{n}=\sin\frac{m\varphi\mp(n-\theta')\pi}{n}$$

setzen, so dass also in diesem Falle

$$\cos\frac{m\varphi+2k\pi}{n}+\sin\frac{m\varphi+2k\pi}{n}\sqrt{-1}$$

$$=\cos\frac{m\varphi\mp(n-\theta')\pi}{n}+\sin\frac{m\varphi\mp(n-\theta')\pi}{n}\sqrt{-1},$$

$$\cos\frac{m\varphi+2k\pi}{n}-\sin\frac{m\varphi+2k\pi}{n}\sqrt{-1}$$

$$=\cos\frac{m\varphi\mp(n-\theta')\pi}{n}-\sin\frac{m\varphi\mp(n-\theta')\pi}{n}\sqrt{-1}$$

ist.

Wegen der Gleichung

$$2k=\pm((2\theta+1)\lambda+\theta')$$

ist in diesem Falle θ' ungerade, und folglich, weil n ungerade ist, $n-\theta'$ gerade; auch erhellet auf der Stelle, dass $n-\theta'$ nicht grösser als 2θ seyn kann.

Aus dieser Darstellung geht nun hervor, dass man im vorliegenden Falle in der Gleichung

$$(\cos\varphi\pm\sin\varphi\sqrt{-1})^{\frac{m}{n}}=\cos\frac{m\varphi+2k\pi}{n}\pm\sin\frac{m\varphi+2k\pi}{n}\sqrt{-1}$$

bloss

$$k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \pm3,\ldots\pm\theta$$

zu setzen braucht, weil auf die dadurch sich ergebenden Werthe von

$$(\cos\varphi\pm\sin\varphi\sqrt{-1})^{\frac{m}{n}}$$

nach dem Vorhergehenden offenbar alle übrigen zurückkommen.

Die auf diese Weise sich ergebenden Werthe von

$$(\cos\varphi\pm\sin\varphi\sqrt{-1})^{\frac{m}{n}}$$

sind:

$$\cos\frac{m\varphi}{n}+\sin\frac{m\varphi}{n}\sqrt{-1},$$

$$\cos\frac{m\varphi\pm2\pi}{n}+\sin\frac{m\varphi\pm2\pi}{n}\sqrt{-1},$$

$$\cos\frac{m\varphi\pm4\pi}{n}+\sin\frac{m\varphi\pm4\pi}{n}\sqrt{-1},$$

$$\cos\frac{m\varphi\pm6\pi}{n}+\sin\frac{m\varphi\pm6\pi}{n}\sqrt{-1},$$

u. s. w.

$$\cos\frac{m\varphi\pm(n-1)\pi}{n}+\sin\frac{m\varphi\pm(n-1)\pi}{n}\sqrt{-1};$$

und eben so ergeben sich auf die obige Weise für

$$(\cos\varphi - \sin\varphi\sqrt{-1})^{\frac{m}{n}}$$

die folgenden Werthe:

$$\cos\frac{m\varphi}{n} - \sin\frac{m\varphi}{n}\sqrt{-1},$$

$$\cos\frac{m\varphi \pm 2\pi}{n} - \sin\frac{m\varphi \pm 2\pi}{n}\sqrt{-1},$$

$$\cos\frac{m\varphi \pm 4\pi}{n} - \sin\frac{m\varphi \pm 4\pi}{n}\sqrt{-1},$$

$$\cos\frac{m\varphi \pm 6\pi}{n} - \sin\frac{m\varphi \pm 6\pi}{n}\sqrt{-1},$$

u. s. w.

$$\cos\frac{m\varphi \pm (n-1)\pi}{n} - \sin\frac{m\varphi \pm (n-1)\pi}{n}\sqrt{-1}.$$

In jeder dieser beiden Reihen sind offenbar n Werthe enthalten, und es fragt sich nun noch, ob die in jeder dieser beiden Reihen enthaltenen n Werthe sämmtlich unter einander ungleich sind. Sollten aber in einer der beiden Reihen zwei Werthe einander gleich seyn, so müsste, indem weder $2\theta'$, noch $2\theta''$ grösser als $n-1$ ist, entweder zugleich

$$\cos\frac{m\varphi \pm 2\theta'\pi}{n} = \cos\frac{m\varphi \pm 2\theta''\pi}{n},$$

$$\sin\frac{m\varphi \pm 2\theta'\pi}{n} = \sin\frac{m\varphi \pm 2\theta''\pi}{n};$$

oder zugleich

$$\cos\frac{m\varphi \pm 2\theta'\pi}{n} = \cos\frac{m\varphi \mp 2\theta''\pi}{n},$$

$$\sin\frac{m\varphi \pm 2\theta'\pi}{n} = \sin\frac{m\varphi \mp 2\theta''\pi}{n}$$

seyn.

Im ersten Falle erhält man wie in I.

$$\pm(\theta' - \theta'') = kn,$$

im zweiten dagegen

$$\pm(\theta' + \theta'') = kn.$$

Beides ist unmöglich, weil weder θ' noch θ'' grösser als $\frac{1}{2}(n-1)$ ist. Daher enthält die erste der beiden obigen Reihen n sämmtlich unter einander ungleiche Werthe der Grösse

$$(\cos\varphi + \sin\varphi\sqrt{-1})^{\frac{m}{n}},$$

die zweite n sämmtlich unter einander ungleiche Werthe der Grösse

$$(\cos\varphi - \sin\varphi\sqrt{-1})^{\frac{m}{n}}.$$

III. Fasst man alles Vorhergehende zusammen; so ergiebt sich, dass man, um alle ungleichen Werthe der Grösse

$$(\cos\varphi \pm \sin\varphi\sqrt{-1})^{\frac{m}{n}}$$

zu erhalten, in der Gleichung

$$(\cos\varphi \pm \sin\varphi\sqrt{-1})^{\frac{m}{n}} = \cos\frac{m\varphi+2k\pi}{n} \pm \sin\frac{m\varphi+2k\pi}{n}\sqrt{-1}$$

die Grösse k nicht grösser als $+\frac{1}{2}n$ und nicht kleiner als $-\frac{1}{2}n$ zu nehmen braucht, so dass man also für k immer bloss alle von $-\frac{1}{2}n$ bis $+\frac{1}{2}n$ sich findenden ganzen Zahlen zu setzen braucht. Jedoch hat man hierbei noch zu bemerken, dass, wenn n eine gerade Zahl ist, der erste und letzte der auf diese Weise erhaltenen Werthe von

$$(\cos\varphi \pm \sin\varphi\sqrt{-1})^{\frac{m}{n}}$$

jederzeit einander gleich sind, in dem in Rede stehenden Falle also immer der eine der beiden äussersten Werthe, etwa der letzte, d. i. der der Grösse $k=+\frac{1}{2}n$ entsprechende Werth, weggelassen werden muss. Thut man dies; so erhält man durch das angegebene Verfahren immer n sämmtlich unter einander verschiedene Werthe der Grösse

$$(\cos\varphi \pm \sin\varphi\sqrt{-1})^{\frac{m}{n}}.$$

§. 90.

Unter der Voraussetzung, dass n eine positive oder negative ganze Zahl ist, und u, v reelle Functionen von x bezeichnen, wollen wir nun das Differential der Function

$$y = (u+v\sqrt{-1})^n$$

zu entwickeln suchen.

Setzen wir, wie dies nach §. 86. verstattet ist,

$$u + v\sqrt{-1} = \varrho(\cos\varphi + \sin\varphi\sqrt{-1});$$

so ist nach §. 88.

$$y = \varrho^n(\cos n\varphi + \sin n\varphi\sqrt{-1}).$$

Weil nun, wie man leicht findet,

$$\partial\,.\,\varrho^n\cos n\varphi = -n\varrho^n\sin n\varphi\,\partial\varphi + n\varrho^{n-1}\cos n\varphi\,\partial\varrho,$$

$$\partial\,.\,\varrho^n\sin n\varphi = n\varrho^n\cos n\varphi\,\partial\varphi + n\varrho^{n-1}\sin n\varphi\,\partial\varrho$$

ist; so ist nach §. 79.

$$\partial y = n\varrho^{n-1}(\cos n\varphi\,\partial\varrho - \varrho\sin n\varphi\,\partial\varphi)$$
$$+ n\varrho^{n-1}(\sin n\varphi\,\partial\varrho + \varrho\cos n\varphi\,\partial\varphi)\sqrt{-1}.$$

Nach §. 88. ist aber

$$(u+v\sqrt{-1})^{n-1} = \varrho^{n-1}\{\cos(n-1)\varphi + \sin(n-1)\varphi\,.\sqrt{-1}\},$$

und weil

$$\partial . \varrho \cos\varphi = -\varrho \sin\varphi \, \partial\varphi + \cos\varphi \, \partial\varrho ,$$
$$\partial . \varrho \sin\varphi = \varrho \cos\varphi \, \partial\varphi + \sin\varphi \, \partial\varrho$$

ist; so ist nach §. 79.

$$\partial(u+v\sqrt{-1}) = \cos\varphi \, \partial\varrho - \varrho \sin\varphi \, \partial\varphi + (\sin\varphi \, \partial\varrho + \varrho \cos\varphi \, \partial\varphi)\sqrt{-1}.$$

Folglich ist, wie man durch gemeine Multiplication leicht findet,

$$\begin{aligned}
&(u+v\sqrt{-1})^{n-1}\partial(u+v\sqrt{-1}) \\
&= \varrho^{n-1}\{\cos(n-1)\varphi \cos\varphi - \sin(n-1)\varphi \sin\varphi\}\partial\varrho \\
&- \varrho^{n}\{\sin(n-1)\varphi \cos\varphi + \cos(n-1)\varphi \sin\varphi\}\partial\varphi \\
&+ \varrho^{n-1}\{\sin(n-1)\varphi \cos\varphi + \cos(n-1)\varphi \sin\varphi\}\partial\varrho . \sqrt{-1} \\
&+ \varrho^{n}\{\cos(n-1)\varphi \cos\varphi - \sin(n-1)\varphi \sin\varphi\}\partial\varphi . \sqrt{-1} \\
&= \varrho^{n-1}(\cos n\varphi \, \partial\varrho - \varrho \sin n\varphi \, \partial\varphi) \\
&+ \varrho^{n-1}(\sin n\varphi \, \partial\varrho + \varrho \cos n\varphi \, \partial\varphi)\sqrt{-1} .
\end{aligned}$$

Vergleicht man dies nun mit dem Obigen; so erhält man

$$\partial y = n(u+v\sqrt{-1})^{n-1}\partial(u+v\sqrt{-1}) ,$$

und wird nun auch sogleich die Uebereinstimmung dieser Formel mit der Formel 2. in §. 45. erkennen.

§. 91.

Ist

$$y = (u+v\sqrt{-1})^{\frac{m}{n}}$$

wo m und n ganze Zahlen, u und v reelle Functionen von x bezeichnen; so ist, wenn wir, wie es nach §. 86. verstattet ist,

$$u + v\sqrt{-1} = \varrho(\cos\varphi + \sin\varphi\sqrt{-1})$$

setzen,

$$y = \varrho^{\frac{m}{n}}(\cos\varphi + \sin\varphi\sqrt{-1})^{\frac{m}{n}},$$

und folglich nach §. 89. für jedes positive oder negative ganze k

$$y = \varrho^{\frac{m}{n}}(\cos\frac{m\varphi+2k\pi}{n} + \sin\frac{m\varphi+2k\pi}{n}\sqrt{-1}).$$

Ist nun überhaupt von dem Differential der Function y die Rede; so muss man dabei offenbar immer irgend einen bestimmten Werth dieser Function in's Auge fassen, und das Differential dieses Werthes entwickeln, d. h. man muss überhaupt das Differential des vorher für y gefundenen allgemeinen Ausdrucks entwickeln, indem man, was wohl zu merken ist, bei dieser Entwickelung die Grösse k als constant betrachtet.

Diese Entwickelung lässt sich aber auf eine ganz ähnliche Art wie die Entwickelung im vorigen Paragraphen ausführen.

Weil nämlich, wie man leicht findet,

$$\partial\,.\,\varrho^{\frac{m}{n}} \cos\frac{m\varphi+2k\pi}{n}$$

$$= -\frac{m}{n}\varrho^{\frac{m}{n}} \sin\frac{m\varphi+2k\pi}{n}\,\partial\varphi + \frac{m}{n}\,\varrho^{\frac{m-n}{n}} \cos\frac{m\varphi+2k\pi}{n}\,\partial\varrho\,,$$

$$\partial\,.\,\varrho^{\frac{m}{n}} \sin\frac{m\varphi+2k\pi}{n}$$

$$= \frac{m}{n}\,\varrho^{\frac{m}{n}} \cos\frac{m\varphi+2k\pi}{n}\,\partial\varphi + \frac{m}{n}\,\varrho^{\frac{m-n}{n}} \sin\frac{m\varphi+2k\pi}{n}\,\partial\varrho$$

ist; so ist nach §. 79.

$$\partial y = \frac{m}{n}\varrho^{\frac{m-n}{n}}\left(\cos\frac{m\varphi+2k\pi}{n}\,\partial\varrho - \varrho\sin\frac{m\varphi+2k\pi}{n}\,\partial\varphi\right)$$

$$+ \frac{m}{n}\varrho^{\frac{m-n}{n}}\left(\sin\frac{m\varphi+2k\pi}{n}\,\partial\varrho + \varrho\cos\frac{m\varphi+2k\pi}{n}\,\partial\varphi\right)\sqrt{-1}.$$

Ferner ist wie in §. 90.

$$\partial(u+v\sqrt{-1}) = \cos\varphi\,\partial\varrho - \varrho\sin\varphi\,\partial\varphi$$
$$+ (\sin\varphi\,\partial\varrho + \varrho\cos\varphi\,\partial\varphi)\sqrt{-1}.$$

Multiplicirt man nun diese Grösse mit der Grösse

$$\varrho^{\frac{m-n}{n}}\left\{\cos\frac{(m-n)\varphi+2k\pi}{n} + \sin\frac{(m-n)\varphi+2k\pi}{n}\sqrt{-1}\right\};$$

so erhält man als Product die Grösse

$$\varrho^{\frac{m-n}{n}}\left(\cos\frac{m\varphi+2k\pi}{n}\,\partial\varrho - \varrho\sin\frac{m\varphi+2k\pi}{n}\,\partial\varphi\right)$$

$$+ \varrho^{\frac{m-n}{n}}\left(\sin\frac{m\varphi+2k\pi}{n}\,\partial\varrho + \varrho\cos\frac{m\varphi+2k\pi}{n}\,\partial\varphi\right)\sqrt{-1}\,,$$

und schliesst nun hieraus in Verbindung mit dem Obigen sogleich, dass

$$\partial y = \frac{m}{n}\varrho^{\frac{m-n}{n}}\left\{\cos\frac{(m-n)\varphi+2k\pi}{n} + \sin\frac{(m-n)\varphi+2k\pi}{n}\sqrt{-1}\right\}\partial(u+v\sqrt{-1})$$

ist.

Weil aber nach §. 89. für jedes positive oder negative ganze k

$$(u+v\sqrt{-1})^{\frac{m}{n}-1}$$

$$= \varrho^{\frac{m-n}{n}}\left\{\cos\frac{(m-n)\varphi+2k\pi}{n} + \sin\frac{(m-n)\varphi+2k\pi}{n}\sqrt{-1}\right\}$$

ist; so kann man auch

$$\partial y = \frac{m}{n}(u + v\sqrt{-1})^{\frac{m}{n}-1}\partial(u + v\sqrt{-1})$$

setzen, wenn man nur nicht aus dem Auge verliert, dass diese Gleichung bloss so viel sagen will, dass der analytische Ausdruck auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens der Inbegriff aller der Werthe ist, welche das Differential ∂y haben kann.

Viertes Kapitel.

Von den höhern Differentialen der Functionen mit einer veränderlichen Grösse.

§. 92.

Den Differentialquotienten der Function $y = f(x)$, nach dem im vorhergehenden Kapitel entwickelten allgemeinen Begriffe, wollen wir jetzt den **ersten** Differentialquotienten dieser Function nennen.

Da dieser erste Differentialquotient

$$\frac{\partial y}{\partial x} = y' = f'(x)$$

im Allgemeinen selbst eine Function von x ist; so kann man von demselben wieder den ersten Differentialquotienten nehmen. Dieser erste Differentialquotient des ersten Differentialquotienten der Function $y = f(x)$ heisst der **zweite** Differentialquotient dieser Function, und wird durch

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = y'' = f''(x)$$

bezeichnet.

Dieser zweite Differentialquotient der Function $y = f(x)$ ist wieder im Allgemeinen eine Function von x, und man kann also von demselben wieder den ersten Differentialquotienten nehmen. Dieser erste Differentialquotient des zweiten Differentialquotienten der Function $y = f(x)$ heisst der **dritte** Differentialquotient dieser Function, und wird durch

$$\frac{\partial^3 y}{\partial x^3} = y''' = f'''(x)$$

bezeichnet.

Wie man auf diese Art weiter gehen kann, ist klar.

Der $n$te Differentialquotient der Function $y=f(x)$, welcher durch

$$\frac{\partial^n y}{\partial x^n}=y^{(n)}=f^{(n)}(x)$$

bezeichnet wird, ist der erste Differentialquotient des $(n-1)$sten Differentialquotienten der in Rede stehenden Function, so dass also überhaupt

$$\frac{\partial^n y}{\partial x^n}=\frac{\partial\left(\frac{\partial^{n-1} y}{\partial x^{n-1}}\right)}{\partial x}$$

ist.

Unter dem $n$ten Differential der Function y, welches durch $\partial^n y$ bezeichnet wird, versteht man das Product, welches man erhält, wenn man den $n$ten Differentialquotienten mit Δx^n multiplicirt, so dass also

$$\partial^n y=\frac{\partial^n y}{\partial x^n}\Delta x^n,$$

oder, wenn man auch hier wieder ∂x statt Δx schreibt,

$$\partial^n y=\frac{\partial^n y}{\partial x^n}\partial x^n$$

ist.

Eben so ist also auch

$$\partial^{n+1} y=\frac{\partial^{n+1} y}{\partial x^{n+1}}\partial x^{n+1}.$$

Nimmt man nun, ∂x als constant betrachtend, nach §. 37. von $\partial^n y$ das erste Differential; so erhält man

$$\partial(\partial^n y)=\partial\left(\frac{\partial^n y}{\partial x^n}\right).\partial x^n.$$

Nun ist aber bekanntlich

$$\partial\left(\frac{\partial^n y}{\partial x^n}\right)=\frac{\partial\left(\frac{\partial^n y}{\partial x^n}\right)}{\partial x}\partial x,$$

oder, weil nach dem Obigen

$$\frac{\partial\left(\frac{\partial^n y}{\partial x^n}\right)}{\partial x}=\frac{\partial^{n+1} y}{\partial x^{n+1}}$$

ist,

$$\partial\left(\frac{\partial^n y}{\partial x^n}\right)=\frac{\partial^{n+1} y}{\partial x^{n+1}}\partial x.$$

Also ist

$$\partial(\partial^n y)=\frac{\partial^{n+1} y}{\partial x^{n+1}}\partial x^{n+1},$$

und folglich, wenn man dies mit dem Obigen vergleicht,

$$\partial^{n+1} y=\partial(\partial^n y),$$

d. h. das $(n+1)$ste Differential der Function y ist das erste Differential des $n$ten Differentials dieser Function, indem man bei der Differentiation ∂x als constant betrachtet.

Hiernach kann man also auch alle Differentiale einer Function durch successive Differentiation derselben entwickeln.

§. 93.

I. Wenn, indem a eine constante Grösse, p eine Function von x bezeichnet,

$$y = ap$$

ist; so findet man durch successive Differentiation leicht

$$\frac{\partial y}{\partial x} = a\frac{\partial p}{\partial x}, \quad \partial y = a\partial p;$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = a\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}, \quad \partial^2 y = a\partial^2 p;$$

$$\frac{\partial^3 y}{\partial x^3} = a\frac{\partial^3 p}{\partial x^3}, \quad \partial^3 y = a\partial^3 p;$$

$$\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = a\frac{\partial^4 p}{\partial x^4}, \quad \partial^4 y = a\partial^4 p;$$

u. s. w. u. s. w.

Folglich ist offenbar allgemein

$$1.\quad \frac{\partial^n y}{\partial x^n} = a\frac{\partial^n p}{\partial x^n}, \quad 2.\ \partial^n y = a\partial^n p.$$

II. Wenn, indem a eine constante Grösse bezeichnet, und $p, q, s, \ldots u$ Functionen von x sind,

$$y = a \pm p \pm q \pm s \pm \ldots \pm u$$

ist; so ergiebt sich durch successive Differentiation eben so leicht

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \pm\frac{\partial p}{\partial x} \pm \frac{\partial q}{\partial x} \pm \frac{\partial s}{\partial x} \pm \ldots \pm \frac{\partial u}{\partial x},$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \pm\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} \pm \frac{\partial^2 q}{\partial x^2} \pm \frac{\partial^2 s}{\partial x^2} \pm \ldots \pm \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

$$\frac{\partial^3 y}{\partial x^3} = \pm\frac{\partial^3 p}{\partial x^3} \pm \frac{\partial^3 q}{\partial x^3} \pm \frac{\partial^3 s}{\partial x^3} \pm \ldots \pm \frac{\partial^3 u}{\partial x^3},$$

u. s. w. u. s. w.

und es ist folglich offenbar allgemein

$$1.\quad \frac{\partial^n y}{\partial x^n} = \pm\frac{\partial^n p}{\partial x^n} \pm \frac{\partial^n q}{\partial x^n} \pm \frac{\partial^n s}{\partial x^n} \pm \ldots \pm \frac{\partial^n u}{\partial x^n}.$$

Multiplicirt man nun auf beiden Seiten dieser Gleichung mit ∂x^n; so erhält man

$$\frac{\partial^n y}{\partial x^n}\partial x^n = \pm\frac{\partial^n p}{\partial x^n}\partial x^n \pm \frac{\partial^n q}{\partial x^n}\partial x^n \pm \frac{\partial^n s}{\partial x^n}\partial x^n \pm \ldots \pm \frac{\partial^n u}{\partial x^n}\partial x^n,$$

d. i. nach §. 92.

$$2.\quad \partial^n y = \pm\,\partial^n p \pm \partial^n q \pm \partial^n s \pm \ldots \pm \partial^n u.$$

III. Wenn, indem p und q Functionen von x bezeichnen,

$$y = pq$$

ist; so erhält man durch successive Differentiation ebenfalls ohne Schwierigkeit

$$\frac{\partial y}{\partial x} = p\frac{\partial q}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial x}q\,;$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = p\frac{\partial^2 q}{\partial x^2} + \frac{\partial p}{\partial x}\frac{\partial q}{\partial x}$$
$$+ \frac{\partial p}{\partial x}\frac{\partial q}{\partial x} + \frac{\partial^2 p}{\partial x^2}q$$
$$= p\frac{\partial^2 q}{\partial x^2} + 2\frac{\partial p}{\partial x}\frac{\partial q}{\partial x} + \frac{\partial^2 p}{\partial x^2}q\,;$$

$$\frac{\partial^3 y}{\partial x^3} = p\frac{\partial^3 q}{\partial x^3} + \frac{\partial p}{\partial x}\frac{\partial^2 q}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}\frac{\partial q}{\partial x}$$
$$+ 2\frac{\partial p}{\partial x}\frac{\partial^2 q}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial x^2}\frac{\partial q}{\partial x} + \frac{\partial^3 p}{\partial x^3}q$$
$$= p\frac{\partial^3 q}{\partial x^3} + 3\frac{\partial p}{\partial x}\frac{\partial^2 q}{\partial x^2} + 3\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}\frac{\partial q}{\partial x} + \frac{\partial^3 p}{\partial x^3}q\,;$$

$$\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = p\frac{\partial^4 q}{\partial x^4} + \frac{\partial p}{\partial x}\frac{\partial^3 q}{\partial x^3} + 3\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}\frac{\partial^2 q}{\partial x^2} + 3\frac{\partial^3 p}{\partial x^3}\frac{\partial q}{\partial x}$$
$$+ 3\frac{\partial p}{\partial x}\frac{\partial^3 q}{\partial x^3} + 3\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}\frac{\partial^2 q}{\partial x^2} + \frac{\partial^3 p}{\partial x^3}\frac{\partial q}{\partial x} + \frac{\partial^4 p}{\partial x^4}q$$
$$= p\frac{\partial^4 q}{\partial x^4} + 4\frac{\partial p}{\partial x}\frac{\partial^3 q}{\partial x^3} + 6\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}\frac{\partial^2 q}{\partial x^2} + 4\frac{\partial^3 p}{\partial x^3}\frac{\partial q}{\partial x} + \frac{\partial^4 p}{\partial x^4}q\,;$$

u. s. w. u. s. w.

Wie man auf diese Art weiter gehen kann, ist klar.

Erwägt man nun, dass die numerischen Coefficienten in den vorhergehenden Gleichungen offenbar nach und nach ganz auf dieselbe Art entstehen wie die Binomial-Coefficienten (§. 14. IV. V.); so wird man sich sogleich von der Richtigkeit der folgenden allgemeinen Formel überzeugen:

$$1.\quad \frac{\partial^n y}{\partial x^n} = p\frac{\partial^n q}{\partial x^n} + n_1\frac{\partial p}{\partial x}\frac{\partial^{n-1} q}{\partial x^{n-1}} + n_2\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}\frac{\partial^{n-2} q}{\partial x^{n-2}} + \ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots + n_{n-2}\frac{\partial^{n-2} p}{\partial x^{n-2}}\frac{\partial^2 q}{\partial x^2} + n_{n-1}\frac{\partial^{n-1} p}{\partial x^{n-1}}\frac{\partial q}{\partial x} + n_n\frac{\partial^n p}{\partial x^n}q.$$

Multiplicirt man auf beiden Seiten dieser Gleichung mit ∂x^n; so erhält man nach §. 92.

$$2.\quad \partial^n y = p\partial^n q + n_1\partial p\partial^{n-1}q + n_2\partial^2 p\partial^{n-2}q + \ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots + n_{n-2}\partial^{n-2}p\,\partial^2 q + n_{n-1}\partial^{n-1}p\partial q + n_n\partial^n pq.$$

IV. Wenn, indem wieder p und q Functionen von x bezeichnen,

$$y = \frac{p}{q}$$

ist; so ist bekanntlich

$$\partial y = \frac{q\partial p - p\partial q}{q^2}.$$

Differentiirt man nun diese Gleichung von Neuem; so ergiebt sich

$$\partial^2 y = \frac{q^2\partial(q\partial p - p\partial q) - 2(q\partial p - p\partial q)\,q\partial q}{q^4}$$

$$= \frac{q^2(q\partial^2 p - p\partial^2 q) - 2(q\partial p - p\partial q)\,q\partial q}{q^4}$$

$$= \frac{q(q\partial^2 p - p\partial^2 q) - 2(q\partial p - p\partial q)\,\partial q}{q^3}.$$

Auf diese Art weiter zu gehen und zu ganz allgemeinen Formeln zu gelangen, würde gerade keine besondere Schwierigkeit haben. Indess fallen die Formeln weitläufig aus, und finden in dieser Allgemeinheit im Folgenden keine Anwendung. Daher mag die obige Andeutung hier genügen.

§. 94.

Für $y = x^n$ ist nach §. 44. und §. 37.

$$\frac{\partial y}{\partial x} = nx^{n-1},$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = n(n-1)x^{n-2},$$

$$\frac{\partial^3 y}{\partial x^3} = n(n-1)(n-2)x^{n-3},$$

$$\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = n(n-1)(n-2)(n-3)x^{n-4},$$

u. s. w.

Folglich ist offenbar allgemein

$$1.\quad \frac{\partial^k y}{\partial x^k} = n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)x^{n-k},$$

und, wenn man auf beiden Seiten dieser Gleichung mit ∂x^k multiplicirt, nach §. 92.

$$2.\quad \partial^k y = n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)x^{n-k}\,\partial x^k,$$

wobei man aber die aus §. 44. sich unmittelbar ergebende Bemerkung nicht zu übersehen hat, dass, wenn n ein in den kleinsten Zahlen ausgedrückter Bruch und der Nenner desselben eine gerade Zahl ist, x positiv seyn und die Potenz x^{n-k} mit demselben Vorzeichen genommen werden muss, mit welchem man $y = x^n$ genommen hat.

Wenn n eine positive ganze Zahl ist; so kann man $k=n$ setzen, und erhält dann

$$3.\quad \frac{\partial^n y}{\partial x^n} = 1 . 2 . 3 . 4 \ldots n,$$

so dass also, wenn n eine positive ganze Zahl ist, der $n$te Differentialquotient von $y = x^n$ eine constante Grösse ist, und alle höhern Differentialquotienten dieser Function folglich verschwinden.

Multiplicirt man auf beiden Seiten der Gleichung 3. mit ∂x^n; so erhält man nach §. 92.

$$4.\quad \partial^n y = 1 . 2 . 3 . 4 \ldots n\partial x^n.$$

§. 95.

I. Wenn

$$y = f(x) = A + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + \ldots + A_n x^n$$

eine beliebige ganze rationale algebraische Function des $n$ten Grades ist; so ist nach §. 93. I, II.

$$\frac{\partial^k y}{\partial x^k} = f^{(k)}(x)$$

$$= A_1 \frac{\partial^k . x}{\partial x^k} + A_2 \frac{\partial^k . x^2}{\partial x^k} + A_3 \frac{\partial^k . x^3}{\partial x^k} + \ldots + A_n \frac{\partial^k . x^n}{\partial x^k}.$$

Nehmen wir nun an, dass k nicht grösser als n ist; so ist nach §. 94.

$$\frac{\partial^k . x}{\partial x^k} = \frac{\partial^k . x^2}{\partial x^k} = \frac{\partial^k . x^3}{\partial x^k} = \ldots = \frac{\partial^k . x^{k-1}}{\partial x^k} = 0,$$

und folglich

$$\frac{\partial^k y}{\partial x^k} = f^{(k)}(x)$$

$$= A_k \frac{\partial^k . x^k}{\partial x^k} + A_{k+1} \frac{\partial^k . x^{k+1}}{\partial x^k} + A_{k+2} \frac{\partial^k . x^{k+2}}{\partial x^k} + \ldots + A_n \frac{\partial_k . x^n}{\partial x_k}.$$

Aber nach §. 94.

$$\frac{\partial^k . x^k}{\partial x^k} = 1 . 2 . 3 . 4 \ldots k,$$

$$\frac{\partial^k . x^{k+1}}{\partial x^k} = 2 . 3 . 4 . 5 \ldots (k+1)\, x,$$

$$\frac{\partial^k . x^{k+2}}{\partial x^k} = 3 . 4 . 5 . 6 \ldots (k+2)\, x^2,$$

u. s. w.

$$\frac{\partial^k . x^n}{\partial x^k} = (n-k+1)(n-k+2) \ldots n x^{n-k}.$$

Also

$$\frac{\partial^k y}{\partial x^k} = f^{(k)}(x) = \begin{array}{l} 1\,.\,2\,.\,3\,.\,4\ldots kA_k \\ +\,2\,.\,3\,.\,4\,.\,5\ldots(k+1)A_{k+1}x \\ +\,3\,.\,4\,.\,5\,.\,6\ldots(k+2)A_{k+2}x^2 \\ \ldots\ldots\ldots \\ +\,(n-k+1)(n-k+2)\ldots nA_n x^{n-k}. \end{array}$$

Setzt man $x = 0$; so erhält man die merkwürdige Gleichung

$$f^{(k)}(0) = 1\,.\,2\,.\,3\,.\,4\ldots kA_k$$

oder

$$A_k = \frac{f^{(k)}(0)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4\ldots k},$$

d. h. man erhält den Coefficienten der $k$ten Potenz von x in jeder ganzen rationalen algebraischen Function von x, wenn man in dem $k$ten Differentialquotienten dieser Function $x=0$ setzt, und den diesem Werthe von x entsprechenden Werth des in Rede stehenden Differentialquotienten durch $1\,.\,2\,.\,3\ldots k$ dividirt.

Bemerkt man nun noch, dass offenbar $A = f(0)$ ist; so erhält man den folgenden höchst merkwürdigen Ausdruck jeder ganzen rationalen algebraischen Function $y = f(x)$ des $n$ten Grades:

$$y=f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1}x+\frac{f''(0)}{1.2}x^2+\frac{f'''(0)}{1.2.3}x^3+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{1.2.3..n}x^n.$$

Auch ergiebt sich aus dem Obigen, wenn man $k = n$ setzt, auf der Stelle

$$\frac{\partial^n y}{\partial x^n} = f^{(n)}(x) = 1\,.\,2\,.\,3\ldots nA_n,$$

so dass also der $n$te Differentialquotient jeder ganzen rationalen algebraischen Function des $n$ten Grades eine constante Grösse ist, und alle höhern Differentialquotienten einer solchen Function folglich verschwinden.

II. Man kann aus der vorher für $y = f(x)$ gefundenen allgemeinen Formel auch einen merkwürdigen Ausdruck für $f(x + \Delta x)$ herleiten.

Setzt man nämlich in der in Rede stehenden allgemeinen Formel $x + \Delta x$ für x, und entwickelt dann alle Potenzen von $x + \Delta x$ nach dem Binomischen Lehrsatze; so erhält man ohne Schwierigkeit

$$f(x+\Delta x) =$$

$$f(0) + \frac{f'(0)}{1}\,x + \frac{f''(0)}{1.2}\,x^2 + \frac{f'''(0)}{1.2.3}\,x^3 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{1\ldots n}\,x^n$$

$$+ \left\{ f'(0) + \frac{f''(0)}{1}\,x + \frac{f'''(0)}{1.2}\,x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{1..(n-1)}\,x^{n-1} \right\} \frac{\Delta x}{1}$$

$$+ \left\{ f''(0) + \frac{f'''(0)}{1}\,x + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{1..(n-2)}\,x^{n-2} \right\} \frac{\Delta x^2}{1.2}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+ \left\{ f^{(n-1)}(0) + \frac{f^{(n)}(0)}{1}\,x \right\} \frac{\Delta x^{n-1}}{1..(n-1)}$$

$$+ f^{(n)}(0)\,\frac{\Delta x^n}{1\ldots n},$$

woraus sich ferner nach dem in I. für $f(x)$ gefundenen allgemeinen Ausdrucke, wenn man denselben auch auf die Functionen $f'(x)$, $f''(x)$, $f'''(x)$, ... anwendet, unmittelbar der folgende ebenfalls sehr merkwürdige Ausdruck ergiebt:

$$f(x+\Delta x) = f(x) + f'(x)\,\frac{\Delta x}{1} + f''(x)\,\frac{\Delta x^2}{1.2} + f'''(x)\,\frac{\Delta x^3}{1.2.3} + \ldots$$

$$\ldots + f^{(n-1)}(x)\,\frac{\Delta x^{n-1}}{1..(n-1)} + f^{(n)}(x)\,\frac{\Delta x^n}{1..n}\,.$$

Dass $f^{(n)}(x) = f^{(n)}(0)$ ist, ist klar, weil $f^{(n)}(x)$ nach I. eine constante Grösse ist.

Zu bemerken ist noch, dass man den obigen Ausdruck auch unter der Form

$$y^{(1)} = y + \frac{\partial y}{\partial x}\cdot\frac{\Delta x}{1} + \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\cdot\frac{\Delta x^2}{1.2} + \frac{\partial^3 y}{\partial x^3}\cdot\frac{\Delta x^3}{1.2.3} + \ldots + \frac{\partial^n y}{\partial x^n}\cdot\frac{\Delta x^n}{1\ldots n},$$

oder, weil bekanntlich $y^{(1} - y = \Delta y$ ist, auch unter der Form

$$\Delta y = \frac{\partial y}{\partial x}\cdot\frac{\Delta x}{1} + \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\cdot\frac{\Delta x^2}{1.2} + \frac{\partial^3 y}{\partial x^3}\cdot\frac{\Delta x^3}{1.2.3} + \ldots + \frac{\partial^n y}{\partial x^n}\cdot\frac{\Delta x^n}{1\ldots n}$$

schreiben kann.

§. 96.

Für $y = a^x$, wo a eine positive Grösse bezeichnen soll, ist nach §. 57.

$$\frac{\partial y}{\partial x} = a^x\, la.$$

Also ist

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\partial\,.\,a^x}{\partial x}\,la = a^x\,(la)^2\,,$$

$$\frac{\partial^3 y}{\partial x^3} = \frac{\partial . a^x}{\partial x}(la)^2 = a^x (la)^3,$$

$$\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = \frac{\partial . a^x}{\partial x}(la)^3 = a^x (la)^4,$$

u. s. w.

Folglich ist allgemein

$$\frac{\partial^n y}{\partial x^n} = a^x (la)^n,\ \partial^n y = a^x (la)^n \partial x^n.$$

Für $a = e$ ist $la = 1$, und folglich

$$\frac{\partial^n . e^x}{\partial x^n} = e^x,\ \partial^n . e^x = e^x \partial x^n.$$

§. 97.

Für $y = log\, x$, wo x positiv seyn soll, ist nach §. 59.

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{1}{xlb} = \frac{x^{-1}}{lb}.$$

Folglich ist nach §. 93. I.

$$\frac{\partial^n y}{\partial x^n} = \frac{1}{lb} . \frac{\partial^{n-1} . x^{-1}}{\partial x^{n-1}}.$$

Nach §. 94. ist aber

$$\frac{\partial^{n-1} . x^{-1}}{\partial x^{n-1}} = -1 . -2 . -3 \ldots -(n-1) . x^{-n}$$

$$= (-1)^{n-1} . \frac{1 . 2 . 3 \ldots (n-1)}{x^n}.$$

Also ist

$$\frac{\partial^n y}{\partial x^n} = (-1)^{n-1} . \frac{1 . 2 . 3 \ldots (n-1)}{x^n\, lb},$$

oder nach §. 58.

$$\frac{\partial^n y}{\partial x^n} = (-1)^{n-1} . \frac{1 . 2 . 3 \ldots (n-1)\ loge}{x^n},$$

und folglich

$$\partial^n y = (-1)^{n-1} . \frac{1 . 2 . 3 \ldots (n-1)}{x^n\, lb} \partial x^n$$

oder

$$\partial^n y = (-1)^{n-1} . \frac{1 . 2 . 3 \ldots (n-1)\, loge}{x^n} \partial x^n.$$

Hieraus ergiebt sich nun auch unmittelbar

$$\frac{\partial^n lx}{\partial x^n} = (-1)^{n-1} . \frac{1 . 2 . 3 \ldots (n-1)}{x^n},$$

$$\partial^n lx = (-1)^{n-1} . \frac{1 . 2 . 3 \ldots (n-1)}{x^n} \partial x^n.$$

§. 98.

Mittelst §. 60. und §. 61. erhält man leicht:

$$\frac{\partial \sin x}{\partial x} = \cos x = \sin(x + \tfrac{1}{2}\pi),$$

$$\frac{\partial^2 \sin x}{\partial x^2} = -\sin x = \sin(x + \tfrac{2}{2}\pi),$$

$$\frac{\partial^3 \sin x}{\partial x^3} = -\cos x = \sin(x + \tfrac{3}{2}\pi),$$

$$\frac{\partial^4 \sin x}{\partial x^4} = \sin x = \sin(x + \tfrac{4}{2}\pi),$$

$$\frac{\partial^5 \sin x}{\partial x^5} = \cos x = \sin(x + \tfrac{5}{2}\pi),$$

$$\frac{\partial^6 \sin x}{\partial x^6} = -\sin x = \sin(x + \tfrac{6}{2}\pi),$$

$$\frac{\partial^7 \sin x}{\partial x^7} = -\cos x = \sin(x + \tfrac{7}{2}\pi),$$

u. s. w.

Also ist allgemein

1. $\frac{\partial^n \sin x}{\partial x^n} = \sin(x + \tfrac{1}{2}n\pi)$, $\partial^n \sin x = \sin(x + \tfrac{1}{2}n\pi)\,\partial x^n$.

Auf ganz ähnliche Art ist nach §. 60. und §. 61.

$$\frac{\partial \cos x}{\partial x} = -\sin x = \cos(x + \tfrac{1}{2}\pi),$$

$$\frac{\partial^2 \cos x}{\partial x^2} = -\cos x = \cos(x + \tfrac{2}{2}\pi),$$

$$\frac{\partial^3 \cos x}{\partial x^3} = \sin x = \cos(x + \tfrac{3}{2}\pi),$$

$$\frac{\partial^4 \cos x}{\partial x^4} = \cos x = \cos(x + \tfrac{4}{2}\pi),$$

$$\frac{\partial^5 \cos x}{\partial x^5} = -\sin x = \cos(x + \tfrac{5}{2}\pi),$$

$$\frac{\partial^6 \cos x}{\partial x^6} = -\cos x = \cos(x + \tfrac{6}{2}\pi),$$

$$\frac{\partial^7 \cos x}{\partial x^7} = \sin x = \cos(x + \tfrac{7}{2}\pi),$$

u. s. w.

Folglich ist allgemein

2. $\frac{\partial^n \cos x}{\partial x^n} = \cos(x + \tfrac{1}{2}n\pi)$, $\partial^n \cos x = \cos(x + \tfrac{1}{2}n\pi)\,\partial x^n$.

§. 99.

Für die Function

$$\varphi = Arc\,tang\,x$$

ist nach §. 70.

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1+tang\,\varphi^2} = \cos\varphi^2 .$$

Differentiirt man nun diese Gleichung, bemerkt dabei aber, dass φ eine Function von x ist; so erhält man

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} = -2\cos\varphi\sin\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial x} = -2\cos\varphi^3\sin\varphi$$
$$= -\cos\varphi^2\sin 2\varphi.$$

Durch Differentiation dieser Gleichung ergiebt sich ferner

$$\frac{\partial^3\varphi}{\partial x^3} = -2\cos\varphi^2\cos 2\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial x} + 2\cos\varphi\sin\varphi\sin 2\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial x}$$
$$= -2\cos\varphi^3(\cos\varphi\cos 2\varphi - \sin\varphi\sin 2\varphi)$$
$$= -2\cos\varphi^3\cos 3\varphi,$$

und, wenn man diese Gleichung nun wieder differentiirt:

$$\frac{\partial^4\varphi}{\partial x^4} = 2.3\cos\varphi^3\sin 3\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial x} + 2.3\cos\varphi^2\sin\varphi\cos 3\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial x}$$
$$= 2.3\cos\varphi^4(\cos\varphi\sin 3\varphi + \sin\varphi\cos 3\varphi)$$
$$= 2.3\cos\varphi^4\sin 4\varphi,$$

$$\frac{\partial^5\varphi}{\partial x^5} = 2.3.4\cos\varphi^4\cos 4\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial x} - 2.3.4\cos\varphi^3\sin\varphi\sin 4\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial x}$$
$$= 2.3.4\cos\varphi^5(\cos\varphi\cos 4\varphi - \sin\varphi\sin 4\varphi)$$
$$= 2.3.4\cos\varphi^5\cos 5\varphi,$$

$$\frac{\partial^6\varphi}{\partial x^6} = -2.3.4.5\cos\varphi^5\sin 5\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial x} - 2.3.4.5\cos\varphi^4\sin\varphi\cos 5\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial x}$$
$$= -2.3.4.5\cos\varphi^6(\cos\varphi\sin 5\varphi + \sin\varphi\cos 5\varphi)$$
$$= -2.3.4.5\cos\varphi^6\sin 6\varphi,$$

$$\frac{\partial^7\varphi}{\partial x^7} = -2.3.4.5.6\cos\varphi^6\cos 6\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial x} + 2.3.4.5.6\cos\varphi^5\sin\varphi\sin 6\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial x}$$
$$= -2.3.4.5.6\cos\varphi^7(\cos\varphi\cos 6\varphi - \sin\varphi\sin 6\varphi)$$
$$= -2.3.4.5.6\cos\varphi^7\cos 7\varphi,$$

u. s. w.

Wie man auf diese Art weiter gehen kann, ist klar. Allgemein ist

$$\frac{\partial^{2n}\varphi}{\partial x^{2n}} = 1.2.3.4..(2n-1)(-1)^n\cos\varphi^{2n}\sin 2n\varphi,$$

$$\frac{\partial^{2n+1}\varphi}{\partial x^{2n+1}} = 1.2.3.4..2n(-1)^n\cos\varphi^{2n+1}\cos(2n+1)\varphi.$$

Es ist aber

$$\sin 2n(\tfrac{1}{2}\pi-\varphi) = \sin(n\pi-2n\varphi)$$
$$= -\cos n\pi \sin 2n\varphi = -(-1)^n \sin 2n\varphi,$$
$$\sin(2n+1)(\tfrac{1}{2}\pi-\varphi) = \sin\{n\pi-(2n+1)\varphi+\tfrac{1}{2}\pi\}$$
$$=\cos\{n\pi-(2n+1)\varphi\}=\cos n\pi \cos(2n+1)\varphi=(-1)_n \cos(2n+1)\varphi,$$

oder

$$\sin 2n\varphi = -\frac{1}{(-1)^n}\sin 2n(\tfrac{1}{2}\pi-\varphi),$$

$$\cos(2n+1)\varphi = \frac{1}{(-1)^n}\sin(2n+1)(\tfrac{1}{2}\pi-\varphi).$$

Also ist

$$\frac{\partial^{2n}\varphi}{\partial x^{2n}} = -1.2.3\ldots(2n-1)\cos\varphi^{2n}\sin 2n(\tfrac{1}{2}\pi-\varphi),$$

$$\frac{\partial^{2n+1}\varphi}{\partial x^{2n+1}} = 1.2.3\ldots2n\cos\varphi^{2n+1}\sin(2n+1)(\tfrac{1}{2}\pi-\varphi);$$

oder

$$\frac{\partial^{2n}\varphi}{\partial x^{2n}} = 1.2.3\ldots(2n-1)(-1)^{2n-1}\cos\varphi^{2n}\sin 2n(\tfrac{1}{2}\pi-\varphi),$$

$$\frac{\partial^{2n+1}\varphi}{\partial x^{2n+1}} = 1.2.3\ldots2n(-1)^{2n}\cos\varphi^{2n+1}\sin(2n+1)(\tfrac{1}{2}\pi-\varphi),$$

und folglich offenbar überhaupt für jedes gerade oder ungerade n

$$\frac{\partial^n Arc\tang x}{\partial x^n} = 1.2.3\ldots(n-1)(-1)^{n-1}\cos\varphi^n \sin n(\tfrac{1}{2}\pi-\varphi),$$

für

$$\varphi = Arc\tang x.$$

§. 100.

Weil nach §. 71.

$$\frac{\partial Arc\cot x}{\partial x} = -\frac{1}{1+x^2}$$

ist; so ist

$$\frac{\partial Arc\cot x}{\partial x} = -\frac{\partial Arc\tang x}{\partial x},$$

und folglich offenbar überhaupt

$$\frac{\partial^n Arc\cot x}{\partial x^n} = -\frac{\partial^n Arc\tang x}{\partial x^n},$$

d. i. nach §. 99.

$$\frac{\partial^n Arc\cot x}{\partial x^n} = 1.2.3\ldots(n-1)(-1)^n\cos\varphi^n\sin n(\tfrac{1}{2}\pi-\varphi),$$

für

$$\varphi = Arc\tang x.$$

Für $\psi = Arc\cot x$ ist

$$x = \cot\psi = tang(\tfrac{1}{2}\pi - \psi),$$

und man kann folglich offenbar $\frac{1}{2}\pi - \psi$ für φ, ψ für $\frac{1}{2}\pi - \varphi$ setzen. Auf diese Art erhält man aus dem Vorhergehenden

$$\frac{\partial^n Arc\cot x}{\partial x^n} = 1.2.3\ldots(n-1)\,(-1)^n \sin\psi^n \sin n\psi.$$

Fünftes Kapitel.

Der Maclaurin'sche und Taylor'sche Lehrsatz für Functionen mit einer veränderlichen Grösse.

§. 101.

Erklärung. Man sagt, dass eine Grösse X eine Mittelgrösse zwischen zwei andern Grössen A und B, oder zwischen diesen beiden Grössen enthalten sey, wenn das Product

$$(A-X)\,(X-B)$$

eine positive Grösse ist, wobei wir, wie auch im Folgenden immer geschehen wird, Null mit unter den positiven Grössen begreifen.

Bezeichnen wir also eine Mittelgrösse zwischen A und B überhaupt durch $M(A, B)$; so ist das Product

$$\{A-M(A,B)\}\{M(A,B) - B\}$$

jederzeit eine positive Grösse.

Zu näherer Erläuterung dieser allgemeinen Definition möge noch Folgendes bemerkt werden.

Ist zuerst das Product

$$\{A-M(A,B)\}\{M(A,B)-B\}$$

nicht Null; so verschwindet keiner seiner beiden Factoren, und diese beiden Factoren haben, weil das Product positiv ist, gleiche Vorzeichen. Daher ist mit Beziehung der obern und untern Zeichen auf einander

$$M(A,B) \gtrless A, \quad M(A,B) \lesseqgtr B.$$

Verschwindet das Product

$$\{A-M(A,B)\}\{M(A,B)-B\};$$

so verschwindet entweder nur einer seiner beiden Factoren, oder diese Factoren verschwinden beide. Verschwindet nun zuerst bloss der Factor $A-M(A,B)$; so ist

$$M(A,B) = A, \quad M(A,B) \gtrless B.$$

Verschwindet dagegen bloss der Factor $M(A,B) - B$; so ist

$$M(A,B) \gtrless A\,, \quad M(A,B) = B.$$

Verschwinden endlich beide Factoren; so ist

$$M(A,B) = A\,, \quad M(A,B) = B,$$

und folglich natürlich $A = B$.

Hieraus sieht man, dass eine Mittelgrösse zwischen zwei ungleichen Grössen jederzeit eine Grösse ist, welche nicht kleiner als die kleinste und nicht grösser als die grösste der beiden in Rede stehenden Grössen ist. Eine Mittelgrösse zwischen zwei einander gleichen Grössen ist dagegen diesen beiden Grössen immer selbst gleich.

§. 102.

Lehrsatz. Wenn die Function $y = f(x)$ in der Nähe eines bestimmten Werthes der unabhängigen veränderlichen Grösse, der jedoch hier der Einfachheit wegen durch x selbst bezeichnet werden mag, stetig, und der entsprechende Werth $f'(x)$ des ersten Differentialquotienten dieser Function eine endliche bestimmte Grösse, aber nicht $= 0$ ist; so wird, indem man die unabhängige veränderliche Grösse sich von dem bestimmten Werthe x an stetig verändern lässt,

I. wenn $f'(x)$ positiv ist, die gegebene Function von $f(x)$ an zu- oder abnehmen, wenn die unabhängige veränderliche Grösse von x an respective zu- oder abnimmt; dagegen wird

II. wenn $f'(x)$ negativ ist, die gegebene Function von $f(x)$ an zu- oder abnehmen, wenn die unabhängige veränderliche Grösse von x an respective ab- oder zunimmt.

Beweis. Die der beliebigen Aenderung Δx von x entsprechende Aenderung von $f(x)$ sey Δy. Nach dem allgemeinen Begriffe des Differentialquotienten ist $f'(x)$ die Gränze, welcher $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ sich immer mehr und mehr und bis zu jedem beliebigen Grade nähert, wenn Δx sich der Null nähert. Für der Null unendlich nahe kommende Δx hat also $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ mit $f'(x)$ offenbar einerlei Vorzeichen. Ist folglich $f'(x)$ positiv; so ist, immer für der Null unendlich nahe kommende Δx, auch $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ positiv, und Δx und Δy haben folglich gleiche Vorzeichen, d. h. x und $f(x)$ nehmen gleichzeitig zu und ab, wie behauptet wurde. Ist dagegen $f'(x)$ negativ; so ist für der Null unendlich nahe kommende Δx auch $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ negativ, und Δx und Δy haben folglich entgegengesetzte

Vorzeichen, d. i. $f(x)$ nimmt ab oder zu, wenn x respective zu- oder abnimmt, welches der zweite Theil der Behauptung war.

§. 103.

Wenn eine von $x = \alpha$ bis $x = \beta$ stetige Function zwischen diesen Gränzen ihr Zeichen niemals ändert; so kann dieselbe zwischen diesen Gränzen auch niemals verschwinden, weil eine für einen gewissen Werth ihrer veränderlichen Grösse verschwindende, in der Nähe dieses Werths stetige, Function bei diesem Werthe der unabhängigen veränderlichen Grösse offenbar jederzeit entweder vom Negativen zum Positiven, oder vom Positiven zum Negativen übergehen muss.

Dies vorausgesetzt, lassen sich aus dem im vorigen Paragraphen bewiesenen Satze unmittelbar die folgenden wichtigen Folgerungen ziehen.

I. Wenn $\beta > \alpha$ und die Function $f(x)$ sowohl, als auch ihr erster Differentialquotient $f'(x)$ von $x = \alpha$ bis $x = \beta$ stetig ist; so wird, wenn $f'(x)$ von $x = \alpha$ bis $x = \beta$ stets positiv ist, die Function $f(x)$ von $x = \alpha$ bis $x = \beta$ stets wachsen; dagegen wird, wenn $f'(x)$ von $x = \alpha$ bis $x = \beta$ stets negativ ist, die Function $f(x)$ von $x = \alpha$ bis $x = \beta$ stets abnehmen.

II. Wenn $\beta < \alpha$ und die Function $f(x)$ sowohl, als auch ihr erster Differentialquotient $f'(x)$ von $x = \alpha$ bis $x = \beta$ stetig ist; so wird, wenn $f'(x)$ von $x = \alpha$ bis $x = \beta$ stets positiv ist, die Function $f(x)$ von $x = \alpha$ bis $x = \beta$ stets abnehmen; dagegen wird, wenn $f'(x)$ von $x = \alpha$ bis $x = \beta$ stets negativ ist, die Function $f(x)$ von $x = \alpha$ bis $x = \beta$ stets wachsen.

III. Wie also auch die Gränzen α und β beschaffen seyn mögen; so wird, wenn die Function $f(x)$ sowohl, als auch ihr erster Differentialquotient von $x = \alpha$ bis $x = \beta$ stetig ist, und letzterer von $x = \alpha$ bis $x = \beta$ sein Zeichen niemals ändert, die Function $f(x)$ immer von $x = \alpha$ bis $x = \beta$ entweder stets wachsen, oder stets abnehmen.

Auch ergiebt sich aus I. und II. unmittelbar, dass, wenn die Function $f(x)$ von $x = \alpha$ bis $x = \beta$ stets zu- oder stets abnimmt, eine andere Function $\varphi(x)$ dagegen von $x = \alpha$ bis $x = \beta$ respective stets ab- oder stets zunimmt, die Differentialquotienten $f'(x)$ und $\varphi'(x)$ von $x = \alpha$ bis $x = \beta$ immer einander entgegengesetzte, sich selbst aber immer gleich bleibende Vorzeichen haben werden. Stetigkeit der Functionen und ihrer ersten Differentialquotienten wird natürlich auch hierbei immer vorausgesetzt.

§. 104.

Lehrsatz. Seien $f(x)$ und $F(x)$ zwei Functionen, welche für $x = \alpha$ beide verschwinden und, so wie

ihre ersten Differentialquotienten $f'(x)$ und $F'(x)$ von $x=\alpha$ bis $x=\beta$ stetig sind. Aendert nun $F'(x)$ von $x=\alpha$ bis $x=\beta$ sein Zeichen nicht; so ist, wenn A und B den kleinsten und grössten unter allen den Werthen bezeichnen, welche der Bruch

$$\frac{f'(x)}{F'(x)}$$

erhält, wenn man x sich von $x=\alpha$ bis $x=\beta$ stetig verändern lässt, der Bruch

$$\frac{f(\beta)}{F(\beta)}$$

jederzeit eine Mittelgrösse zwischen A und B, d. i. in der oben eingeführten Bezeichnung

$$\frac{f(\beta)}{F(\beta)}=M(A,B).$$

Beweis. Man lasse i eine unendlich kleine positive Grösse, die jedoch nicht $=0$ ist, bezeichnen, und setze, indem sich die obern Zeichen auf den Fall, wo $\alpha<\beta$, die untern auf den Fall, wo $\alpha>\beta$ ist, beziehen,

$$\alpha\pm i=\alpha',\beta\mp i=\beta'.$$

Der kleinste und grösste unter allen den Werthen, welche der Bruch

$$\frac{f'(x)}{F'(x)}$$

erhält, wenn man x sich von $x=\alpha'$ bis $x=\beta'$ stetig verändern lässt, seyen respective A' und B'. Setzen wir nun, indem i seine obige Bedeutung behält,

$$A'-i=A'',\quad B'+i=B'';$$

so ist offenbar für jeden Werth von x von $x=\alpha'$ bis $x=\beta'$

$$\frac{f'(x)}{F'(x)}-A''>0,\ \frac{f'(x)}{F'(x)}-B''<0.$$

Nach der Voraussetzung ändert $F'(x)$ von $x=\alpha$ bis $x=\beta$ sein Zeichen nicht. Also ist $F'(x)$ von $x=\alpha'$ bis $x=\beta'$ offenbar entweder stets >0 oder stets <0, und es ist folglich von $x=\alpha'$ bis $x=\beta'$ jederzeit das eine der beiden Producte

$$F'(x)\left\{\frac{f'(x)}{F'(x)}-A''\right\},\quad F'(x)\left\{\frac{f'(x)}{F'(x)}-B''\right\}$$

stets >0, das andere stets <0, wobei es übrigens unbestimmt bleibt, für welches dieser beiden Producte das Erste, und für welches das Zweite Statt findet. Daher ist von $x=\alpha'$ bis $x=\beta'$ jederzeit die eine der beiden Grössen

$$f'(x)-A''F'(x),\quad f'(x)-B''F'(x)$$

stets >0, die andere stets <0. Da nun diese beiden Grössen offenbar respective die Differentialquotienten der Functionen

$$f(x)-A''F(x),\quad f(x)-B''F(x)$$

sind; so ergiebt sich aus §. 103. unmittelbar, dass jederzeit von $x=\alpha'$ bis $x=\beta'$ die eine dieser beiden Functionen stets wachsen, die andere dagegen stets abnehmen wird. Nach der Voraussetzung ist nun $f(\alpha)=0$, $F(\alpha)=0$, und folglich auch

$$f(\alpha)-A''F(\alpha)=0,\quad f(\alpha)-B''F(\alpha)=0.$$

Die Grösse i kann man beliebig klein, also α' beliebig nahe bei α, die Grössen

$$f(\alpha')-A''F(\alpha'),\quad f(\alpha')-B''F(\alpha')$$

folglich wegen der vorausgesetzten Stetigkeit der Functionen beliebig nahe bei Null annehmen. Hieraus, in Verbindung mit dem vorher Bewiesenen, geht unzweideutig hervor, dass von den beiden Grössen

$$f(\beta')-A''F(\beta'),\quad f(\beta')-B''F(\beta')$$

jederzeit die eine >0, die andere <0 ist. Also ist auch jederzeit die eine der beiden Grössen

$$\frac{f(\beta')}{F(\beta')}-A'',\quad \frac{f(\beta')}{F(\beta')}-B''$$

>0, die andere <0. Weil aber wegen der gemachten Voraussetzungen $A''<B''$ ist; so ist offenbar

$$\frac{f(\beta')}{F(\beta')}-A''>0,\quad \frac{f(\beta')}{F(\beta')}-B''<0,$$

oder

$$\frac{f(\beta')}{F(\beta')}>A'',\quad \frac{f(\beta')}{F(\beta')}<B''.$$

Nach dem Obigen ist nun

$$A'-i=A'',\quad B'+i=B'',$$

wo die positive Grösse i beliebig klein angenommen werden kann. Sind also die Grössen A' und B' ungleich, d. i. um eine bestimmte endliche Grösse von einander verschieden; so ist offenbar auch

$$\frac{f(\beta')}{F(\beta')}>A',\quad \frac{f(\beta')}{F(\beta')}<B'.$$

Wäre aber $A'=B'$; so könnte zwischen $A''=A'-i$ und $B''=B'+i$ offenbar bloss $A'=B'$ liegen, und es wäre folglich augenscheinlich in diesem Falle

$$A'=\frac{f(\beta')}{F(\beta')}=B'.$$

Da A' der kleinste, B' der grösste unter allen den Werthen ist, welche der Bruch

$$\frac{f'(x)}{F'(x)}$$

erhält, wenn man sich x von $x = \alpha'$ bis $x = \beta'$ stetig verändern lässt; so muss in dem Falle, wo $A' = B'$ ist, dieser Bruch offenbar so beschaffen seyn, dass er seinen Werth von $x = \alpha'$ bis $x = \beta'$ gar nicht ändert. Ob es solche Functionen geben kann, lassen wir dahin gestellt seyn; der Allgemeinheit des Beweises wegen musste der in Rede stehende Fall vorher mit betrachtet werden.

Ueberhaupt geht nun aber aus dem Obigen hervor, dass das Product

$$\left\{A' - \frac{f(\beta')}{F(\beta')}\right\}\left\{\frac{f(\beta')}{F(\beta')} - B'\right\}$$

jederzeit eine positive Grösse, und folglich nach §. 101. der Bruch

$$\frac{f(\beta')}{F(\beta')}$$

jederzeit eine Mittelgrösse zwischen A' und B', oder

$$\frac{f(\beta')}{F(\beta')} = M(A', B')$$

ist.

Die Grösse i ist eine unendlich kleine Grösse, und nach den gemachten Voraussetzungen sind die Functionen $f(x)$, $F(x)$, $f'(x)$, $F'(x)$ von $x = \alpha$ bis $x = \beta$ stetig. Daher kann man statt der Grössen α', β', A', B' offenbar auch respective α, β, A, B setzen, so dass folglich auch

$$\frac{f(\beta)}{F(\beta)} = M(A, B)$$

ist, wie bewiesen werden sollte.

Besonders bemerken wir des Folgenden wegen hier noch, dass in dem Falle, wo A und B ungleich sind, jederzeit

$$A < \frac{f(\beta)}{F(\beta)} < B,$$

in dem Falle dagegen, wo $A = B$ ist,

$$A = \frac{f(\beta)}{F(\beta)} = B$$

ist. Auch ergiebt sich aus dem Vorhergehenden, dass im letztern Falle die Function

$$\frac{f'(x)}{F'(x)}$$

von $x = \alpha$ bis $x = \beta$ ihren Werth gar nicht ändert, und jedem dieser Werthe dieser Function die Grösse

$$\frac{f(\beta)}{F(\beta)}$$

gleich ist.

§. 105.

Zusatz. I. Indem alle dem vorigen Satze zum Grunde liegenden Voraussetzungen völlig ungeändert bleiben, denke man sich jetzt die Function

$$\frac{f'(x)}{F'(x)}$$

in dem Intervalle $x = \alpha$, $x = \beta$ durch eine stetige Curve dargestellt; so erhellet mittelst des vorigen Satzes auf der Stelle, dass es immer einen gewissen Werth ξ von x geben muss, welcher grösser als die kleinere, kleiner als die grössere der beiden Grössen α und β, und für welchen

$$\frac{f(\beta)}{F(\beta)} = \frac{f'(\xi)}{F'(\xi)}$$

ist.

II. Setzt man nun, indem jetzt i eine beliebig grosse positive oder negative Grösse bezeichnet, $\beta = \alpha + i$; so ist offenbar $\xi = \alpha + i_1$, wo i_1 eine Grösse bezeichnet, welche mit i gleiches Vorzeichen, aber einen kleinern absoluten Werth wie i hat, und folglich

$$\frac{f(\alpha+i)}{F(\alpha+i)} = \frac{f'(\alpha+i_1)}{F'(\alpha+i_1)},$$

indem auch hierbei die bei dem Lehrsatze in §. 104. gemachten Voraussetzungen stets zum Grunde liegen.

Dies führt uns nun unmittelbar zu dem folgenden sehr wichtigen Satze:

Wenn $f(x)$ und $F(x)$ zwei für $x = \alpha$ verschwindende Functionen bezeichnen, welche, so wie ihre ersten Differentialquotienten $f'(x)$ und $F'(x)$, von $x = \alpha$ bis $x = \alpha + i$, wo i eine beliebige positive oder negative Grösse bezeichnet, stetig sind, auch der Differentialquotient $F'(x)$ von $x = \alpha$ bis $x = \alpha + i$ sein Zeichen nicht ändert; so ist, indem i_1 eine Grösse bezeichnet, welche mit i einerlei Vorzeichen, aber einen kleinern absoluten Werthe wie i hat, jederzeit

$$\frac{f(\alpha+i)}{F(\alpha+i)} = \frac{f'(\alpha+i_1)}{F'(\alpha+i_1)}.$$

§. 106.

Lehrsatz. Wenn die Functionen

$$f(x), f'(x), f''(x), f'''(x), \ldots f^{(n-1)}(x);$$
$$F(x), F'(x), F''(x), F'''(x), \ldots F^{(n-1)}(x)$$

für $x = \alpha$ sämmtlich verschwinden, und, so wie auch die Functionen $f^{(n)}(x)$ und $F^{(n)}(x)$, von $x = \alpha$ bis $x = \alpha + i$ stetig sind, keine der Functionen

$$F'(x), F''(x), F'''(x), F^{\mathrm{iv}}(x), \ldots F^{(n)}(x)$$

aber von $x = \alpha$ bis $x = \alpha + i$ ihr Zeichen ändert; so ist jederzeit

$$\frac{f(\alpha+i)}{F(\alpha+i)} = \frac{f^{(n)}(\alpha+i_n)}{F^{(n)}(\alpha+i_n)},$$

wo i_n eine Grösse bezeichnet, welche mit i gleiches Vorzeichen, aber einen kleinern absoluten Werth wie i hat.

Beweis. Nach §. 105. II. ist

$$\frac{f(\alpha+i)}{F(\alpha+i)} = \frac{f'(\alpha+i_1)}{F'(\alpha+i_1)},$$

$$\frac{f'(\alpha+i_1)}{F'(\alpha+i_1)} = \frac{f''(\alpha+i_2)}{F''(\alpha+i_2)},$$

$$\frac{f''(\alpha+i_2)}{F''(\alpha+i_2)} = \frac{f'''(\alpha+i_3)}{F'''(\alpha+i_3)},$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{f^{(n-1)}(\alpha+i_{n-1})}{F^{(n-1)}(\alpha+i_{n-1})} = \frac{f^{(n)}(\alpha+i_n)}{F^{(n)}(\alpha+i_n)},$$

wo die Grössen i, i_1, i_2, i_3, ... i_n sämmtlich einerlei Vorzeichen haben, ihre absoluten Werthe aber eine fortwährend abnehmende Reihe bilden. Also ist offenbar auch

$$\frac{f(\alpha+i)}{F(\alpha+i)} = \frac{f^{(n)}(\alpha+i_n)}{F^{(n)}(\alpha+i_n)},$$

wo i und i_n Grössen von einerlei Vorzeichen sind, und der absolute Werth von i_n kleiner wie der absolute Werth von i ist, welches der zu beweisende Satz war.

§. 107.

Zusatz. Weil i_n mit i einerlei Vorzeichen, und einen kleinern absoluten Werth wie i hat; so kann man offenbar $i_n = \varrho i$ setzen, wo ϱ einen positiven echten Bruch bezeichnet, und der vorige Lehrsatz lässt sich also auch auf folgende Art ausdrücken:

Wenn die Functionen

$$f(x), f'(x), f''(x), f'''(x), \ldots f^{(n-1)}(x);$$
$$F(x), F'(x), F''(x), F'''(x), \ldots F^{(n-1)}(x)$$

für $x = \alpha$ sämmtlich verschwinden, und, so wie auch die Functionen $f^{(n)}(x)$ und $F^{(n)}(x)$, von $x = \alpha$ bis $x = \alpha + i$ stetig sind, keine der Functionen

$$F'(x), F''(x), F'''(x), F^{IV}(x), \ldots F^{(n)}(x)$$

aber von $x = \alpha$ bis $x = \alpha + i$ ihr Zeichen ändert; so ist, indem ϱ einen positiven echten Bruch bezeichnet, jederzeit

$$\frac{f(\alpha+i)}{F(\alpha+i)} = \frac{f^{(n)}(\alpha+\varrho i)}{F^{(n)}(\alpha+\varrho i)}.$$

§. 108.

Wir wollen nun $\alpha = 0$, $F(x) = x^n$, wo n eine positive ganze Zahl bezeichnen soll, setzen, und wollen untersuchen, ob die Function $F(x) = x^n$ allen bei dem vorhergehenden Satze gemachten Voraussetzungen genügt.

Entwickeln wir zu dem Ende die Differentialquotienten der Function $F(x) = x^n$; so erhalten wir

$$F(x) = x^n,$$
$$F'(x) = nx^{n-1},$$
$$F''(x) = (n-1)\,nx^{n-2},$$
$$F'''(x) = (n-2)(n-1)nx^{n-3},$$
$$\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot$$
$$F^{(n-1)}(x) = 2.3.4.5.6\ldots.\, nx,$$
$$F^{(n)}(x) = 1.2.3.4.5.6\ldots\ldots n.$$

Hieraus ergiebt sich, dass

$$F(x)\,,\;F(x)\,,\;F''(x)\,,\;F'''(x)\,,\ldots\ldots F^{(n-1)}(x)$$

für $x = 0$ sämmtlich verschwinden, und dass keine der Functionen

$$F'(x)\,,\;F''(x)\,,\;F'''(x)\,,\;F^{\text{IV}}(x)\,,\ldots\ldots F^{(n)}(x)$$

von $x = 0$ bis $x = i$ ihr Zeichen ändert. Auch sind die Functionen

$$F(x)\,,\;F'(x)\,,\;F''(x)\,,\;F'''(x)\,,\ldots\ldots F^{(n)}(x)$$

offenbar von $x = 0$ bis $x = i$ stetig, wie sogleich in die Augen fällt, wenn man nur festhält, dass n eine positive ganze Zahl ist. Also genügt die Function $F(x)$ offenbar den sämmtlichen im vorhergehenden Paragraphen geforderten Bedingungen. Weil nun

$$F^{(n)}(x) = 1\,.\,2\,.\,3\ldots n$$

ist; so ist natürlich auch

$$F^{(n)}(\varrho i) = 1\,.\,2\,.\,3\ldots n$$

zu setzen, und aus §. 107. ergiebt sich daher unmittelbar der folgende Satz:

I. Wenn die Functionen

$$f(x)\,,\;f'(x)\,,\;f''(x)\,,\;f'''(x)\,,\ldots f^{(n-1)}(x)$$

für $x = 0$ sämmtlich verschwinden, und, so wie die Function $f^{(n)}(x)$, von $x = 0$ bis $x = i$ stetig sind; so ist immer

$$f(i) = \frac{i^n}{1.2.3\ldots n}\,f^{(n)}(\varrho i)\,,$$

wo ϱ einen positiven echten Bruch bezeichnet.

Setzt man, welches offenbar verstattet ist, x für i; so erhält man folgenden Satz:

II. Wenn die Functionen

$$f(x)\,,\,f'(x)\,,\,f''(x)\,,\,f'''(x)\,,\,\ldots\,f^{(n-1)}(x)$$

ür $x=0$ sämmtlich verschwinden, und, so wie die Function $f^{(n)}(x)$, von $x=0$ bis $x=x$ stetig sind; so ist immer,

$$f(x)=\frac{x^n}{1.2.3\ldots n}f^{(n)}(\varrho x)\,,$$

wo ϱ einen positiven echten Bruch bezeichnet.

§. 109.

Wir wollen nun annehmen, dass die Functionen

$$\varphi(x)\,,\,\varphi'(x)\,,\,\varphi''(x)\,,\,\varphi'''(x)\,,\,\ldots\,\varphi^{(n)}(x)$$

von $x=0$ bis $x=x$ sämmtlich stetig sind. Setzen wir dann

$$f(x)=\varphi(x)-\varphi(0)-\frac{x}{1}\varphi'(0)-\frac{x^2}{1.2}\varphi''(0)-\ldots-\frac{x^{n-1}}{1\ldots(n-1)}\varphi^{(n-1)}(0);$$

so ergiebt sich durch successive Differentiation ohne alle Schwierigkeit:

$$f(x)=\varphi(x)-\varphi(0)-\frac{x}{1}\varphi'(0)-\frac{x^2}{1.2}\varphi''(0)-\frac{x^3}{1.2.3}\varphi'''(0)-\ldots-\frac{x^{n-1}}{1..(n-1)}\varphi^{(n-1)}(0),$$

$$f'(x)=\varphi'(x)-\varphi'(0)-\frac{x}{1}\varphi''(0)-\frac{x^2}{1.2}\varphi'''(0)-\ldots-\frac{x^{n-2}}{1..(n-2)}\varphi^{(n-1)}(0),$$

$$f''(x)=\varphi''(x)-\varphi''(0)-\frac{x}{1}\varphi'''(0)-\ldots-\frac{x^{n-3}}{1..(n-3)}\varphi^{(n-1)}(0)\,,$$

$$f'''(x)=\varphi'''(x)-\varphi'''(0)-\ldots-\frac{x^{n-4}}{1..(n-4)}\varphi^{(n-1)}(0)\,,$$

. . . .

$$f^{(n-1)}(x)=\varphi^{(n-1)}(x)-\varphi^{(n-1)}(0)\,,$$

$$f^{(n)}(x)=\varphi^{(n)}(x).$$

Hieraus ergiebt sich auf der Stelle, dass die Functionen

$$f(x)\,,\,f'(x)\,,\,f''(x)\,,\,f'''(x)\,,\,\ldots\,f^{(n-1)}(x)$$

für $x=0$ sämmtlich verschwinden. Auch ist, weil nach der Voraussetzung

$$\varphi(x)\,,\,\varphi'(x)\,,\,\varphi''(x)\,,\,\varphi'''(x)\,,\,\ldots\,\varphi^{(n)}(x)$$

von $x=0$ bis $x=x$ stetig sind, klar, dass die Functionen

$$f(x)\,,\,f'(x)\,,\,f''(x)\,,\,f'''(x)\,,\,\ldots\,f^{(n)}(x)$$

von $x=0$ bis $x=x$ stetig sind. Weil ferner

$$f^{(n)}(x)=\varphi^{(n)}(x)$$

ist; so ist natürlich auch

$$f^{(n)}(\varrho x)=\varphi^{(n)}(\varrho x)\,,$$

und folglich nach §. 108.

$$\varphi(x)-\varphi(0)-\frac{x}{1}\varphi'(0)-\frac{x^2}{1.2}\varphi''(0)-\frac{x^3}{1.2.3}\varphi'''(0)-\ldots-\frac{x^{n-1}}{1\ldots(n-1)}\varphi^{(n-1)}(0)$$
$$=\frac{x^n}{1.2.3\ldots n}\varphi^{(n)}(\varrho x),$$

oder

$$\varphi(x)=\varphi(0)+\frac{x}{1}\varphi'(0)+\frac{x^2}{1.2}\varphi''(0)+\frac{x^3}{1.2.3}\varphi'''(0)+\ldots$$
$$\ldots+\frac{x^{n-1}}{1\ldots(n-1)}\varphi^{(n-1)}(0)+\frac{x^n}{1\ldots n}\varphi^{(n)}(\varrho x).$$

Schreibt man nun statt des Functionszeichens φ wieder das Functionszeichen f; so erhält man den folgenden höchst wichtigen und merkwürdigen Satz:

Wenn die Functionen

$$f(x)\,,\,f'(x)\,,\,f''(x)\,,\,f'''(x)\,,\,\ldots\,f^{(n)}(x)$$

von $x=0$ bis $x=x$ sämmtlich stetig sind; so ist immer

$$f(x)=f(0)+\frac{x}{1}f'(0)+\frac{x^2}{1.2}f''(0)+\frac{x^3}{1.2.3}f'''(0)+\ldots\ldots$$
$$\ldots+\frac{x^{n-1}}{1\ldots(n-1)}f^{(n-1)}(0)+\frac{x^n}{1\ldots n}f^{(n)}(\varrho x),$$

wo ϱ einen positiven echten Bruch bezeichnet.

§. 110.

Aus diesem Satze lassen sich zwei andere nicht minder wichtige Sätze herleiten.

Man setze $x=a+z$ und $f(x)=F(z)$; so ist, weil

$$\frac{\partial x}{\partial z}=1$$

ist, nach §. 43.

$$F(z)=f(x),$$
$$F'(z)=f'(x)\frac{\partial x}{\partial z}=f'(x),$$
$$F''(z)=f''(x)\frac{\partial x}{\partial z}=f''(x),$$
$$F'''(z)=f'''(x)\frac{\partial x}{\partial z}=f'''(x),$$

u. s. w.;

also überhaupt

$$F^{(k)}(z)=f^{(k)}(x).$$

Für $z=0$ ist $x=a$. Also ist

Setzt man ϱz für z; so muss man offenbar

$$a + \varrho z = a + \varrho(x-a)$$

für x setzen, und hat also allgemein

$$F^{(k)}(\varrho z) = f^{(k)}(a+\varrho(x-a)).$$

Sind nun die Functionen

$$F(z)\,,\ F'(z)\,,\ F''(z)\,,\ F'''(z)\,,\ \ldots\ F^{(n)}(z)$$

von $z=0$ bis $z=z$ sämmtlich stetig; so ist nach §. 109.

$$F(z)=F(0)+\frac{z}{1}F'(0)+\frac{z^2}{1.2}F''(0)+\frac{z^3}{1.2.3}F'''(0)+\ldots.$$

$$\ldots.+\frac{z^{n-1}}{1\ldots(n-1)}F^{(n-1)}(0)+\frac{z^n}{1\ldots n}F^{(n)}(\varrho z)\,,$$

und man erhält also, wenn man alles Vorhergehende zusammen nimmt, den folgenden Satz:

I. Wenn die Functionen

$$f(x)\,,\ f'(x)\,,\ f''(x)\,,\ f'''(x)\,,\ \ldots\ f^{(n)}(x)$$

von $x=a$ bis $x=x$ sämmtlich stetig sind; so ist jederzeit

$$f(x)=f(a)+\frac{x-a}{1}f'(a)+\frac{(x-a)^2}{1.2}f''(a)+\ldots.$$

$$\ldots.+\frac{(x-a)^{n-1}}{1\ldots(n-1)}f^{(n-1)}(a)+\frac{(x-a)^n}{1\ldots n}f^{(n)}(a+\varrho(x-a)),$$

wo ϱ einen positiven echten Bruch bezeichnet.

Setzt man hierin $x-a=i$, $x=a+i$; so ist, unter der Voraussetzung, dass die Functionen

$$f(x)\,,\ f'(x)\,,\ f''(x)\,,\ f'''(x)\,,\ \ldots\ f^{(n)}(x)$$

von $x=a$ bis $x=a+i$ sämmtlich stetig sind, jederzeit

$$f(a+i)=f(a)+\frac{i}{1}f'(a)+\frac{i^2}{1.2}f''(a)+\ldots..$$

$$\ldots.+\frac{i^{n-1}}{1\ldots(n-1)}f^{(n-1)}(a)+\frac{i^n}{1\ldots n}f^{(n)}(a+\varrho i),$$

wo ϱ einen positiven echten Bruch bezeichnet, und man hat also jetzt, wenn man nur wieder x für a schreibt, den folgenden ebenfalls höchst wichtigen Satz:

II. Wenn die Functionen

$$f(x)\,,\ f'(x)\,,\ f''(x)\,,\ f'''(x)\,,\ \ldots\ f^{(n)}(x)$$

von $x=x$ bis $x=x+i$ sämmtlich stetig sind; so ist immer

$$f(x+i)=f(x)+\frac{i}{1}f'(x)+\frac{i^2}{1.2}f''(x)+\frac{i^3}{1.2.3}f'''(x)+\ldots.$$

$$\ldots.+\frac{i^{n-1}}{1\ldots(n-1)}f^{(n-1)}(x)+\frac{i^n}{1\ldots n}f^{(n)}(x+\varrho i),$$

wo ϱ einen positiven echten Bruch bezeichnet.

§. 111.

Erklärung. Man bezeichne, wenn

$$t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, \ldots t_n, \ldots\ldots$$

eine beliebige Reihe ist, die Summe

$$t_1 + t_2 + t_3 + t_4 + \ldots\ldots + t_n$$

der n ersten Glieder derselben durch s_n. Wenn nun s_n sich, wenn n wächst, einer bestimmten endlichen Grösse, die wir durch s bezeichnen wollen, immer mehr und mehr nähert, und derselben beliebig nahe gebracht werden kann, wenn man nur n gross genug nimmt; so sagt man, dass die Reihe

$$t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, \ldots t_n, \ldots\ldots$$

convergire oder convergent sey, und die Grösse s heisst dann die Summe derselben, ein Verhalten, welches man gewöhnlich auf ganz zweckmässige Weise durch

$$s = t_1 + t_2 + t_3 + t_4 \ldots\ldots + t_n + \ldots\ldots,$$

oder auch, wenn das Gesetz, nach welchem die Glieder der Reihe fortschreiten, schon aus einigen ihrer ersten Glieder deutlich genug erhellet, mit Weglassung des allgemeinen Gliedes t_n bloss durch

$$s = t_1 + t_2 + t_3 + t_4 + t_5 + \ldots\ldots$$

bezeichnet.

Dass convergirende Reihen zur annähernden Berechnung der numerischen Werthe ihrer Summen gebraucht werden können, und überhaupt bei der Berechnung der numerischen Werthe der Functionen gewöhnlich vortreffliche Dienste leisten, ergiebt sich aus dem vorhergehenden allgemeinen Begriffe von selbst. Da nämlich s_n, wenn n wächst, der Grösse s sich immer mehr und mehr nähert, und derselben beliebig nahe kommen kann, wenn man nur n gross genug nimmt; so wird man natürlich den Werth von s desto genauer erhalten, je mehr Glieder der Reihe

$$t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, \ldots t_n, \ldots\ldots$$

vom Anfange an man mit einander vereinigt, und wird auch jederzeit s mit jedem beliebigen Grade der Genauigkeit erhalten können, wenn man nur eine hinreichende Anzahl von Gliedern der in Rede stehenden Reihe vom Anfange an mit einander vereinigt.

Wenn die oben durch s_n bezeichnete Grösse sich, wenn n wächst, nicht immer mehr und mehr bis zu jedem beliebigen Grade einer gewissen bestimmten endlichen Grösse nähert; so sagt man, dass die Reihe

$$t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, \ldots t_n, \ldots\ldots$$

divergire oder divergent sey. Von einer Summe einer *divergenten* Reihe kann gar nicht die Rede seyn.

§. 112.

Eine Gleichung von der Form

$$s = t_1 + t_2 + t_3 + t_4 + t_5 + \ldots\ldots$$

setzt immer voraus, dass die Reihe auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens convergirt. Wenn die Glieder derselben sämmtlich Functionen einer gewissen veränderlichen Grösse, z. B. von x sind; so tritt oft der Fall ein, dass die Convergenz nicht für alle, sondern nur für gewisse Werthe von x Statt findet, wo denn natürlich auch nur für diese Werthe von x die obige Gleichung richtig ist oder bestehen kann. In solchen Fällen wollen wir uns künftig der Kürze wegen der folgenden Bezeichnungen bedienen.

Wenn die obige Gleichung für jedes x gilt, welches grösser als a und kleiner als b ist; so soll dies auf folgende Art bezeichnet werden:

$$s = t_1 + t_2 + t_3 + t_4 + t_5 + \ldots\ldots$$
$$\{a < x < b\}$$

Gilt die obige Gleichung dagegen für jedes x, welches grösser als a und kleiner als b ist, und ausserdem auch noch für $x = a$; so soll dies durch

$$s = t_1 + t_2 + t_3 + t_4 + t_5 + \ldots\ldots$$
$$\{a = x < b\}$$

bezeichnet werden.

Gilt die obige Gleichung für jedes x, welches grösser als a und kleiner als b ist, und ausserdem auch noch für $x = b$; so soll dies durch

$$s = t_1 + t_2 + t_3 + t_4 + t_5 + \ldots\ldots$$
$$\{a < x = b\}$$

bezeichnet werden.

Gilt die obige Gleichung für jedes x, welches grösser als a und kleiner als b ist, und ausserdem auch noch für $x = a$ und $x = b$ selbst; so soll dies durch

$$s = t_1 + t_2 + t_3 + t_4 + t_5 + \ldots\ldots$$
$$\{a = x = b\}$$

bezeichnet werden.

Gilt die obige Gleichung für jedes x; so wird gar nichts unter derselben bemerkt.

§. 113.

Aus §. 109., §. 110. und §. 111. ergeben sich nun unmittelbar die beiden folgenden höchst wichtigen Sätze, wobei ϱ immer einen positiven *echten Bruch* bezeichnet.

[illegible]unction $f(x)$ nebst ihren sämmt- [illegible]quotienten von $x=0$ bis $x=x$ [illegible] die Grösse

$$\frac{x^n}{1\ldots n}f^{(n)}(\varrho x)$$

[illegible] n wächst, der Null immer mehr und [illegible]hert, und derselben beliebig nahe gebracht [illegible] kann, wenn man nur n gross genug nimmt; [illegible] immer

$$f(x)=f(0)+\frac{x}{1}f'(0)+\frac{x^2}{1.2}f''(0)+\frac{x^3}{1.2.3}f'''(0)+\ldots\ldots$$

II. Wenn die Function $f(x)$ nebst ihren sämmtlichen Differentialquotienten von $x=x$ bis $x=x+i$ stetig ist, und die Grösse

$$\frac{i^n}{1\ldots n}f^{(n)}(x+\varrho i)$$

sich, wenn n wächst, der Null immer mehr und mehr nähert, und derselben beliebig nahe gebracht werden kann, wenn man nur n gross genug nimmt; so ist immer

$$f(x+i)=f(x)+\frac{i}{1}f'(x)+\frac{i^2}{1.2}f''(x)+\frac{i^3}{1.2.3}f'''(x)+\ldots\ldots$$

Der erste dieser beiden höchst wichtigen Sätze heisst das Maclaurin'sche Theorem, der zweite heisst das Taylor'sche Theorem für Functionen einer veränderlichen Grösse. Beide Sätze sind nach ihren berühmten Erfindern, den Britten Maclaurin und Brook Taylor, benannt.

§. 114.

Lehrsatz. Der Bruch

$$\frac{x^n}{1.2.3\ldots n}$$

nähert sich, was auch x seyn mag, wenn man n von einem bestimmten Werthe an wachsen lässt, der Null fortwährend immer mehr und mehr, und kann derselben auch beliebig nahe gebracht werden, wenn man nur n gross genug nimmt.

Beweis. 1. Wir wollen zunächst x immer als positiv annehmen. Ist dann

$$n>x-1,\ n+1>x;$$

so ist

$$\frac{x}{n+1}<1$$

und folglich

$$\frac{x^n}{1.2.3...n} \cdot \frac{x}{n+1} < \frac{x^n}{1.2.3...n},$$

d. i.

$$\frac{x^{n+1}}{1.2.3..(n+1)} < \frac{x^n}{1.2.3...n}.$$

Hieraus sieht man, dass, wenn man n von einer $x-1$ übersteigenden Grösse an wachsen lässt, der Bruch

$$\frac{x^n}{1.2.3...n}$$

sich fortwährend immer mehr und mehr der Null nähert.

2. Sey nun, indem m und n immer positive ganze Zahlen bezeichnen, $m < n$ und $m > 1$; so ist offenbar

$$m(m-1) < n(m-1).$$

Also ist, wenn man auf beiden Seiten die Producte entwickelt,

$$m^2 - m < mn - n,$$

und folglich

$$m^2 + n < mn + m,$$

also auch

$$n < mn - m^2 + m,$$

d. i.

$$n < m(n-m+1).$$

3. Ist nun zuerst $n = 2\mu$, d. i. n eine gerade Zahl, und $\mu > 1$; so kann man im Vorhergehenden

$$m = 2, 3, 4, 5, \ldots \mu$$

setzen, und erhält also

$$2\mu = 1.\,2\mu,$$
$$2\mu < 2.\,(2\mu - 1),$$
$$2\mu < 3.\,(2\mu - 2),$$
$$2\mu < 4.\,(2\mu - 3),$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$2\mu < (\mu-1)(\mu+2),$$
$$2\mu < \mu(\mu+1).$$

Folglich ist, wenn man auf beiden Seiten multiplicirt,

$$(2\mu)^\mu < 1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4 \ldots 2\mu,$$

für jedes μ, welches grösser als die Einheit ist. Also wird für jedes gerade n, welches >2 ist,

$$n^{\frac{n}{2}} < 1.2.3.4...n.$$

4. Ist ferner $n = 2\mu + 1$, d. i. n eine ungerade Zahl, und $\mu > 1$; so kann man in 1. wieder

$$m = 2, 3, 4, 5, \ldots \mu$$

setzen, und erhält also

$$2\mu + 1 = 1.(2\mu + 1),$$
$$2\mu + 1 < 2.\,2\mu,$$

$$2\mu+1 < 3.(2\mu-1),$$
$$2\mu+1 < 4.(2\mu-2),$$
$$\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot$$
$$2\mu+1 < (\mu-1)(\mu+3),$$
$$2\mu+1 < \mu(\mu+2).$$

Also ist

$$(2\mu+1)^{\mu} < 1.2.3\ldots\mu(\mu+2)(\mu+3)\ldots(2\mu+1),$$

wo $\mu > 1$ seyn muss. Für $\mu = 1$ ist $3^1 = 1.3$. Also ist für $\mu > 0$ offenbar

$$(2\mu+1)^{\mu} \leqq 1.2.3\ldots\mu(\mu+2)\mu+3)\ldots(2\mu+1).$$

Für $\mu > 0$ ist aber, weil

$$(\mu+1)^2 = \mu^2 + 2\mu + 1$$

ist, offenbar

$$2\mu+1 < (\mu+1)^2$$

oder

$$(2\mu+1)^{\frac{1}{2}} < \mu+1.$$

Folglich ist für $\mu > 0$ offenbar

$$(2\mu+1)^{\mu}.(2\mu+1)^{\frac{1}{2}} < 1.2.3\ldots\mu(\mu+1)(\mu+2)(\mu+3)\ldots(2\mu+1),$$

d. i.

$$(2\mu+1)^{\frac{2\mu+1}{2}} < 1.2.3.4\ldots(2\mu+1),$$

oder

$$n^{\frac{n}{2}} < 1.2.3.4\ldots n$$

für jedes ungerade n, welches > 1 ist.

5. Nach 3. und 4. ist folglich für jedes n, welches >2 ist,

$$n^{\frac{n}{2}} < 1.2.3.4\ldots n,$$

und folglich für jedes n, welches >2 ist,

$$\frac{x^n}{1.2.3\ldots n} < \left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right)^n.$$

Nun ist aber klar, dass die Grösse

$$\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right)^n,$$

wenn man nur n gross genug nimmt, der Null beliebig nahe gebracht werden kann. Also kann um so mehr auch

$$\frac{x^n}{1.2.3\ldots n},$$

wenn man nur n gross genug nimmt, der Null beliebig nahe gebracht werden.

6. Durch das Vorhergehende ist der Satz für jedes positive *x bewiesen.* Dann ist aber, wie sogleich in die Augen fallen

wird; kein Zweifel, dass derselbe auch für jedes negative x gilt. Daher ist der Satz durch das Vorhergehende allgemein bewiesen.

§. 115.

Aus §. 113. und §. 114. ergeben sich nun unmittelbar die beiden folgenden Sätze, wo ϱ auch wieder immer einen positiven echten Bruch bezeichnet.

I. Wenn der absolute Werth von $f^{(n)}(\varrho x)$, wie weit man auch n wachsen lassen mag, doch niemals eine bestimmte endliche positive Grösse übersteigt, und die Function $f(x)$ nebst ihren sämmtlichen Differentialquotienten von $x=0$ bis $x=x$ stetig ist; so ist jederzeit

$$f(x)=f(0)+\frac{x}{1}f'(0)+\frac{x^2}{1.2}f''(0)+\frac{x^3}{1.2.3}f'''(0)+\ldots.$$

II. Wenn der absolute Werth von $f^{(n)}(x+\varrho i)$, wie weit man auch n wachsen lassen mag, doch niemals eine bestimmte endliche positive Grösse übersteigt, und die Function $f(x)$ nebst ihren sämmtlichen Differentialquotienten von $x=x$ bis $x=x+i$ stetig ist; so ist jederzeit

$$f(x+i)=f(x)+\frac{i}{1}f'(x)+\frac{i^2}{1.2}f''(x)+\frac{i^3}{1.2.3}f'''(x)+\ldots.$$

§. 116.

Man kann die beiden in §. 113. bewiesenen Sätze noch auf einen dritten ebenfalls sehr bemerkenswerthen Ausdruck bringen, wozu aber die folgende analytische Betrachtung vorauszuschicken ist.

Wenn die Functionen

$$f(x),\ f'(x),\ f''(x),\ f'''(x),\ \ldots f^{(n)}(x)$$

von $x=a$ bis $x=x$ stetig sind, so ist nach §. 110. I.

$$f(x)=f(a)+\frac{x-a}{1}f'(a)+\frac{(x-a)^2}{1.2}f''(a)+\frac{(x-a)^3}{1.2.3}f'''(a)+\ldots$$

$$\ldots+\frac{(x-a)^{n-1}}{1\ldots(n-1)}f^{(n-1)}(a)+\frac{(x-a)^n}{1\ldots n}f^{(n)}(a+\varrho(x-a)),$$

oder, wenn wir der Kürze wegen die Grösse

$$\frac{(x-a)^n}{1\ldots.n}f^{(n)}(a+\varrho(x-a)),$$

indem wir dieselbe als eine Function von a betrachten, durch $\psi(a)$ bezeichnen,

$$f(x)=f(a)+\frac{x-a}{1}f'(a)+\frac{(x-a)^2}{1.2}f''(a)+\frac{(x-a)^3}{1.2.3}f'''(a)+\ldots$$
$$\ldots\ldots+\frac{(x-a)^{n-1}}{1..(n-1)}f^{(n-1)}(a)+\psi(a).$$

Differentiiren wir nun auf beiden Seiten dieser Gleichung nach a; so erhalten wir, weil $f(x)$ von a ganz unabhängig ist,

$$\begin{aligned}0 = & f'(a)\\ & +\frac{x-a}{1}f''(a)-f'(a)\\ & +\frac{(x-a)^2}{1.2}f'''(a)-\frac{x-a}{1}f''(a)\\ & +\frac{(x-a)^3}{1.2.3}f^{IV}(a)-\frac{(x-a)^2}{1.2}f'''(a)\\ & +\frac{(x-a)^4}{1\ldots4}f^{V}(a)-\frac{(x-a)^3}{1.2.3}f^{IV}(a)\\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ & +\frac{(x-a)^{n-1}}{1..(n-1)}f^{(n)}(a)-\frac{(x-a)^{n-2}}{1\ldots(n-2)}f^{(n-1)}(a)\\ & +\psi'(a),\end{aligned}$$

d. i., wenn aufgehoben wird, was sich aufheben lässt,

$$0=\frac{(x-a)^{n-1}}{1\ldots(n-1)}f^{(n)}(a)+\psi'(a),$$

oder

$$\psi'(a)=-\frac{(x-a)^{n-1}}{1\ldots(n-1)}f^{(n)}(a).$$

Nach §. 110. I. ist aber, wenn man ψ für das dortige f schreibt, und $n=1$ setzt:

$$\psi(x)=\psi(a)+(x-a)\psi'(a+\varrho(x-a)).$$

Also ist, weil, wenn man in dem vorher für $\psi'(a)$ gefundenen Ausdrucke $a+\varrho x-a)$ für a setzt,

$$\begin{aligned}\psi'(a+\varrho(x-a)) &= -\frac{(x-a-\varrho(x-a))^{n-1}}{1\ldots(n-1)}f^{(n)}(a+\varrho(x-a))\\ &= -\frac{(1-\varrho)^{n-1}(x-a)^{n-1}}{1\ldots(n-1)}f^{(n)}(a+\varrho(x-a))\end{aligned}$$

ist,

$$\psi(x)=\psi(a)-\frac{(1-\varrho)^{n-1}(x-a)^n}{1\ldots(n-1)}f^{(n)}(a+\varrho(x-a)).$$

Weil aber nach dem Obigen

$$\psi(a)=\frac{(x-a)^n}{1\ldots n}f^{(n)}(a+\varrho(x-a))$$

ist; so ist, wenn man x für a schreibt, offenbar $\psi(x)=0$, und folglich

$$0=\psi(a)-\frac{(1-\varrho)^{n-1}(x-a)^n}{1\ldots(n-1)}f^{(n)}(a+\varrho(x-a)),$$

$$\psi(a)=\frac{(1-\varrho)^{n-1}(x-a)^n}{1\ldots(n-1)}f^{(n)}(a+\varrho(x-a)).$$

Hieraus ergiebt sich folgender Satz:

Wenn die Functionen

$$f(x),\ f'(x),\ f''(x),\ f'''(x),\ \ldots\ldots f^{(n)}(x)$$

von $x=a$ bis $x=x$ sämmtlich stetig sind; so ist

$$f(x)=f(a)+\frac{x-a}{1}f'(a)+\frac{(x-a)^2}{1.2}f''(a)+\frac{(x-a)^3}{1.2.3}f'''(a)+\ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots+\frac{(x-a)^{n-1}}{1\ldots(n-1)}f^{(n-1)}(a)+\frac{(1-\varrho)^{n-1}(x-a)^n}{1\ldots(n-1)}f^{(n)}(a+\varrho(x-a)).$$

Setzt man nun $x-a=i$, $x=a+i$; so erhält man

$$f(a+i)=f(a)+\frac{i}{1}f'(a)+\frac{i^2}{1.2}f''(a)+\frac{i^3}{1.2.3}f'''(a)+\ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots+\frac{i^{n-1}}{1\ldots(n-1)}f^{(n-1)}(a)+\frac{(1-\varrho)^{n-1}i^n}{1\ldots(n-1)}f^{(n)}(a+\varrho i),$$

wo

$$f(x),\ f'(x),\ f''(x),\ f'''(x),\ \ldots f^{(n)}(x)$$

von $x=a$ bis $x=a+i$ stetig seyn müssen.

Schreibt man x für a; so ergiebt sich

$$f(x+i)=f(x)+\frac{i}{1}f'(x)+\frac{i^2}{1.2}f''(x)+\frac{i^3}{1.2.3}f'''(x)+\ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots+\frac{i^{n-1}}{1\ldots(n-1)}f^{(n-1)}(x)+\frac{(1-\varrho)^{n-1}i^n}{1\ldots(n-1)}f^{(n)}(x+\varrho i),$$

wo

$$f(x),\ f'(x),\ f''(x),\ f'''(x),\ \ldots f^{(n)}(x)$$

von $x=x$ bis $x=x+i$ stetig seyn müssen.

Setzt man hierin $x=0$ und schreibt zugleich x für i; so erhält man

$$f(x)=f(0)+\frac{x}{1}f'(0)+\frac{x^2}{1.2}f''(0)+\frac{x^3}{1.2.3}f'''(0)+\ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots+\frac{x^{n-1}}{1\ldots(n-1)}f^{(n-1)}(0)+\frac{(1-\varrho)^{n-1}x^n}{1\ldots(n-1)}f^{(n)}(\varrho x),$$

wo

$$f(x),\ f'(x),\ f''(x),\ f'''(x),\ \ldots f^{(n)}(x)$$

von $x=0$ bis $x=x$ stetig seyn müssen.

Hieraus ergeben sich nun unmittelbar die beiden folgenden Sätze.

I. Wenn die Function $f(x)$ nebst ihren sämmtlichen Differentialquotienten von $x = 0$ bis $x = x$ stetig ist, und die Grösse

$$\frac{(1-\varrho)^{n-1}x^n}{1\ldots(n-1)}f^{(n)}(\varrho x)$$

sich, wenn n wächst, der Null immer mehr und mehr nähert, und derselben beliebig nahe gebracht werden kann, wenn man nur n gross genug nimmt; so ist immer

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1}f'(0) + \frac{x^2}{1.2}f''(0) + \frac{x^3}{1.2.3}f'''(0) + \ldots.$$

II. Wenn die Function $f(x)$ nebst ihren sämmtlichen Differentialquotienten von $x = x$ bis $x = x + i$ stetig ist, und die Grösse

$$\frac{(1-\varrho)^{n-1}i^n}{1\ldots(n-1)}f^{(n)}(x+\varrho i)$$

sich, wenn n wächst, immer mehr und mehr der Null nähert, und derselben beliebig nahe gebracht werden kann, wenn man nur n gross genug nimmt; so ist jederzeit

$$f(x+i) = f(x) + \frac{i}{1}f'(x) + \frac{i^2}{1.2}f''(x) + \frac{i^3}{1.2.3}f'''(x) + \ldots..$$

Sechstes Kapitel.

Entwickelung der Functionen in Reihen mittelst des Maclaurin'schen Satzes.

§. 117.

Zuerst wollen wir die Function

$$f(x) = (1 + x)^a$$

betrachten, bemerken aber, dass in den Fällen, wo a ein Bruch mit geradem Nenner ist, $1 + x$ positiv seyn muss, und dass in diesen Fällen die Potenz $(1 + x)^a$ immer mit positivem Vorzeichen genommen werden soll.

Durch Differentiation erhält man leicht

$$f^{(n)}(x) = a(a-1)\ldots(a-n+1)(1+x)^{a-n},$$

und folglich, weil wir nach §. 94., da $(1 + x)^a$ in den Fällen, wo a ein Bruch mit geradem Nenner ist, positiv genommen werden soll, in diesen Fällen auch $(1 + x)^{a-n}$ positiv nehmen müssen,

$$f^{(n)}(0) = a(a-1)\ldots(a-n+1);$$

also

$$\frac{f^{(n)}(0)}{1.2.3\ldots n} = \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{1.2.3\ldots n},$$

wozu noch zu nehmen ist, dass $f(0) = 1$ ist.

Ferner ist wenn wir der Kürze wegen die Grösse

$$\frac{(1-\varrho)^{n-1}x^n}{1\ldots(n-1)} f^{(n)}(\varrho x),$$

wobei §. 116. I. zu vergleichen ist, durch R_n bezeichnen,

$$R_n = \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{1\ldots(n-1)} x^n (1-\varrho)^{n-1}(1+\varrho x)^{\alpha-n}$$

oder

$$R_n = \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{1\ldots(n-1)} x^n (1+\varrho x)^{\alpha-1} \left(\frac{1-\varrho}{1+\varrho x}\right)^{n-1}.$$

Nehmen wir nun an, dass

$$-1 < x < +1,$$

d. h. dass der absolute Werth von x kleiner als die Einheit ist; so ist der Bruch

$$\frac{1-\varrho}{1+\varrho x},$$

und folglich auch die Potenz

$$\left(\frac{1-\varrho}{1+\varrho x}\right)^{n-1}$$

offenbar stets positiv und nie grösser als die Einheit.

Um ferner auch den Werth, bis zu welchem die Grösse $(1+\varrho x)^{\alpha-1}$ höchstens steigen kann, sicher zu beurtheilen, wollen wir folgende Fälle unterscheiden.

1. Wenn x positiv und auch $\alpha-1$ positiv ist; so erreicht $(1+\varrho x)^{\alpha-1}$ seinen grössten Werth, wenn ϱ seinen grössten Werth erreicht. Da nun ϱ immer kleiner als die Einheit ist; so ist klar, dass in diesem Falle $(1+\varrho x)^{\alpha-1}$ immer kleiner als $(1+x)^{\alpha-1}$ ist.

Wenn ferner x positiv und $\alpha-1$ negativ ist; so erreicht

$$(1+\varrho x)^{\alpha-1} = \frac{1}{(1+\varrho x)^{1-\alpha}}$$

seinen grössten Werth, wenn ϱ seinen kleinsten Werth erreicht. Da nun ϱ immer positiv ist; so ist klar, dass in diesem Falle $(1+\varrho x)^{\alpha-1}$ nie grösser als die Einheit werden kann.

2. Wenn x negativ und $\alpha-1$ positiv ist; so erreicht $(1+\varrho x)^{\alpha-1}$ seinen grössten Werth, wenn ϱ seinen kleinsten Werth erreicht. Da nun ϱ immer positiv ist; so ist klar, dass in diesem Falle $(1+\varrho x)^{\alpha-1}$ nie grösser als die Einheit werden kann.

Wenn ferner x negativ und auch $\alpha-1$ negativ ist; so erreicht

$$(1+\varrho x)^{\alpha-1} = \frac{1}{(1+\varrho x)^{1-\alpha}}$$

seinen grössten Werth, wenn ϱ seinen grössten Werth erreicht. Da nun ϱ immer kleiner als die Einheit ist; so ist klar, dass in diesem Falle $(1+\varrho x)^{\alpha-1}$ immer kleiner als

$$\frac{1}{(1+x)^{1-\alpha}} = (1+x)^{\alpha-1}$$

ist.

Hieraus sieht man, dass die Grösse $(1+\varrho x)^{\alpha-1}$ in keinem Falle eine bestimmte endliche Grösse, welche entweder die Potenz $(1+x)^{\alpha-1}$ oder die Einheit ist, übersteigen kann.

Da nun nach dem Vorhergehenden die Grösse

$$\left(\frac{1-\varrho}{1+\varrho x}\right)^{n-1}$$

nie grösser als die Einheit ist; so ist klar, dass auch die Grösse

$$(1+\varrho x)^{\alpha-1}\left(\frac{1-\varrho}{1+\varrho x}\right)^{n-1}$$

nie eine bestimmte endliche Grösse, welche entweder die Potenz $(1+x)^{\alpha-1}$ oder die Einheit ist, übersteigt.

Ferner setze man jetzt der Kürze wegen

$$t_n = \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{1\ldots(n-1)}x^n;$$

so ist, wie man leicht findet,

$$t_{n+1} = -t_n \cdot \left(1-\frac{\alpha}{n}\right)x,$$

$$t_{n+2} = -t_{n+1} \cdot \left(1-\frac{\alpha}{n+1}\right)x,$$

$$t_{n+3} = -t_{n+2} \cdot \left(1-\frac{\alpha}{n+2}\right)x,$$

$$t_{n+4} = -t_{n+3} \cdot \left(1-\frac{\alpha}{n+3}\right)x,$$

u. s. w.

und folglich

$$t_{n+1} = -t_n \cdot \left(1-\frac{\alpha}{n}\right)x,$$

$$t_{n+2} = t_n \cdot \left(1-\frac{\alpha}{n}\right)\left(1-\frac{\alpha}{n+1}\right)x^2,$$

$$t_{n+3} = -t_n \cdot \left(1-\frac{\alpha}{n}\right)\left(1-\frac{\alpha}{n+1}\right)\left(1-\frac{\alpha}{n+2}\right)x^3,$$

$$t_{n+4} = t_n \cdot \left(1-\frac{\alpha}{n}\right)\left(1-\frac{\alpha}{n+1}\right)\left(1-\frac{\alpha}{n+2}\right)\left(1-\frac{\alpha}{n+3}\right)x^4,$$

u. s. w.

Die absoluten Werthe von x und von

$$t_n,\ t_{n+1},\ t_{n+2},\ t_{n+3},\ t_{n+4},\ \ldots\ldots$$

wollen wir respective durch ξ und durch

$$\tau_n,\ \tau_{n+1},\ \tau_{n+2},\ \tau_{n+3},\ \tau_{n+4},\ \ldots\ldots$$

bezeichnen, und unterscheiden nun die beiden folgenden Fälle.

1. Wenn α positiv ist, so wollen wir uns n so gross genommen denken, dass $n > \alpha$ ist. Dann ist

$$\tau_{n+1} = \tau_n.\left(1-\frac{\alpha}{n}\right)\xi,$$

$$\tau_{n+2} = \tau_n.\left(1-\frac{\alpha}{n}\right)\left(1-\frac{\alpha}{n+1}\right)\xi^2,$$

$$\tau_{n+3} = \tau_n.\left(1-\frac{\alpha}{n}\right)\left(1-\frac{\alpha}{n+1}\right)\left(1-\frac{\alpha}{n+2}\right)\xi^3,$$

$$\tau_{n+4} = \tau_n.\left(1-\frac{\alpha}{n}\right)\left(1-\frac{\alpha}{n+1}\right)\left(1-\frac{\alpha}{n+2}\right)\left(1-\frac{\alpha}{n+3}\right)\xi^4,$$

u. s. w.

und folglich offenbar

$$\tau_{n+1} < \tau_n\,\xi,$$

$$\tau_{n+2} < \tau_n\,\xi^2,$$

$$\tau_{n+3} < \tau_n\,\xi^3,$$

$$\tau_{n+4} < \tau_n\,\xi^4,$$

u. s. w.

Also nähern sich, weil nach der Voraussetzung $\xi < 1$ ist, die Grössen

$$\tau_n,\ \tau_{n+1},\ \tau_{n+2},\ \tau_{n+3},\ \tau_{n+4},\ \ldots\ldots,$$

wenn nur erst n grösser als α ist, offenbar immer mehr und mehr, und auch, wenn man sich nur weit genug vom Anfange der vorstehenden Reihe entfernt, bis zu jedem beliebigen Grade der Null.

2. In dem Falle, wo α negativ ist, wollen wir grösserer Deutlichkeit wegen $-\alpha$ für α, und folglich

$$\tau_{n+1} = \tau_n.\left(1+\frac{\alpha}{n}\right)\xi,$$

$$\tau_{n+2} = \tau_n.\left(1+\frac{\alpha}{n}\right)\left(1+\frac{\alpha}{n+1}\right)\xi^2,$$

$$\tau_{n+3} = \tau_n.\left(1+\frac{\alpha}{n}\right)\left(1+\frac{\alpha}{n+1}\right)\left(1+\frac{\alpha}{n+2}\right)\xi^3,$$

$$\tau_{n+4} = \tau_n.\left(1+\frac{\alpha}{n}\right)\left(1+\frac{\alpha}{n+1}\right)\left(1+\frac{\alpha}{n+2}\right)\left(1+\frac{\alpha}{n+3}\right)\xi^4,$$

u. s. w.

setzen. In diesem Falle ist offenbar

$$\tau_{n+1} = \tau_n \cdot \left(1 + \frac{\alpha}{n}\right) \xi,$$

$$\tau_{n+2} < \tau_n \cdot \left\{\left(1 + \frac{\alpha}{n}\right) \xi \right\}^2,$$

$$\tau_{n+3} < \tau_n \cdot \left\{\left(1 + \frac{\alpha}{n}\right) \xi \right\}^3,$$

$$\tau_{n+4} < \tau_n \cdot \left\{\left(1 + \frac{\alpha}{n}\right) \xi \right\}^4,$$

u. s. w.

Nun kann man aber n immer so gross annehmen, dass

$$\left(1 + \frac{\alpha}{n}\right) \xi < 1$$

ist, wie sich auf folgende Art leicht zeigen lässt.

Dies wird nämlich der Fall seyn, wenn

$$\xi + \frac{\alpha}{n} \xi < 1$$

ist, und dies wird der Fall seyn, wenn n so gross genommen wird, dass

$$\frac{\alpha}{n} \xi < 1 - \xi,$$

d. h. dass

$$n > \frac{\alpha \xi}{1 - \xi}$$

ist, welches offenbar immer möglich ist.

Nimmt man also nur n dieser Bedingung gemäss; so ist

$$\left(1 + \frac{\alpha}{n}\right) \xi < 1,$$

und die Grössen

$$\tau_n, \tau_{n+1}, \tau_{n+2}, \tau_{n+3}, \tau_{n+4}, \ldots.$$

nähern sich dann nach dem Obigen offenbar immer mehr und mehr, und auch, wenn man sich nur weit genug vom Anfange der vorstehenden Reihe entfernt, bis zu jedem beliebigen Grade der Null.

Man sieht also jetzt, dass man in jedem Falle n so gross annehmen kann, dass sich die Grössen

$$\tau_n, \tau_{n+1}, \tau_{n+2}, \tau_{n+3}, \tau_{n+4}, \ldots.$$

immer mehr und mehr, und auch, wenn man sich nur weit genug vom Anfange dieser Reihe entfernt, bis zu jedem beliebigen Grade der Null nähern. Nimmt man hierzu nun noch, dass nach dem Obigen die Grösse

$$(1+\varrho x)^{\alpha-1} \left(\frac{1-\varrho}{1+\varrho x}\right)^{n-1}$$

nie eine gewisse endliche bestimmte Grösse, welche entweder die Potenz $(1+x)^{\alpha-1}$ oder die Einheit ist, übersteigt; so ist klar, dass man die Grösse

$$t_n (1+\varrho x)^{\alpha-1}\left(\frac{1-\varrho}{1+\varrho x}\right)^{n-1},$$

d. i.

$$\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{1\ldots(n-1)} x^n (1+\varrho x)^{\alpha-1}\left(\frac{1-\varrho}{1+\varrho x}\right)^{n-1}$$

oder

$$R_n = \frac{(1-\varrho)^{n-1} x^n}{1\ldots(n-1)} f^{(n)}(\varrho x),$$

unter der immer Statt findenden Voraussetzung, dass

$$-1 < x < +1$$

ist, jederzeit der Null beliebig nahe bringen kann, wenn man nur n gross genug annimmt. Daher ist nach §. 116. I.

$$(1+x)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{1.2}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{1.2.3}x^3 + \ldots.$$

$$\{-1 < x < +1\}$$

oder mittelst der aus §. 14. IV. bekannten Bezeichnung der Binomial-Coefficienten

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3 + \ldots + \alpha_k x^k + \ldots.$$

$$\{-1 < x < +1\}.$$

Soll man aus einer beliebigen positiven ganzen Zahl K, aus der sich die $n$te Wurzel nicht genau ausziehen lässt, die Wurzel dieses Grades näherungsweise ausziehen; so kann dies mittelst der vorhergehenden Reihe auf folgende Art geschehen. Es werden sich immer zwei positive ganze Zahlen a und $a+1$ von solcher Beschaffenheit angeben lassen, dass $a^n < K < (a+1)^n$ ist. Ist nun zuerst $K - a^n < a^n$; so setze man $K = a^n + b$, wo also $b = K - a^n$ und folglich $b < a^n$ ist. Dann ist

$$K^{\frac{1}{n}} = (a^n + b)^{\frac{1}{n}} = a\left(1 + \frac{b}{a^n}\right)^{\frac{1}{n}},$$

und man kann nun, weil $\frac{b}{a^n} < 1$ ist, $\left(1+\frac{b}{a^n}\right)^{\frac{1}{n}}$ nach dem Vorhergehenden in eine convergirende Reihe entwickeln. Ist aber $K - a^n \overline{\overline{>}}\, a^n$; so muss man $K = (a+1)^n - c$ setzen, wo nun $c = (a+1)^n - K$ und folglich offenbar $c < (a+1)^n$ ist. Dann ist

$$K^{\frac{1}{n}} = \{(a+1)^n - c\}^{\frac{1}{n}} = (a+1)\left\{1 - \frac{c}{(a+1)^n}\right\}^{\frac{1}{n}},$$

und man kann nun wieder, weil $\frac{c}{(a+1)^n} < 1$ ist, die aus dem Vorhergehenden bekannte Reihe anwenden. Soll man z. B. aus 6 die Quadratwurzel ausziehen; so wird man $6 = 4 + 2$, und folglich $\sqrt{6} = 2(1 + \frac{1}{2})^{\frac{1}{2}}$ setzen. Soll dagegen aus 59 die Cubikwurzel ausgezogen werden; so darf man nicht $59 = 27 + 32$ setzen, sondern es muss $59 = 64 - 5$, und folglich $\sqrt[3]{59} = 4(1 - \frac{5}{64})^{\frac{1}{3}}$ gesetzt werden.

§. 118.

Wir wollen uns nun ferner mit der Entwickelung der wichtigen Function

$$f(x) = a^x,$$

wo a eine positive Grösse bezeichnet, in eine Reihe beschäftigen.

Nach §. 55. ist

$$f'(x) = a^x \varphi(a),$$

wo $\varphi(a)$ die Gränze bezeichnet, welcher die Grösse

$$\frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x}$$

sich nähert, wenn Δx sich der Null nähert; und dass es eine solche Gränze, der auch die in Rede stehende Grösse beliebig nahe gebracht werden kann, wenn man nur Δx nahe genug bei Null annimmt, in jedem Falle wirklich giebt, ist a. a. O. umständlich gezeigt worden. Entwickeln wir nun die höhern Differentialquotienten unserer gegebenen Function auf bekannte Weise; so erhalten wir sehr leicht in völliger Allgemeinheit

$$f^{(n)}(x) = a^x \{\varphi(a)\}^n$$

und folglich

$$f^{(n)}(0) = \{\varphi(a)\}^n$$

und

$$f^{(n)}(\varrho x) = a^{\varrho x} \{\varphi(a)\}^n,$$

wozu noch zu nehmen ist, dass $f(0) = 1$ ist.

Also ist nach §. 109.

$$a^x = 1 + \frac{x\varphi(a)}{1} + \frac{\{x\varphi(a)\}^2}{1.2} + \frac{\{x\varphi(a)\}^3}{1.2.3} + \ldots.$$
$$\ldots + \frac{\{x\varphi(a)\}^{n-1}}{1\ldots(n-1)} + \frac{\{x\varphi(a)\}^n}{1\ldots n} a^{\varrho x}.$$

Nach §. 114. nähert sich, was auch x und $\varphi(a)$ seyn mögen,

$$\frac{\{x\varphi(a)\}^n}{1\ldots n}$$

der Null, wenn n wächst, und kann derselben jederzeit beliebig nahe gebracht werden, wenn man nur n gross genug nimmt. Nun erhellet aber, weil ϱ immer positiv und kleiner als die Einheit ist, dass die Grösse $a^{\varrho x}$, x mag positiv oder negativ

seyn, nie einen gewissen bestimmten endlichen Werth, welcher offenbar entweder a^x oder die Einheit ist, übersteigen kann. Daher nähert sich auch die Grösse

$$\frac{\{x\varphi(a)\}^n}{1 \ldots n} a^{\varrho x}$$

der Null, wenn n wächst, und kann derselben beliebig nahe gebracht werden, wenn man nur n gross genug nimmt. Folglich ist, was auch x und a seyn mögen, wenn nur, wie hier immer vorausgesetzt wird, a positiv ist, jederzeit

$$a^x = 1 + \frac{x\varphi(a)}{1} + \frac{\{x\varphi(a)\}^2}{1.2} + \frac{\{x\varphi(a)\}^3}{1.2.3} + \ldots\ldots$$

Setzt man nun, was jederzeit verstattet ist,

$$x = \frac{1}{\varphi(a)};$$

so erhält man

$$a^{\frac{1}{\varphi(a)}} = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{1.2.3.4} + \ldots\ldots,$$

woraus, weil die Grösse

$$a^{\frac{1}{\varphi(a)}},$$

wie aus §. 55. hervorgeht, eine völlig bestimmte endliche Grösse ist, zugleich erhellet, dass die Reihe auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens convergent ist. Bezeichnen wir nun die Summe dieser convergenten Reihe durch E; so ist für jedes positive a

$$a^{\frac{1}{\varphi(a)}} = E.$$

Da aber E offenbar positiv ist; so kann man in dieser Gleichung auch E für a setzen, und erhält also

$$E^{\frac{1}{\varphi(E)}} = E,$$

woraus sich auf der Stelle

$$\frac{1}{\varphi(E)} = 1$$

oder

$$\varphi(E) = 1$$

ergiebt.

Hieraus sieht man, dass die durch E bezeichnete Summe der convergirenden Reihe

$$1, \frac{1}{1}, \frac{1}{1.2}, \frac{1}{1.2.3}, \frac{1}{1.2.3.4}, \ldots\ldots$$

der Werth von a ist, für welchen $\varphi(a) = 1$ ist, so dass es also, welches in §. 56. noch fraglich blieb, einen solchen Werth von a wirklich giebt. In §. 56. wurde dieser Werth von a durch e bezeichnet, und es ist also $e = E$ oder

$$e = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{1.2.3.4} + \ldots..$$

Dass man mittelst der Reihe auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens den numerischen Werth von e mit jedem beliebigen Grade der Genauigkeit berechnen kann, versteht sich, weil die in Rede stehende Reihe convergirt, von selbst. Betrachtet man die Summe der n ersten Glieder dieser Reihe, nämlich die Grösse

$$1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{1.2.3.4} + \ldots + \frac{1}{1\ldots(n-1)}$$

als einen Näherungswerth von e, und setzt

$$e = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \ldots + \frac{1}{1\ldots(n-1)} + F;$$

so ist

$$F = \frac{1}{1\ldots n} + \frac{1}{1\ldots(n+1)} + \frac{1}{1\ldots(n+2)} + \frac{1}{1\ldots(n+3)} + \ldots.$$

der Fehler, welchen man bei dieser Näherung begeht.

Die Grösse dieses Fehlers lässt sich auf folgende Art beurtheilen. Setzt man

$$\frac{1}{1\ldots n} = t;$$

so ist offenbar

$$F < t\left\{1 + \frac{1}{n+1} + \left(\frac{1}{n+1}\right)^2 + \left(\frac{1}{n+1}\right)^3 + \left(\frac{1}{n+1}\right)^4 + \ldots\right\}.$$

Weil nun offenbar

$$\frac{1}{n+1} < 1$$

ist; so ist nach §. 117.

$$\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^{-1} = 1 + \frac{1}{n+1} + \left(\frac{1}{n+1}\right)^2 + \left(\frac{1}{n+1}\right)^3 + \left(\frac{1}{n+1}\right)^4 + \ldots$$

und folglich

$$F < t.\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^{-1},$$

d. i.

$$F < t.\frac{n+1}{n}$$

oder

$$F < \frac{1}{1.2.3\ldots n}.\frac{n+1}{n}.$$

Setzt man z. B.

$$e = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{1.2.3.4} + \ldots + \frac{1}{1\ldots 10};$$

so ist der Fehler

$$F < \frac{1}{1\ldots.11}.\frac{12}{11},$$

d. i.

$$F < \frac{1}{36590400}.$$

Man sieht hieraus, dass der Fehler bald sehr klein wird, und dass also die obige Reihe zur Berechnung von e sehr bequem ist. Bis zur drei und zwanzigsten Decimalstelle genau ist

$$e = 2{,}71828182845904523536028.$$

In §. 57. ist schon die Gleichung

$$\varphi(a) = la$$

bewiesen worden. Also ist nach dem Obigen

$$a^x = 1 + \frac{xla}{1} + \frac{(xla)^2}{1.2} + \frac{(xla)^3}{1.2.3} + \frac{(xla)^4}{1\ldots4} + \ldots,$$

und, wenn man $x = 1$ setzt,

$$a = 1 + \frac{la}{1} + \frac{(la)^2}{1.2} + \frac{(la)^3}{1.2.3} + \frac{(la)^4}{1.2.3.4} + \ldots.$$

Setzt man $a = e$, so ist $la = le = 1$, und folglich

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^4}{1.2.3.4} + \ldots.$$

§. 119.

Sey ferner die Function

$$f(x) = l(1 + x)$$

gegeben.

Setzt man der Kürze wegen

$$f(x) = y, \quad 1 + x = z;$$

so erhält man durch Differentiation leicht

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial l z}{\partial z}.\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{z},$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = -\frac{1}{z^2}.\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{1}{z^2},$$

$$\frac{\partial^3 y}{\partial x^3} = \frac{1.2}{z^3}.\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1.2}{z^3},$$

$$\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = -\frac{1.2.3}{z^4}.\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{1.2.3}{z^4},$$

$$\frac{\partial^5 y}{\partial x^5} = \frac{1.2.3.4}{z^5}.\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1.2.3.4}{z^5},$$

u. s. w.

Also ist allgemein

$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}.\frac{1.2.3\ldots(n-1)}{z^n},$$

oder

$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}.\frac{1.2.3\ldots(n-1)}{(1+x)^n},$$

und folglich

$$f^{(n)}(0) = (-1)^{n-1}.1.2.3\ldots(n-1),$$

wozu noch zu nehmen ist, dass offenbar

$$f(0) = 0, \; f'(0) = 1$$

ist.

Ferner ist

$$f^{(n)}(\varrho x) = (-1)^{n-1}.\frac{1.2.3\ldots(n-1)}{(1+\varrho x)^n},$$

und folglich

$$\frac{(1-\varrho)^{n-1}x^n}{1\ldots(n-1)}f^{(n)}(\varrho x) = (-1)^{n-1}.\frac{(1-\varrho)^{n-1}x^n}{(1+\varrho x)^n},$$

oder

$$\frac{(1-\varrho)^{n-1}x^n}{1\ldots(n-1)}f^{(n)}(\varrho x) = \frac{(-1)^{n-1}}{1-\varrho}.\left\{\frac{(1-\varrho)x}{1+\varrho x}\right\}^n.$$

Wenn der absolute Werth von x kleiner als die Einheit ist; so ist die Grösse

$$\frac{1-\varrho}{1+\varrho x},$$

so wie auch die Grösse

$$\frac{\varrho(1+x)}{1+\varrho x}$$

stets positiv. Weil nun

$$\frac{1-\varrho}{1+\varrho x} = 1 - \frac{\varrho(1+x)}{1+\varrho x}$$

ist; so ist, wenn der absolute Werth von x kleiner als die Einheit ist, die Grösse

$$\frac{1-\varrho}{1+\varrho x}$$

nie grösser als die Einheit. Die Potenz x^n nähert sich unter derselben Voraussetzung rücksichtlich des absoluten Werthes von x, wenn n wächst, immer mehr und mehr der Null, und kann derselben beliebig nahe gebracht werden, wenn man nur n gross genug nimmt. Also nähert sich offenbar auch

$$\left\{\frac{(1-\varrho)x}{1+\varrho x}\right\}^n = \left(\frac{1-\varrho}{1+\varrho x}\right)^n.x^n,$$

wenn n wächst, der Null, und kann derselben beliebig nahe gebracht werden, wenn man nur n gross genug nimmt. Der Bruch

$$\frac{1}{1-\varrho}$$

kann aber, weil ϱ bekanntlich immer kleiner als die Einheit ist, offenbar eine gewisse bestimmte, endliche Grösse niemals übersteigen. Daher nähert sich auch

$$\frac{(-1)^{n-1}}{1-\varrho}.\left\{\frac{(1-\varrho)x}{1+\varrho x}\right\}^n$$

d. i.

$$\frac{(1-\varrho)^{n-1}x^n}{1\ldots(n-1)}f^{(n)}(\varrho x),$$

wenn n wächst, der Null, und kann derselben beliebig nahe gebracht werden, wenn man nur n gross genug nimmt, immer unter der Voraussetzung, dass der absolute Werth von x kleiner als die Einheit ist.

Folglich ist nach §. 116. I.

$$l(1+x) = x - \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{3}x^3 - \tfrac{1}{4}x^4 + \tfrac{1}{5}x^5 - \ldots.$$
$$\{-1 < x < +1\}$$

Auf folgende Art kann aber gezeigt werden, dass diese Gleichung auch noch für $x = +1$ gilt. Es ist nämlich

$$\frac{x^n}{1\ldots n}f^{(n)}(\varrho x) = (-1)^{n-1}\cdot\frac{1}{n}\left\{\frac{x}{1+\varrho x}\right\}^n,$$

und folglich für $x = +1$

$$\frac{1}{1\ldots n}f^{(n)}(\varrho) = (-1)^{n-1}\cdot\frac{1}{n}\left\{\frac{1}{1+\varrho}\right\}^n.$$

Da nun der Bruch

$$\frac{1}{1+\varrho},$$

und folglich auch

$$\left\{\frac{1}{1+\varrho}\right\}^n$$

niemals grösser als die Einheit ist, der Bruch $\frac{1}{n}$ sich aber, wenn n wächst, immer mehr und mehr der Null nähert, und derselben beliebig nahe gebracht werden kann, wenn man nur n gross genug nimmt; so ist klar, dass sich auch

$$\frac{1}{1\ldots n}f^{(n)}(\varrho),$$

wenn n wächst, der Null nähert, und derselben beliebig nahe gebracht werden kann, wenn man nur n gross genug nimmt. Folglich ist nach §. 113. I.

$$l(1+1) = l2 = 1 - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{5} - \ldots.$$

und daher, wie sich nun hieraus in Verbindung mit dem Obigen ergiebt,

$$l(1+x) = x - \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{3}x^3 - \tfrac{1}{4}x^4 + \tfrac{1}{5}x^5 - \ldots.$$
$$\{-1 < x = +1\}$$

Nach §. 58. ist

$$\log(1+x) = Ml(1+x),$$

wo die durch *log* bezeichneten Logarithmen sich auf die Basis b beziehen. Nach demselben Paragraphen ist aber auch

$$M = \frac{1}{lb}.$$

Also ist nach dem Vorhergehenden

$$log(1+x) = \frac{1}{lb}(x - \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{3}x^3 - \tfrac{1}{4}x^4 + \tfrac{1}{5}x^5 - \ldots .)$$

$$\{-1 < x \equiv +1\}$$

§. 120.

Nach §. 119. ist, wenn der absolute Werth von x kleiner als die Einheit ist,

$$l(1+x) = \quad x - \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{3}x^3 - \tfrac{1}{4}x^4 + \tfrac{1}{5}x^5 - \ldots .,$$

$$l(1-x) = -x - \tfrac{1}{2}x^2 - \tfrac{1}{3}x^3 - \tfrac{1}{4}x^4 - \tfrac{1}{5}x^5 - \ldots .,$$

Also ist

$$l\frac{1+x}{1-x} = 2(x + \tfrac{1}{3}x^3 + \tfrac{1}{5}x^5 + \tfrac{1}{7}x^7 + \tfrac{1}{9}x^9 + \ldots)$$

$$\{-1 < x < +1\}$$

Setzt man jetzt

$$x = \frac{z-1}{z+1};$$

so ist für jedes positive z, welches nur nicht $= 0$ ist, offenbar

$$-1 < x < +1.$$

Also ist für jedes positive z, welches nicht $= 0$ ist, nach dem Vorhergehenden

$$l\frac{1+\frac{z-1}{z+1}}{1-\frac{z-1}{z+1}} = 2\left\{\frac{z-1}{z+1} + \tfrac{1}{3}\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^3 + \tfrac{1}{5}\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^5 + \ldots\right\},$$

d. i.

$$lz = 2\left\{\frac{z-1}{z+1} + \tfrac{1}{3}\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^3 + \tfrac{1}{5}\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^5 + \ldots\right\}$$

$$\{0 < z < \infty\}$$

Setzt man z^2 für z; so erhält man

$$lz = \frac{z^2-1}{z^2+1} + \tfrac{1}{3}\left(\frac{z^2-1}{z^2+1}\right)^3 + \tfrac{1}{5}\left(\frac{z^2-1}{z^2+1}\right)^5 + \ldots$$

$$\{0 < z < \infty\}$$

Da die Basis b der durch log bezeichneten Logarithmen ihrer Natur nach grösser als Null seyn muss, und

$$M = \frac{1}{lb}$$

ist; so ergiebt sich aus dem Vorhergehenden der folgende Ausdruck für den Modulus des Systems, dessen Basis b ist:

$$M = \frac{1}{2\left\{\frac{b-1}{b+1} + \tfrac{1}{3}\left(\frac{b-1}{b+1}\right)^3 + \tfrac{1}{5}\left(\frac{b-1}{b+1}\right)^5 + \ldots\right\}}$$

oder

$$M = \frac{1}{\frac{b^2-1}{b^2+1} + \frac{1}{3}\left(\frac{b^2-1}{b^2+1}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{b^2-1}{b^2+1}\right)^5 + \ldots .}$$

Für den Modulus des briggischen Systems erhält man aus diesen Formeln

$$M = \frac{1}{2\left\{\frac{9}{11} + \frac{1}{3}\cdot\left(\frac{9}{11}\right)^3 + \frac{1}{5}\cdot\left(\frac{9}{11}\right)^5 + \frac{1}{7}\cdot\left(\frac{9}{11}\right)^7 + \ldots\right\}}$$

$$= \frac{1}{\frac{99}{101} + \frac{1}{3}\cdot\left(\frac{99}{101}\right)^3 + \frac{1}{5}\cdot\left(\frac{99}{101}\right)^5 + \frac{1}{7}\cdot\left(\frac{99}{101}\right)^7 + \ldots}$$

$$= 0{,}4342944819032518276511289 .$$

Noch eine andere Art, den Modulus zu berechnen, ist folgende. Bezeichnet ω eine beliebige positive ganze Zahl; so kann man, wenn man nur ω gross genug annimmt, den Bruch $\frac{1}{\omega}$ der Null, die Potenz $b^{\frac{1}{\omega}} = \sqrt[\omega]{b}$ folglich der Einheit beliebig nahe bringen. Setzen wir nun voraus, dass ω mindestens so gross angenommen worden ist, dass $\sqrt[\omega]{b} - 1 < 1$ ist; so ist nach §. 119.

$$log\sqrt[\omega]{b} = M\{\sqrt[\omega]{b} - 1 - \tfrac{1}{2}(\sqrt[\omega]{b} - 1)^2 + \tfrac{1}{3}(\sqrt[\omega]{b} - 1)^3 - \ldots .\},$$

und folglich, weil $log\sqrt[\omega]{b} = \frac{1}{\omega}\ logb = \frac{1}{\omega}$ ist,

$$\frac{1}{M} = \omega\left\{\sqrt[\omega]{b} - 1 - \tfrac{1}{2}(\sqrt[\omega]{b} - 1)^2 + \tfrac{1}{3}(\sqrt[\omega]{b} - 1)^3 - \ldots .\right\},$$

wo die eingeklammerte Reihe, da nach dem Obigen $\sqrt[\omega]{b}$ der Einheit beliebig nahe gebracht werden kann, mit jedem beliebigen Grade convergent gemacht werden kann. Hat man aber $\frac{1}{M}$, so hat man natürlich auch M.

Setzt man

$$x = \frac{z}{2n+z}$$

und nimmt an, dass z und n beide positiv sind, und wenigstens n nicht $= 0$ ist; so ist x offenbar positiv und kleiner als die Einheit. Also ist, weil

$$\frac{1+x}{1-x} = \frac{n+z}{n}$$

ist, nach dem Obigen

$$l\frac{n+z}{n} = 2\left\{\frac{z}{2n+z} + \frac{1}{3}\left(\frac{z}{2n+z}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{z}{2n+z}\right)^5 + \ldots .\right\}$$

oder

$$l(n+z) = ln + 2\left\{\frac{z}{2n+z} + \tfrac{1}{3}\left(\frac{z}{2n+z}\right)^3 + \tfrac{1}{5}\left(\frac{z}{2n+z}\right)^5 + \ldots\right\},$$

immer unter der Voraussetzung, dass z und n beide positiv sind, und n nicht $= 0$ ist. Mittelst dieser Reihe lässt sich vorzüglich dann, wenn n gegen z gross ist, $l(n+z)$ sehr leicht berechnen, wenn man ln schon kennt. So ist z. B. für $n = 100$ und $z = 1$

$$l101 = l100 + 2\left\{\frac{1}{201} + \tfrac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{201}\right)^3 + \tfrac{1}{5}\cdot\left(\frac{1}{201}\right)^5 + \ldots\right\},$$

wo die eingeklammerte Reihe auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens sehr schnell convergirt.

§. 121.

Die gegebene in eine Reihe zu entwickelnde Function sey jetzt

$$f(x) = \sin x.$$

Nach §. 98. ist

$$f^{(n)}(x) = \sin(x + \tfrac{1}{2}n\pi);$$

also

$$f^{(n)}(0) = \sin\tfrac{1}{2}n\pi$$

und

$$f^{(n)}(\varrho x) = \sin(\tfrac{1}{2}n\pi + \varrho x).$$

Hieraus erhellet, dass der absolute Werth von $f^{(n)}(\varrho x)$ die Einheit niemals übersteigen kann. Weil nun

$$\begin{aligned}
f(0) &= 0,\\
f'(0) &= \sin\tfrac{1}{2}\pi = +1,\\
f''(0) &= \sin\pi = 0,\\
f'''(0) &= \sin\tfrac{3}{2}\pi = -1,\\
f^{\mathrm{IV}}(0) &= \sin 2\pi = 0,\\
f^{\mathrm{V}}(0) &= \sin\tfrac{5}{2}\pi = +1,\\
f^{\mathrm{VI}}(0) &= \sin 3\pi = 0,\\
f^{\mathrm{VII}}(0) &= \sin\tfrac{7}{2}\pi = -1,
\end{aligned}$$

u. s. w.

ist; so ergiebt sich aus §. 115. I. unmittelbar die für jedes x geltende, höchst merkwürdige und wichtige Reihe

$$\sin x = x - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1\ldots5} - \frac{x^7}{1\ldots7} + \frac{x^9}{1\ldots9} - \ldots.$$

§. 122.

In eine ähnliche nicht minder merkwürdige Reihe lässt sich auch die Function

$$f(x) = \cos x$$

entwickeln.

Nach §. 98. ist

$$f^{(n)}(x) = \cos(x + \tfrac{1}{2}n\pi);$$

also

$$f^{(n)}(0) = \cos\tfrac{1}{2}n\pi$$

und

$$f^{(n)}(\varrho x) = \cos(\tfrac{1}{2}n\pi + \varrho x).$$

Hieraus sieht man, dass der absolute Werth von $f^{(n)}(\varrho x)$ die Einheit nie übersteigen kann. Weil nun

$$\begin{aligned}
f(0) &= 1,\\
f'(0) &= \cos\tfrac{1}{2}\pi = 0,\\
f''(0) &= \cos\pi = -1,\\
f'''(0) &= \cos\tfrac{3}{2}\pi = 0,\\
f^{\text{IV}}(0) &= \cos 2\pi = +1,\\
f^{\text{V}}(0) &= \cos\tfrac{5}{2}\pi = 0,\\
f^{\text{VI}}(0) &= \cos 3\pi = -1,\\
f^{\text{VII}}(0) &= \cos\tfrac{7}{2}\pi = 0,
\end{aligned}$$

u. s. w.

ist; so ergiebt sich aus §. 115. I. unmittelbar die für jedes x geltende höchst merkwürdige Reihe

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1\ldots4} - \frac{x^6}{1\ldots6} + \frac{x^8}{1\ldots8} - \ldots\ldots$$

§. 123.

Ferner wollen wir nun auch die Function

$$f(x) = Arctang\, x$$

in eine Reihe zu entwickeln suchen.

Zuerst ist zu bemerken, dass, wenn k eine beliebige positive oder negative ganze Zahl bezeichnet,

$$f(0) = k\pi$$

ist.

Ferner ist nach §. 70.

$$f'(0) = 1.$$

Ueberhaupt ist, wenn man

$$Arctang\, x = \varphi$$

setzt, nach §. 99.

$$f^{(n)}(x) = 1.2.3\ldots(n-1)(-1)^{n-1}\cos\varphi^n \sin n(\tfrac{1}{2}\pi - \varphi).$$

Für $x = 0$ ist $\varphi = k\pi$, also $\cos\varphi = (-1)^k$, und folglich

$$\begin{aligned}
\cos\varphi^n \sin n(\tfrac{1}{2}\pi - \varphi) &= (-1)^{kn}\sin\left(\frac{n}{2}\pi - nk\pi\right)\\
&= (-1)^{kn}\left\{\sin\frac{n}{2}\pi\cos nk\pi - \cos\frac{n}{2}\pi\sin nk\pi\right\}\\
&= (-1)^{kn}(-1)^{kn}\sin\frac{n}{2}\pi = (-1)^{2kn}\sin\frac{n}{2}\pi = \sin\frac{n}{2}\pi.
\end{aligned}$$

Also ist

$$f^{(n)}(0) = 1.2.3\ldots(n-1)(-1)^{n-1}\sin\frac{n}{2}\pi,$$

und folglich

$$\frac{f^{(n)}(0)}{1.2.3\ldots n} = \frac{(-1)^{n-1}}{n}\sin\frac{n}{2}\pi.$$

Ferner ist, wenn wir der Kürze wegen

$$Arc\tang\varrho x = \theta$$

setzen,

$$f^{(n)}(\varrho x) = 1.2.3\ldots(n-1)(-1)^{n-1}\cos\theta^n\sin n(\tfrac{1}{2}\pi-\theta)$$

und folglich

$$\frac{x^n}{1\ldots n}f^{(n)}(\varrho x) = (-1)^{n-1}\cdot\frac{x^n}{n}\cos\theta^n\sin n(\tfrac{1}{2}\pi-\theta).$$

Hieraus folgt auf der Stelle, dass für jedes x, dessen absoluter Werth nicht grösser als die Einheit ist, die Grösse

$$\frac{x^n}{1\ldots n}f^{(n)}(\varrho x)$$

sich, wenn n wächst, der Null nähert, und derselben beliebig nahe gebracht werden kann, wenn man nur n gross genug nimmt.

Also ist, wie sich nun, wenn man alles Vorhergehende zusammen nimmt, aus §. 113. I. leicht ergiebt,

$$Arc\tang x = k\pi + x - \tfrac{1}{3}x^3 + \tfrac{1}{5}x^5 - \tfrac{1}{7}x^7 + \tfrac{1}{9}x^9 - \ldots.$$
$$\{-1 \overline{\gtrless} x \overline{\gtrless} +1\}$$

Dass auf der rechten Seite dieser Gleichung die Grösse $k\pi$, welche in so fern völlig unbestimmt ist, als man nur weiss, dass k eine positive oder negative ganze Zahl ist, vorkommt, darf nicht Wunder nehmen, da ja $Arc\tang x$ eine Grösse ist, welche unendlich viele verschiedene Werthe haben kann. Die Grösse k muss nun aber näher bestimmt werden.

§. 124.

Zu dem Ende wollen wir jetzt $Arc\tang x$ den der Tangente x entsprechenden Bogen bezeichnen lassen, welcher den kleinsten absoluten Werth hat, so dass also, weil der absolute Werth von x die Einheit nicht übersteigen darf, der absolute Werth von $Arc\tang x$ nicht grösser als $\frac{1}{4}\pi$ ist.

Ist zuerst x positiv, so ist auch $Arc\tang x$ positiv. Wäre nun die ganze Zahl $k > 0$; so wäre, weil nach §. 123.

$$Arc\tang x = k\pi + (x - \tfrac{1}{3}x^3) + (\tfrac{1}{5}x^5 - \tfrac{1}{7}x^7) + \ldots$$

und x nicht grösser als die Einheit ist, offenbar

$$Arc\tang x \overline{\geq} \pi,$$

da doch

$$Arctang\,x \leqq \tfrac{1}{2}\pi$$

ist, und es kann also nicht $k > 0$ seyn. Wäre ferner die ganze Zahl $k < 0$; so wäre, weil nach §. 123.

$$Arc\,tang\,x = k\pi + x - (\tfrac{1}{3}x^3 - \tfrac{1}{5}x^5) - (\tfrac{1}{7}x^7 - \tfrac{1}{9}x^9) - \ldots$$

und x nicht grösser als die Einheit ist, offenbar

$$Arc\,tang\,x \leqq k\pi + x$$

oder

$$x - Arc\,tang\,x \geqq - k\pi,$$

und folglich

$$x - Arc\,tang\,x \geqq \pi$$

oder

$$x \geqq \pi + Arc\,tang\,x,$$

also auch $x \geqq \pi$. Weil nun aber, wie die Geometrie lehrt, die Seite des in einen Kreis beschriebenen regulären Sechsecks dem Radius des Kreises, d. i. der Einheit gleich ist; so ist $2\pi > 6$, $\pi > 3$. Folglich wäre $x > 3$, da doch x nach der Voraussetzung die Einheit nicht übersteigt. Also kann auch nicht $k < 0$ seyn, und es muss folglich, weil weder $k > 0$, noch $k < 0$ seyn kann, $k = 0$ seyn. Ist also x positiv und übersteigt die Einheit nicht; so ist

$$Arc\,tang\,x = x - \tfrac{1}{3}x^3 + \tfrac{1}{5}x^5 - \tfrac{1}{7}x^7 + \tfrac{1}{9}x^9 - \ldots,$$

immer unter der Voraussetzung, dass $Arc\,tang\,x$ der kleinste zu der Tangente x gehörende Bogen ist.

Ist ferner x negativ, so ist $-x$ positiv. Also ist nach dem Vorhergehenden, wenn nur der absolute Werth von x die Einheit nicht übersteigt,

$$Arc\,tang(-x) = -x + \tfrac{1}{3}x^3 - \tfrac{1}{5}x^5 + \tfrac{1}{7}x^7 - \tfrac{1}{9}x^9 + \ldots$$

Weil nun aber bekanntlich

$$Arc\,tang\,x = - Arc\,tang\,(-x)$$

ist; so ist auch in diesem Falle

$$Arc\,tang\,x = x - \tfrac{1}{3}x^3 + \tfrac{1}{5}x^5 - \tfrac{1}{7}x^7 + \tfrac{1}{9}x^9 - \ldots.$$

Nimmt man jetzt das Vorhergehende zusammen; so ergiebt sich, immer unter der Voraussetzung, dass $Arc\,tang\,x$ der zu der Tangente x gehörende Bogen ist, welcher den kleinsten absoluten Werth hat, die folgende in jeder Beziehung höchst merkwürdige und wichtige Gleichung:

$$Arc\,tang\,x = x - \tfrac{1}{3}x^3 + \tfrac{1}{5}x^5 - \tfrac{1}{7}x^7 + \tfrac{1}{9}x^9 - \ldots$$
$$\{-1 = x = +1\}$$

§. 125.

Mittelst der im vorhergehenden Paragraphen bewiesenen Gleichung kann man auf verschiedene Arten die Zahl π berechnen.

Setzt man nämlich in dieser Gleichung zuerst $x = 1$; so erhält man

$$\frac{1}{4}\pi = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \ldots\ldots,$$

eine Reihe, welche man, wie leicht erhellen wird, auch unter folgender Form darstellen kann:

$$\frac{1}{4}\pi = 2\left\{\frac{1}{1.3} + \frac{1}{5.7} + \frac{1}{9.11} + \frac{1}{13.15} + \ldots\right\},$$

oder

$$\frac{1}{8}\pi = \frac{1}{1.3} + \frac{1}{5.7} + \frac{1}{9.11} + \frac{1}{13.15} + \ldots\ldots$$

Ferner ist, wie leicht gezeigt werden kann,

$$tang\, \tfrac{1}{6}\pi = \frac{1}{\sqrt{3}},$$

und folglich nach der in §. 124. bewiesenen Gleichung

$$\frac{1}{6}\pi = \frac{1}{\sqrt{3}}\left\{1 - \frac{1}{3.3} + \frac{1}{5.3^2} - \frac{1}{7.3^3} + \frac{1}{9.3^4} - \ldots\right\}.$$

Durch einen sehr merkwürdigen Kunstgriff hat Euler Ausdrücke gefunden, welche zur Berechnung von π vorzüglich bequem sind. Dieser Kunstgriff besteht im Allgemeinen darin, dass Euler einen Bogen, dessen Verhältniss zur Peripherie rational ist, in zwei oder mehrere andere Bogen zerlegt, deren Tangenten rational sind. Entwickelt man dann diese Bogen nach §. 124. in Reihen, so wird man durch deren Vereinigung mit einander für den zerlegten Bogen einen Ausdruck erhalten, der zwar aus mehrern unendlichen Reihen zusammengesetzt ist; diese Reihen werden aber oft sehr stark convergiren, und auch sonst eine leichte numerische Rechnung gestatten.

Einige der hierher gehörenden Formeln sind folgende.

$$1.\quad Arc\,tang\, \tfrac{1}{2} + Arc\,tang\, \tfrac{1}{3} = \tfrac{1}{4}\pi.$$

Um die Richtigkeit dieser Gleichung zu beweisen, setze man

$$Arc\,tang\, \tfrac{1}{2} = \varphi,\quad Arc\,tang\, \tfrac{1}{3} = \psi;$$

so ist

$$tang\,\varphi = \tfrac{1}{2},\quad tang\,\psi = \tfrac{1}{3}.$$

Weil nun bekanntlich

$$tang\,(\varphi + \psi) = \frac{tang\,\varphi + tang\,\psi}{1 - tang\,\varphi\; tang\,\psi}$$

ist; so ist

$$tang(\varphi+\psi)=\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}}=1$$

und folglich

$$\varphi+\psi=\tfrac{1}{4}\pi,$$

d. i.

$$Arctang\,\tfrac{1}{2}+Arctang\,\tfrac{1}{3}=\tfrac{1}{4}\pi,$$

wie bewiesen werden sollte.

$$2.\quad 2Arctang\,\tfrac{1}{2}-Arctang\,\tfrac{1}{7}=\tfrac{1}{4}\pi.$$

Um diese Gleichung zu beweisen, setze man

$$Arctang\,\tfrac{1}{2}=\varphi,\ Arctang\,\tfrac{1}{7}=\psi;$$

so ist

$$tang\,\varphi=\tfrac{1}{2},\ tang\,\psi=\tfrac{1}{7}.$$

Weil nun

$$tang\,2\varphi=\frac{2tang\,\varphi}{1-tang\,\varphi^2}=\tfrac{4}{3}$$

ist; so ist

$$tang(2\varphi-\psi)=\frac{tang\,2\varphi-tang\,\psi}{1+tang\,2\varphi\,tang\,\psi}=\frac{\frac{4}{3}-\frac{1}{7}}{1+\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{7}}=1,$$

und folglich

$$2\varphi-\psi=\tfrac{1}{4}\pi,$$

d. i.

$$2Arctang\,\tfrac{1}{2}-Arctang\,\tfrac{1}{7}=\tfrac{1}{4}\pi,$$

wie bewiesen werden sollte.

Ganz auf ähnliche Art kann man sich von der Richtigkeit der Gleichung

$$3.\quad 2Arctang\,\tfrac{1}{3}+Arctang\,\tfrac{1}{7}=\tfrac{1}{4}\pi$$

überzeugen.

Die Gleichung

$$4.\quad 4Arctang\,\tfrac{1}{5}-Arctang\,\tfrac{1}{239}=\tfrac{1}{4}\pi$$

kann auf folgende Art bewiesen werden.

Man setze

$$Arctang\,\tfrac{1}{5}=\varphi,\ Arctang\,\tfrac{1}{239}=\psi;$$

so ist

$$tang\,\varphi=\tfrac{1}{5},\ tang\,\psi=\tfrac{1}{239}.$$

Bekanntlich ist nun

$$tang\,2\varphi=\frac{2tang\,\varphi}{1-tang\,\varphi^2}=\tfrac{5}{12},$$

$$tang\,4\varphi=\frac{2tang\,2\varphi}{1-tang\,2\varphi^2}=\tfrac{120}{119}.$$

Folglich ist

$$tang(4\varphi-\psi)=\frac{tang\,4\varphi-tang\,\psi}{1+tang\,4\varphi\,tang\,\psi}=1,$$

und daher

$$4\varphi - \psi = \tfrac{1}{4}\pi,$$

d. i.

$$4 \mathit{Arctang}\, \tfrac{1}{5} - \mathit{Arctang}\, \tfrac{1}{239} = \tfrac{1}{4}\pi,$$

wie bewiesen, werden sollte.

Aus der Gleichung 1. und §. 124. ergiebt sich

$$\tfrac{1}{4}\pi = \begin{cases} \dfrac{1}{1.2} - \dfrac{1}{3.2^3} + \dfrac{1}{5.2^5} - \dfrac{1}{7.2^7} + \dfrac{1}{9.2^9} - \ldots\ldots \\ + \dfrac{1}{1.3} - \dfrac{1}{3.3^3} + \dfrac{1}{5.3^5} - \dfrac{1}{7.3^7} + \dfrac{1}{9.3^9} - \ldots\ldots \end{cases}$$

Aus der Gleichung 3. und §. 124. ergiebt sich

$$\tfrac{1}{4}\pi = \begin{cases} \dfrac{1}{1.7} - \dfrac{1}{3.7^3} + \dfrac{1}{5.7^5} - \dfrac{1}{7.7^7} + \dfrac{1}{9.7^9} - \ldots\ldots \\ + 2\left(\dfrac{1}{1.3} - \dfrac{1}{3.3^3} + \dfrac{1}{5.3^5} - \dfrac{1}{7.3^7} + \dfrac{1}{9.3^9} - \ldots\right) \end{cases}$$

Aus der Gleichung 4. und §. 124. ergiebt sich

$$\tfrac{1}{4}\pi = \begin{cases} 4\left(\dfrac{1}{1.5} - \dfrac{1}{3.5^3} + \dfrac{1}{5.5^5} - \dfrac{1}{7.5^7} + \dfrac{1}{9.5^9} - \ldots\right) \\ - \left(\dfrac{1}{239} - \dfrac{1}{3.239^3} + \dfrac{1}{5.239^5} - \dfrac{1}{7.239^7} - \ldots\right) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} = \quad & \frac{4}{1.5} - \frac{1}{239} & \qquad = \quad & \frac{4}{1.5} - \frac{1}{239} \\ & -\left(\frac{4}{3.5^3} - \frac{1}{3.239^3}\right) & & - \tfrac{1}{3}\left(\frac{8.4}{8.5^3} - \frac{1}{239.239^2}\right) \\ & +\left(\frac{4}{5.5^5} - \frac{1}{5.239^5}\right) & & + \tfrac{1}{5}\left(\frac{8.4^2}{8.4.5^5} - \frac{1}{239.239^4}\right) \\ & -\left(\frac{4}{7.5^7} - \frac{1}{7.239^7}\right) & & - \tfrac{1}{7}\left(\frac{8.4^3}{8.4^2.5^7} - \frac{1}{239.239^6}\right) \\ & +\left(\frac{4}{9.5^9} - \frac{1}{9.239^9}\right) & & + \tfrac{1}{9}\left(\frac{8.4^4}{8.4^3.5^9} - \frac{1}{239.239^8}\right) \\ & - \ldots\ldots\ldots & & - \ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} = \quad & \frac{4}{1.5} - \frac{1}{239} \\ & - \tfrac{1}{3}\left(\frac{8.4}{1000} - \frac{1}{239.57121}\right) \\ & + \tfrac{1}{5}\left(\frac{8.4^2}{100000} - \frac{1}{239.57121^2}\right) \\ & - \tfrac{1}{7}\left(\frac{8.4^3}{10000000} - \frac{1}{239.57121^3}\right) \\ & + \tfrac{1}{9}\left(\frac{8.4^4}{1000000000} - \frac{1}{239.57121^4}\right) \\ & - \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Diese Reihe ist ganz vorzüglich bequem zur Berechnung von π.

§. 126.

Mittelst der in §. 121. und §. 122. gefundenen Entwickelungen lässt sich leicht zeigen, dass die imaginäre Reihe

$$1, \frac{x\sqrt{-1}}{1}, \frac{(x\sqrt{-1})^2}{1.2}, \frac{(x\sqrt{-1})^3}{1.2.3}, \frac{(x\sqrt{-1})^4}{1.2.3.4}, \ldots$$

für jedes x eine bestimmte Summe hat, und daher für jedes x convergirt.

Die Glieder dieser Reihe sind nämlich

$$1, \frac{x\sqrt{-1}}{1}, -\frac{x^2}{1.2}, -\frac{x^3\sqrt{-1}}{1.2.3}, \frac{x^4}{1\ldots4}, \frac{x^5\sqrt{-1}}{1\ldots5}, \ldots$$

und ihre Summe ist folglich

$$1-\frac{x^2}{1.2}+\frac{x^4}{1\ldots4}-\frac{x^6}{1\ldots6}+\ldots$$
$$+\left\{x-\frac{x^3}{1.2.3}+\frac{x^5}{1\ldots5}-\frac{x^7}{1\ldots7}+\ldots\right\}\sqrt{-1},$$

d. i. nach §. 121. und §. 122. die Grösse

$$\cos x+\sin x\sqrt{-1}.$$

Weil nun die stets convergirende imaginäre Reihe

$$1, \frac{x\sqrt{-1}}{1}, \frac{(x\sqrt{-1})^2}{1.2}, \frac{(x\sqrt{-1})^3}{1.2.3}, \frac{(x\sqrt{-1})^4}{1.2.3.4}, \ldots$$

aus der stets convergirenden reellen Reihe

$$1, \frac{x}{1}, \frac{x^2}{1.2}, \frac{x^3}{1.2.3}, \frac{x^4}{1.2.3.4}, \ldots,$$

deren Summe nach §. 118. bekanntlich e^x ist, erhalten wird, wenn man $x\sqrt{-1}$ für x setzt; so versteht man unter der Potenz $e^{x\sqrt{-1}}$ mit dem imaginären Exponenten $x\sqrt{-1}$ die Summe der stets convergirenden imaginären Reihe

$$1, \frac{x\sqrt{-1}}{1}, \frac{(x\sqrt{-1})^2}{1.2}, \frac{(x\sqrt{-1})^3}{1.2.3}, \frac{(x\sqrt{-1})^4}{1.2.3.4}, \ldots$$

und setzt also

$$e^{x\sqrt{-1}}=\cos x+\sin x\sqrt{-1}.$$

Setzt man in dieser Gleichung, wie dies verstattet ist, $-x$ für x; so erhält man

$$e^{-x\sqrt{-1}}=\cos x-\sin x\sqrt{-1},$$

und es ist folglich

$$e^{\pm x\sqrt{-1}}=\cos x\pm\sin x\sqrt{-1}.$$

Durch Addition und Subtraction der beiden Gleichungen

$$e^{+x\sqrt{-1}} = \cos x + \sin x\sqrt{-1},$$

$$e^{-x\sqrt{-1}} = \cos x - \sin x\sqrt{-1}$$

erhält man die merkwürdigen Formeln

$$\cos x = \frac{e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}}}{2},$$

$$\sin x = \frac{e^{x\sqrt{-1}} - e^{-x\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}},$$

und aus diesen Formeln folgt leicht durch Division

$$\tang x = \frac{e^{x\sqrt{-1}} - e^{-x\sqrt{-1}}}{(e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}})\sqrt{-1}}, \quad \cot x = \frac{e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}}}{e^{x\sqrt{-1}} - e^{-x\sqrt{-1}}}\sqrt{-1};$$

oder

$$\tang x = \frac{e^{2x\sqrt{-1}} - 1}{(e^{2x\sqrt{-1}} + 1)\sqrt{-1}}, \quad \cot x = \frac{1 + e^{2x\sqrt{-1}}}{(1 - e^{2x\sqrt{-1}})\sqrt{-1}};$$

oder auch

$$\tang x = \frac{1 - e^{2x\sqrt{-1}}}{1 + e^{2x\sqrt{-1}}}\sqrt{-1}, \quad \cot x = \frac{e^{2x\sqrt{-1}} + 1}{e^{2x\sqrt{-1}} - 1}\sqrt{-1}.$$

§. 127.

Wir wollen nun noch die Grösse $l(\alpha + \beta\sqrt{-1})$ auf die Form $p + q\sqrt{-1}$, wo α, β, p, q relle Grössen bezeichnen, zu bringen suchen.

Aus der Gleichung

$$l(\alpha + \beta\sqrt{-1}) = p + q\sqrt{-1}$$

ergiebt sich unmittelbar die Gleichung

$$e^{p + q\sqrt{-1}} = \alpha + \beta\sqrt{-1}.$$

Nach §. 126. ist aber

$$e^{p + q\sqrt{-1}} = e^p(\cos q + \sin q\sqrt{-1}).$$

Also müssen die Grössen p und q so bestimmt werden, dass

$$e^p(\cos q + \sin q\sqrt{-1}) = \alpha + \beta\sqrt{-1},$$

d. i. dass

$$e^p \cos q = \alpha, \quad e^p \sin q = \beta,$$

ist. Aus diesen Gleichungen folgt aber, wenn man dieselben quadrirt und dann zu einander addirt, auf der Stelle

$$e^{2p} = \alpha^2 + \beta^2;$$

folglich

$$2p = l(\alpha^2 + \beta^2), \quad p = \tfrac{1}{2} l(\alpha^2 + \beta^2).$$

Weil nun ferner

$$e^p = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$$

ist, wo die Quadratwurzel positiv zu nehmen ist, da e^p immer positiv ist; so muss q so bestimmt werden, dass zugleich

$$\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} . \cos q = \alpha, \quad \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} . \sin q = \beta,$$

oder

$$\cos q = \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}, \quad \sin q = \frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}},$$

oder dass zugleich

$$q = Arc\cos \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} = Arc\sin \frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}$$

ist, welches, weil

$$\left(\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}\right)^2 + \left(\frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}\right)^2 = 1$$

ist, offenbar immer möglich ist. Uebrigens kann man auch q aus der Gleichung

$$q = Arc\tang \frac{\beta}{\alpha}$$

bestimmen, hat dann aber zu bemerken, dass sich q, wenn α und β beide positiv sind, im ersten; wenn α und β beide negativ sind, im dritten; wenn α positiv und β negativ ist, im vierten; wenn α negativ und β positiv ist, im zweiten Quadranten endigen muss, weil nur, wenn diese Bedingungen erfüllt sind, zugleich

$$q = Arc\cos \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} = Arc\sin \frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}$$

seyn kann, wie es erfordert wird.

Ist nun q gehörig bestimmt; so ergiebt sich aus dem Obigen

$$l(\alpha + \beta\sqrt{-1}) = \tfrac{1}{2} l(\alpha^2 + \beta^2) + q\sqrt{-1},$$

und wenn man auf beiden Seiten mit dem Modulus der durch log bezeichneten Logarithmen multiplicirt,

$$log(\alpha + \beta\sqrt{-1}) = \tfrac{1}{2} log(\alpha^2 + \beta^2) + Mq\sqrt{-1}.$$

Da q offenbar unendlich viele verschiedene Werthe haben kann; so hat auch $log(\alpha + \beta\sqrt{-1})$ jederzeit unendlich viele verschiedene Werthe.

Für $\alpha = +1$ und $\beta = 0$ muss q so bestimmt werden, dass

$$q = Arc\cos(+1) = Arc\sin 0$$

ist. Dies giebt

$$q = 2k\pi,$$

wo k jede positive oder negative ganze Zahl seyn kann.

Für $\alpha = -1$ und $\beta = 0$ muss q so bestimmt werden, dass

$$q = Arc\cos(-1) = Arc\sin 0$$

ist. Dies giebt

$$q = (2k+1)\pi,$$

wo k wieder jede positive oder negative ganze Zahl seyn kann.

Dies vorausgesetzt, erhält man aus der Gleichung

$$log(\alpha + \beta\sqrt{-1}) = \tfrac{1}{2}log(\alpha^2 + \beta^2) + Mq\sqrt{-1}$$

auf der Stelle

$$log(+1) = 2kM\pi\sqrt{-1}$$

und

$$log(-1) = (2k+1)M\pi\sqrt{-1},$$

für jedes positive oder negative k, wobei man nur zu bemerken hat, dass man in obiger Gleichung für die Grösse $log(\alpha^2 + \beta^2)$ immer ihren reellen Werth zu setzen hat, welcher für $\alpha = \pm 1$ und $\beta = 0$ bekanntlich $= 0$ ist.

Ueberhaupt erhält man aus obiger Gleichung für $\beta = 0$

$$log\,\alpha = \tfrac{1}{2}log(\alpha^2) + Mq\sqrt{-1},$$

wo $log(\alpha^2)$ den reellen Werth bezeichnet, welchen dieser Logarithmus, weil α^2 positiv ist, jederzeit nothwendig haben muss. Auch wird leicht erhellen, dass in diesem Falle

$$q = Arc\cos(\pm 1) = Arc\sin 0$$

und das obere oder untere Zeichen zu nehmen ist, jenachdem α positiv oder negativ ist, welches daher kommt, weil in der allgemeinen Gleichung

$$q = Arc\cos\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}} = Arc\sin\frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}$$

die Quadratwurzel in den Nennern jederzeit positiv zu nehmen ist.

Ist also α positiv, so ist $q = 2k\pi$; ist dagegen α negativ, so ist $q = (2k+1)\pi$, wo k immer eine beliebige positive oder negative ganze Zahl bezeichnet.

Ist folglich α positiv, so ist

$$log\,\alpha = \tfrac{1}{2}log(\alpha^2) + 2kM\pi\sqrt{-1};$$

dagegen ist, wenn α negativ ist,

$$log\,\alpha = \tfrac{1}{2}log(\alpha^2) + (2k+1)M\pi\sqrt{-1}.$$

Hieraus sieht man, dass der Logarithmus jeder reellen Grösse unendlich viele verschiedene Werthe hat. Ist die in Rede stehende reelle Grösse negativ, so sind alle diese Werthe ihres Logarithmus imaginär, dagegen findet sich unter den unendlich

vielen verschiedenen Werthen des Logarithmus einer positiven Grösse jederzeit ein reeller Werth, welchen man erhält, wenn man in der Gleichung:

$$\log a = \tfrac{1}{2}\log(a^2) + 2kM\pi\sqrt{-1}$$

$k = 0$ setzt.

Ist β nicht $= 0$; so kann wegen

$$q = Arc\cos\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}} = Arc\sin\frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}$$

offenbar nie $q = 0$ seyn, und aus der Gleichung

$$\log(\alpha+\beta\sqrt{-1}) = \tfrac{1}{2}\log(\alpha^2+\beta^2) + Mq\sqrt{-1}$$

geht also hervor, dass die unendlich vielen verschiedenen Werthe, welche der Logarithmus einer jeden imaginären Grösse hat, jederzeit sämmtlich imaginär sind.

Siebentes Kapitel.

Von der Differentiation der Functionen mit mehrern von einander unabhängigen veränderlichen Grössen.

§. 128.

Wenn man bloss eine veränderliche Grösse einer beliebigen Function

$$u = f(x, y, z, v, \ldots .)$$

der von einander völlig unabhängigen veränderlichen Grössen $x, y, z, v, \ldots .$ als veränderlich, alle übrigen in der Function vorkommenden veränderlichen Grössen dagegen als constant betrachtet, und unter dieser Voraussetzung das $n$te Differential der Function nach den aus dem Vorhergehenden bekannten Regeln entwickelt; so heisst dieses Differential das $n$te partielle Differential der gegebenen Function in Bezug auf die als veränderlich betrachtete Grösse.

Im Folgenden sollen die in Bezug auf $x, y, z, v, \ldots .$ als veränderliche Grösse genommenen $n$ten partiellen Differentiale der Function u respective durch

$$\partial^n_x u,\ \partial^n_y u,\ \partial^n_z u,\ \partial^n_v u, \ldots .,$$

die ersten partiellen Differentiale in Bezug auf dieselben veränderlichen Grössen wie gewöhnlich mit Weglassung des Exponenten 1 bloss durch

$$\partial_x u,\ \partial_y u,\ \partial_z u,\ \partial_v u, \ldots \ldots$$

bezeichnet werden.

Die $n$ten partiellen Differentialquotienten der Function u in Bezug auf $x, y, z, v, \ldots.$ als veränderliche Grösse erhält man, wenn man die $n$ten partiellen Differentiale nach der Reihe durch

$$\partial x^n, \partial y^n, \partial z^n, \partial v^n, \ldots\ldots,$$

d. i., wobei §. 36. zu vergleichen, eigentlich durch

$$\Delta x^n, \Delta y^n, \Delta z^n, \Delta v^n, \ldots\ldots,$$

wo $\Delta x, \Delta y, \Delta z, \Delta v, \ldots.$ wie immer ganz beliebige, stets als constant zu betrachtende Veränderungen der unabhängigen veränderlichen Grössen $x, y, z, v, \ldots$ bezeichnen, dividirt. Daher würden die $n$ten partiellen Differentialquotienten der Function u in Bezug auf $x, y, z, v, \ldots.$ als veränderliche Grösse eigentlich respective durch

$$\frac{\partial_x^n u}{\partial x^n}, \frac{\partial_y^n u}{\partial y^n}, \frac{\partial_z^n u}{\partial z^n}, \frac{\partial_v^n u}{\partial v^n}, \ldots\ldots,$$

die ersten partiellen Differentialquotienten in Bezug auf dieselben veränderlichen Grössen durch

$$\frac{\partial_x u}{\partial x}, \frac{\partial_y u}{\partial y}, \frac{\partial_z u}{\partial z}, \frac{\partial_v u}{\partial v}, \ldots.$$

zu bezeichnen seyn. In den meisten Fällen können aber statt dieser etwas weitläufigen Bezeichnung ohne alle Zweideutigkeit die einfachern Symbole

$$\frac{\partial^n u}{\partial x^n}, \frac{\partial^n u}{\partial y^n}, \frac{\partial^n u}{\partial z^n}, \frac{\partial^n u}{\partial v^n}, \ldots.$$

und

$$\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}, \frac{\partial u}{\partial v}, \ldots.$$

gebraucht werden, weil schon die Nenner dieser Brüche mit hinreichender Deutlichkeit und Bestimmtheit anzeigen, dass bloss die in denselben enthaltenen veränderlichen Grössen bei der Differentiation als veränderlich betrachtet werden sollen.

Euler bezeichnet in seinen Schriften die partiellen Differentialquotienten durch

$$\left(\frac{\partial^n u}{\partial x^n}\right), \left(\frac{\partial^n u}{\partial y^n}\right), \left(\frac{\partial^n u}{\partial z^n}\right), \left(\frac{\partial^n u}{\partial v^n}\right), \ldots.$$

und

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right), \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right), \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right), \left(\frac{\partial u}{\partial v}\right), \ldots\ldots,$$

eine Bezeichnung, die wir im Folgenden, wenn es die Deutlichkeit fordert, auch zuweilen gebrauchen werden. Will man sich des Functionszeichens f bedienen; so werden die $n$ten partiellen Differentialquotienten der Function

$$u = f(x, y, z, v, \ldots.)$$

in Bezug auf x, y, z, v, ... durch

$$f_x^{(n)}(x, y, z, v, \ldots),$$

$$f_y^{(n)}(x, y, z, v, \ldots),$$

$$f_z^{(n)}(x, y, z, v, \ldots),$$

$$f_v^{(n)}(x, y, z, v, \ldots),$$

u. s. w.

die $n$ten partiellen Differentiale in Bezug auf dieselben veränderlichen Grössen also durch

$$f_x^{(n)}(x, y, z, v, \ldots).\partial x^n,$$

$$f_y^{(n)}(x, y, z, v, \ldots).\partial y^n,$$

$$f_z^{(n)}(x, y, z, v, \ldots).\partial z^n,$$

$$f_v^{(n)}(x, y, z, v, \ldots).\partial v^n,$$

u. s. w.

bezeichnet.

Um die obigen allgemeinen Begriffe an ein Paar Beispielen zu erläutern; so sey zuerst

$$u = \frac{x^2y - 3xy^2}{2x + y}.$$

Betrachtet man nun bloss x als veränderlich, und entwickelt unter dieser Voraussetzung den Differentialquotienten von u; so erhält man

$$\frac{\partial_x u}{\partial x} = \frac{(2x+y)(2xy-3y^2)-2(x^2y-3xy^2)}{(2x+y)^2}$$

$$= \frac{2xy(x+y)-3y^3}{(2x+y)^2}.$$

Betrachtet man aber bloss y als veränderlich und entwickelt den Differentialquotienten; so erhält man

$$\frac{\partial_y u}{\partial y} = \frac{(2x+y)(x^2-6xy)-x^2y+3xy^2}{(2x+y)^2}$$

$$= \frac{2x^3-3xy(4x+y)}{(2x+y)^2}.$$

Folglich ist

$$\partial_x u = \frac{2xy(x+y)-3y^3}{(2x+y)^2}\,\partial x;$$

$$\partial_y u = \frac{2x^3-3xy(4x+y)}{(2x+y)^2}\,\partial y.$$

Ist ferner

$$u = Arc\,tang\,\frac{x}{y};$$

so setze man

$$\frac{x}{y} = p.$$

Dann ist nach §. 43.

$$\frac{\partial_x u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial p} \cdot \frac{\partial_x p}{\partial x}, \quad \frac{\partial_y u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial p} \cdot \frac{\partial_y p}{\partial y};$$

also

$$\frac{\partial_x u}{\partial x} = \frac{1}{1+p^2} \cdot \frac{1}{y} = \frac{y}{x^2+y^2},$$

$$\frac{\partial_y u}{\partial y} = -\frac{1}{1+p^2} \cdot \frac{x}{y^2} = -\frac{x}{x^2+y^2},$$

und folglich

$$\partial_x u = \frac{y}{x^2+y^2}\,\partial x, \quad \partial_y u = -\frac{x}{x^2+y^2}\,\partial y.$$

§. 129.

Vorzüglich kommt es nun darauf an, recht deutlich zu entwickeln, was man unter dem vollständigen Differential einer Function mit mehrern von einander unabhängigen veränderlichen Grössen zu verstehen hat.

Die gegebene Function sey

$$u = f(x, y, z, v, \ldots s, t)$$

und $x, y, z, v, \ldots s, t$ seyen beliebige von einander ganz unabhängige veränderliche Grössen. Ferner seyen $\partial x, \partial y, \partial z, \partial v, \ldots \partial s, \partial t$ beliebige constante Grössen, und α sey eine beliebige als veränderlich zu betrachtende Grösse. Lässt man nun die Grössen $x, y, z, v, \ldots s, t$ sich respective um $\alpha\partial x, \alpha\partial y, \alpha\partial z, \alpha\partial v, \ldots \alpha\partial s, \alpha\partial t$ verändern; so geht die gegebene Function in

$$f(x+\alpha\partial x, y+\alpha\partial y, z+\alpha\partial z, \ldots t+\alpha\partial t)$$

über, und man kann nun diese Grösse offenbar als eine Function von α betrachten, die wir durch $F(\alpha)$ bezeichnen wollen, so dass also

$$F(\alpha) = f(x+\alpha\partial x, y+\alpha\partial y, z+\alpha\partial z, \ldots t+\alpha\partial t),$$

folglich

$$F(0) = f(x, y, z, v, \ldots s, t)$$

ist.

Dies vorausgesetzt, versteht man unter dem vollständigen Differential der Function u die Gränze, welcher sich der Bruch

$$\frac{F(\alpha) - F(0)}{\alpha}$$

bis zu jedem beliebigen Grade nähert, wenn, indem die Grössen $x, y, z, v, \ldots s, t$; $\partial x, \partial y, \partial z, \partial v, \ldots \partial s, \partial t$ völlig ungeändert bleiben, die Grösse α sich der Null nähert, in so fern es nämlich überhaupt eine solche Gränze giebt. Bezeichnen wir also diese Gränze durch

$$Lim\,\frac{F(\alpha)-F(0)}{\alpha},$$

das vollständige Differential der Function u aber, wie im Folgenden immer geschehen soll, durch ∂u; so ist nach dem obigen allgemeinen Begriffe

$$\partial u = Lim\,\frac{F(\alpha)-F(0)}{\alpha}.$$

Erwägt man übrigens, dass die Grösse $F(\alpha)-F(0)$ offenbar die durch die Veränderungen $\alpha\partial x, \alpha\partial y, \alpha\partial z, \alpha\partial v, \ldots \alpha\partial s, \alpha\partial t$ der unabhängigen veränderlichen Grössen $x, y, z, v, \ldots s, t$ herbeigeführte Veränderung der Function u ist; so ist klar, dass, wenn man diese Veränderung durch Δu bezeichnet, die obige Gleichung auch unter der einfachen Form

$$\partial u = Lim\,\frac{\Delta u}{\alpha}$$

dargestellt werden kann, immer unter der Voraussetzung, dass α sich der Null nähert.

Betrachtet man, die Grössen $\partial x, \partial y, \partial z, \partial v, \ldots \partial s, \partial t$ immer als constant ansehend, ∂u als eine neue Function von $x, y, z, v, \ldots s, t$, und nimmt von derselben nach dem obigen allgemeinen Begriffe das vollständige Differential, so erhält man das zweite vollständige Differential $\partial^2 u$ der Function u, und es ist folglich immer

$$\partial^2 u = \partial\partial u.$$

Betrachtet man nun wieder, $\partial x, \partial y, \partial z, \partial v, \ldots \partial s, \partial t$ immer als constant ansehend, $\partial^2 u$ als eine Function von $x, y, z, v, \ldots s, t$ und nimmt von derselben nach dem obigen allgemeinen Begriffe das vollständige Differential, so erhält man das dritte vollständige Differential $\partial^3 u$ von u, und es ist folglich immer

$$\partial^3 u = \partial\partial^2 u.$$

Wie man auf diese Art weiter gehen kann, ist klar. Ueberhaupt ist, wenn $\partial^{n-1}u$ und $\partial^n u$ das $(n-1)$ste und $n$te vollständige Differential der Function u bezeichnen,

$$\partial^n u = \partial\partial^{n-1} u,$$

wobei man nur nie aus den Augen verlieren darf, dass bei der Differentiation jederzeit $\partial x, \partial y, \partial z, \partial v, \ldots \partial s, \partial t$ als constante Grössen zu betrachten sind.

Der folgende Lehrsatz ist für die Entwickelung der vollständigen Differentiale der Functionen mit mehrern von ein-

ander unabhängigen veränderlichen Grössen von der grössten Wichtigkeit.

§. 130.

Lehrsatz. Wenn

$$u = f(x, y, z, v, \ldots s, t)$$

eine beliebige Function der von einander unabhängigen veränderlichen Grössen $x, y, z, v, \ldots s, t$ ist; so ist immer

$$\partial u = \partial_x u + \partial_y u + \partial_z u + \partial_v u + \ldots + \partial_t u,$$

d. h. das vollständige Differential der Function u ist immer der Summe aller ihrer partiellen Differentiale in Bezug auf jede ihrer veränderlichen Grössen einzeln genommen gleich.

Beweis. Die Anzahl der von einander unabhängigen veränderlichen Grössen $x, y, z, v, \ldots s, t$ sey n. Bezeichnen dann $\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3, \varrho_4, \ldots \varrho_{n-1}, \varrho_n$ gewisse positive echte Brüche; so ist nach §. 110. II., wenn wir die Functionen

$$f(x, y, z, v, \ldots s, t),$$
$$f(x+\alpha\partial x, y, z, v, \ldots s, t)$$
$$f(x+\alpha\partial x, y+\alpha\partial y, z, v, \ldots s, t)$$
$$f(x+\alpha\partial x, y+\alpha\partial y, z+\alpha\partial z, v, \ldots s, t)$$
u. s. w. u. s. w.
$$f(x+\alpha\partial x, y+\alpha\partial y, z+\alpha\partial z, v+\alpha\partial v, \ldots t+\alpha\partial t)$$

der Kürze wegen respective durch $u, u_1, u_2, u_3, \ldots u_n$ bezeichnen,

$$u_1 - u = f'_x(x+\varrho_1\alpha\partial x, y, z, v, \ldots s, t).\alpha\partial x,$$
$$u_2 - u_1 = f'_y(x+\alpha\partial x, y+\varrho_2\alpha\partial y, z, v, \ldots s, t).\alpha\partial y,$$
$$u_3 - u_2 = f'_z(x+\alpha\partial x, y+\alpha\partial y, z+\varrho_3\alpha\partial z, v, \ldots s, t).\alpha\partial z,$$
u. s. w. u. s. w.
$$u_n - u_{n-1} = f'_t(x+\alpha\partial x, y+\alpha\partial y, z+\alpha\partial z, \ldots s+\alpha\partial s, t+\varrho_n\alpha\partial t).\alpha\partial t,$$

und folglich, wenn man auf beiden Seiten der Gleichheitszeichen addirt, zugleich aber erwägt, dass in der in §. 129. gebrauchten Bezeichnung

$$u_n = F(\alpha), \quad u = F(0)$$

ist,

$$\frac{F(\alpha) - F(0)}{\alpha}$$
$$= f'_x(x+\varrho_1\alpha\partial x, y, z, v, \ldots s, t).\partial x$$
$$+ f'_y(x+\alpha\partial x, y+\varrho_2\alpha\partial y, z, v, \ldots s, t).\partial y$$
$$+ f'_z(x+\alpha\partial x, y+\alpha\partial y, z+\varrho_3\alpha\partial z, v, \ldots s, t).\partial z$$
. . . .
$$+ f'_t(x+\alpha\partial x, y+\alpha\partial y, z+\alpha\partial z, \ldots s+\alpha\partial s, t+\varrho_n\alpha\partial t).\partial t.$$

Lässt man nun α sich der Null nähern; so nähern, weil ϱ_1, ϱ_2, ϱ_3, ϱ_4, ... ϱ_{n-1}, ϱ_n positive echte Brüche sind, die Grössen

$$f'_x(x+\varrho_1\alpha\partial x,\ y,\ z,\ldots s,\ t),$$
$$f'_y(x+\alpha\partial x,\ y+\varrho_2\alpha\partial y,\ z,\ v,\ldots s,\ t),$$
$$f'_z(x+\alpha\partial x,\ y+\alpha\partial y,\ z+\varrho_3\alpha\partial z,\ v,\ldots s,\ t),$$
u. s. w.
$$f'_t(x+\alpha\partial x,\ y+\alpha\partial y,\ z+\alpha\partial z,\ldots s+\alpha\partial s,\ t+\varrho_n\,\alpha\partial t)$$

sich offenbar respective den Grössen

$$f'_x(x,\ y,\ z,\ v,\ldots s,\ t),$$
$$f'_y(x,\ y,\ z,\ v,\ldots s,\ t),$$
$$f'_z(x,\ y,\ z,\ v,\ldots s,\ t),$$
u. s. w.
$$f'_t(x,\ y,\ z,\ v,\ldots s,\ t)$$

als ihren Gränzen immer mehr und mehr und bis zu jedem beliebigen Grade, und es ist folglich

$$\begin{aligned} Lim\,\frac{F(\alpha)-F(0)}{\alpha} = & f'_x(x,\ y,\ z,\ v,\ldots s,\ t).\partial x \\ & + f'_y(x,\ y,\ z,\ v,\ldots s,\ t).\partial y \\ & + f'_z(x,\ y,\ z,\ v,\ldots s,\ t).\partial z \\ & \cdots\cdots\cdots \\ & + f'_t(x,\ y,\ z,\ v,\ldots s,\ t).\partial t. \end{aligned}$$

Nach §. 129. ist aber

$$Lim\,\frac{F(\alpha)-F(0)}{\alpha} = \partial u.$$

Also ist

$$\begin{aligned} \partial u = & f'_x(x,\ y,\ z,\ v,\ldots s,\ t).\partial x \\ & + f'_y(x,\ y,\ z,\ v,\ldots s,\ t).\partial y \\ & + f'_z(x,\ y,\ z,\ v,\ldots s,\ t).\partial z \\ & \cdots\cdots\cdots \\ & + f'_t(x,\ y,\ z,\ v,\ldots s,\ t).\partial t, \end{aligned}$$

d. i.

$$\partial u = \frac{\partial_x u}{\partial x}\partial x + \frac{\partial_y u}{\partial y}\partial y + \frac{\partial_z u}{\partial z}\partial z + \ldots + \frac{\partial_t u}{\partial t}\partial t;$$

folglich

$$\partial u = \partial_x u + \partial_y u + \partial_z u + \partial_v u + \ldots + \partial_t u,$$

wie bewiesen werden sollte.

§. 131.

Mittelst des vorhergehenden wichtigen Theorems lassen sich die vollständigen Differentiale aller Ordnungen jeder Function mit

einer beliebigen Anzahl von einander unabhängiger veränderlichen Grössen ohne Schwierigkeit entwickeln.

Für

$$u = \frac{x^2y - 3xy^2}{2x+y}$$

ist nach §. 128.

$$\partial_x u = \frac{2xy(x+y) - 3y^3}{(2x+y)^2}\partial x,\quad \partial_y u = \frac{2x^3 - 3xy(4x+y)}{(2x+y)^2}\partial y;$$

also ist nach §. 130.

$$\partial u = \frac{2xy(x+y) - 3y^3}{(2x+y)^2}\partial x + \frac{2x^3 - 3xy(4x+y)}{(2x+y)^2}\partial y.$$

Für

$$u = Arctang\frac{x}{y}$$

ist nach §. 128.

$$\partial_x u = \frac{y}{x^2+y^2}\partial x,\quad \partial_y u = -\frac{x}{x^2+y^2}\partial y;$$

also ist nach §. 130.

$$\partial u = \frac{y}{x^2+y^2}\partial x - \frac{x}{x^2+y^2}\partial y.$$

Die höhern vollständigen Differentiale erhält man ganz nach demselben Verfahren, hat aber dabei nur nie aus den Augen zu verlieren, dass ∂x, ∂y, ∂z, ∂v, ... immer als constant zu betrachten sind.

Für $u = \sqrt[3]{x}\cdot\sqrt[3]{y}$ erhält man z. B.

$$\partial^3 u = -\frac{3y^{\frac{1}{3}}\partial x^3}{8x^{\frac{5}{2}}} - \frac{\partial x^2\partial y}{4x^{\frac{3}{2}}y^{\frac{2}{3}}} - \frac{\partial x\,\partial y^2}{3x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{5}{3}}} + \frac{10x^{\frac{1}{2}}\partial y^3}{27y^{\frac{8}{3}}}.$$

§. 132.

Die Symbole P, Q, R, . . . T, V sollen jetzt immer Functionen der von einander unabhängigen veränderlichen Grössen x, y, z, v, ... s, t bezeichnen.

I. Ist nun, indem a eine constante Grösse bezeichnet,

$$u = aP;$$

so ist nach §. 37.

$$\partial_x u = a\partial_x P,\ \partial_y u = a\partial_y P,\ \partial_z u = a\partial_z P, \ldots \partial_t u = a\partial_t P,$$

und folglich

$$\partial_x u + \partial_y u + \partial_z u + \ldots + \partial_t u$$
$$= a(\partial_x P + \partial_y P + \partial_z P + \ldots + \partial_t P).$$

Nach §. 130. ist aber

$$\partial u = \partial_x u + \partial_y u + \partial_z u + \ldots + \partial_t u,$$
$$\partial P = \partial_x P + \partial_y P + \partial_z P + \ldots + \partial_t P.$$

Also ist

$$\partial u = a \partial P.$$

II. Wenn ferner, indem a wieder eine constante Grösse bezeichnet,

$$u = a \pm P \pm Q \pm R \pm \ldots \pm V$$

ist; so ist nach §. 38.

$$\partial_x u = \pm \partial_x P \pm \partial_x Q \pm \partial_x R \pm \ldots \pm \partial_x V,$$
$$\partial_y u = \pm \partial_y P \pm \partial_y Q \pm \partial_y R \pm \ldots \pm \partial_y V,$$
$$\partial_z u = \pm \partial_z P \pm \partial_z Q \pm \partial_z R \pm \ldots \pm \partial_z V,$$

u. s. w.

$$\partial_t u = \pm \partial_t P \pm \partial_t Q \pm \partial_t R \pm \ldots \pm \partial_t V;$$

und folglich

$$\begin{aligned} &\partial_x u + \partial_y u + \partial_z u + \ldots + \partial_t u \\ &= \pm (\partial_x P + \partial_y P + \partial_z P + \ldots + \partial_t P) \\ &\quad \pm (\partial_x Q + \partial_y Q + \partial_z Q + \ldots + \partial_t Q) \\ &\quad \pm (\partial_x R + \partial_y R + \partial_z R + \ldots + \partial_t R) \\ &\quad \ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\quad \pm (\partial_x V + \partial_y V + \partial_z V + \ldots + \partial_t V), \end{aligned}$$

d. i. nach §. 130.

$$\partial u = \pm \partial P \pm \partial Q \pm \partial R \pm \ldots \pm \partial V.$$

III. Sey jetzt $u = PQ$; so ist nach §. 40.

$$\partial_x u = P \partial_x Q + Q \partial_x P,$$
$$\partial_y u = P \partial_y Q + Q \partial_y P,$$
$$\partial_z u = P \partial_z Q + Q \partial_z P,$$

u. s. w.

$$\partial_t u = P \partial_t Q + Q \partial_t P,$$

und folglich

$$\begin{aligned} &\partial_x u + \partial_y u + \partial_z u + \ldots + \partial_t u \\ &= P(\partial_x Q + \partial_y Q + \partial_z Q + \ldots + \partial_t Q) \\ &\quad + Q(\partial_x P + \partial_y P + \partial_z P + \ldots + \partial_t P), \end{aligned}$$

d. i. nach §. 130.

$$\partial u = P \partial Q + Q \partial P$$

oder

$$\frac{\partial u}{u} = \frac{\partial P}{P} + \frac{\partial Q}{Q}.$$

IV. Für $u = PQR$ ergiebt sich hieraus leicht

$$\frac{\partial u}{u} = \frac{\partial P}{P} + \frac{\partial Q}{Q} + \frac{\partial R}{R},$$

und für $u = PQRS$ folgt hieraus ferner

$$\frac{\partial u}{u} = \frac{\partial P}{P} + \frac{\partial Q}{Q} + \frac{\partial R}{R} + \frac{\partial S}{S}.$$

Auch ist klar, wie man auf diese Art immer weiter gehen kann.

V. Für $u = \frac{P}{Q}$ ist nach §. 42.

$$\partial_x u = \frac{Q\partial_x P - P\partial_x Q}{Q^2},$$

$$\partial_y u = \frac{Q\partial_y P - P\partial_y Q}{Q^2},$$

$$\partial_z u = \frac{Q\partial_z P - P\partial_z Q}{Q^2},$$

u. s. w.

$$\partial_t u = \frac{Q\partial_t P - P\partial_t Q}{Q^2},$$

und folglich

$$\partial_x u + \partial_y u + \partial_z u + \ldots + \partial_t u$$
$$= \frac{Q(\partial_x P + \partial_y P + \ldots + \partial_t P) - P(\partial_x Q + \partial_y Q + \ldots + \partial_t Q)}{Q^2},$$

d. i. nach §. 130.

$$\partial u = \frac{Q\partial P - P\partial Q}{Q^2}.$$

VI. Wir wollen jetzt annehmen, dass, indem n eine constante Grösse bezeichnet,

$$u = P^n,$$

und dass in den Fällen, wo n ein in den kleinsten Zahlen ausgedrückter Bruch mit einem geraden Nenner ist, P positiv sey; so ist nach §. 45.

$$\partial_x u = nP^{n-1}\partial_x P,$$
$$\partial_y u = nP^{n-1}\partial_y P,$$
$$\partial_z u = nP^{n-1}\partial_z P,$$

u. s. w.

$$\partial_t u = nP^{n-1}\partial_t P,$$

wo in allen den Fällen, wo n ein Bruch mit einem geraden Nenner ist, P^{n-1} mit demselben Vorzeichen zu nehmen ist, mit dem man P^n genommen hat.

Also ist

$$\partial_x u + \partial_y u + \partial_z u + \ldots + \partial_t u$$
$$= nP^{n-1}(\partial_x P + \partial_y P + \partial_z P + \ldots + \partial_t P),$$

d. i. nach §. 130.

$$\partial u = nP^{n-1}\partial P.$$

VII. Wenn $u = e^P$, ist, so ist

$$\partial_x u = e^P \partial_x P,\ \partial_y u = e^P \partial_y P,\ \ldots\ \partial_t u = e^P \partial_t P,$$

und folglich

$$\partial_x u + \partial_y u + \partial_z u + \ldots + \partial_t u$$
$$= e^P(\partial_x P + \partial_y P + \partial_z P + \ldots + \partial_t P),$$

d. i. nach §. 130.

$$\partial u = e^P \partial P.$$

VIII. Wenn $u = lP$ und P positiv ist, so ist

$$\partial_x u = \frac{\partial_x P}{P},\ \partial_y u = \frac{\partial_y P}{P},\ \partial_z u = \frac{\partial_z P}{P},\ \ldots\ \partial_t u = \frac{\partial_t P}{P},$$

und folglich

$$\partial_x u + \partial_y u + \partial_z u + \ldots + \partial_t u$$
$$= \frac{\partial_x P + \partial_y P + \partial_z P + \ldots + \partial_t P}{P},$$

d. i. nach §. 130.

$$\partial u = \frac{\partial P}{P}.$$

IX. Für $u = \sin P$ ist

$$\partial_x u = \cos P \partial_x P,$$
$$\partial_y u = \cos P \partial_y P,$$
$$\partial_z u = \cos P \partial_z P,$$
u. s. w.
$$\partial_t u = \cos P \partial_t P,$$

und folglich

$$\partial_x u + \partial_y u + \partial_z u + \ldots + \partial_t u$$
$$= \cos P(\partial_x P + \partial_y P + \partial_z P + \ldots + \partial_t P),$$

d. i. nach §. 130.

$$\partial u = \cos P \partial P.$$

X. Für $u = \cos P$ ist

$$\partial_x u = -\sin P \partial_x P,$$
$$\partial_y u = -\sin P \partial_y P,$$
$$\partial_z u = -\sin P \partial_z P,$$
u. s. w.
$$\partial_t u = -\sin P \partial_t P;$$

und folglich

$$\partial_x u + \partial_y u + \partial_z u + \ldots + \partial_t u$$
$$= -\sin P(\partial_x P + \partial_y P + \partial_z P + \ldots + \partial_t P),$$

d. i. nach §. 130.

$$\partial u = -\sin P \partial P.$$

XI. Für $u = Arctang\,P$ ist

$$\partial_x u = \frac{\partial_x P}{1+P^2},\ \partial_y u = \frac{\partial_y P}{1+P^2},\ \ldots\ \partial_t u = \frac{\partial_t P}{1+P^2},$$

und folglich

$$\partial_x u + \partial_y u + \partial_z u + \ldots + \partial_t u$$
$$= \frac{\partial_x P + \partial_y P + \partial_z P + \ldots + \partial_t P}{1+P^2},$$

d. i. nach §. 130.

$$\partial u = \frac{\partial P}{1+P^2}.$$

XII. Für $u = Arc\cot P$ ist eben so

$$\partial_x u = -\frac{\partial_x P}{1+P^2},\ \partial_y u = -\frac{\partial_y P}{1+P^2},\ \ldots\ \partial_t u = -\frac{\partial_t P}{1+P^2},$$

und folglich

$$\partial_x u + \partial_y u + \partial_z u + \ldots + \partial_t u$$
$$= -\frac{\partial_x P + \partial_y P + \partial_z P + \ldots + \partial_t P}{1+P^2},$$

d. i. nach §. 130.

$$\partial u = -\frac{\partial P}{1+P^2}.$$

Die obigen Bemerkungen würden sich leicht vervielfältigen lassen.

§. 133.

Lehrsatz. Wenn

$$u = f(x, y)$$

eine Function der beiden veränderlichen Grössen x, y ist, oder wenigstens als eine bloss von diesen beiden veränderlichen Grössen abhängende Function betrachtet wird; so ist jederzeit

$$\partial_x \partial_y u = \partial_y \partial_x u.$$

Beweis. Die Veränderung, welche die Function u erleidet, wenn, indem y ungeändert bleibt, bloss x sich um Δx ändert, bezeichne man durch $\Delta_x u$; so ist

$$1.\quad \Delta_x u = f(x+\Delta x, y) - f(x, y),$$

und folglich, wenn man bloss in Bezug auf y als veränderliche Grösse differentiirt,

$$2.\quad \partial_y \Delta_x u = \partial_y f(x+\Delta x, y) - \partial_y f(x, y).$$

Setzen wir nun

$$3.\quad \partial_y f(x, y) = \varphi(x, y)\,.\,\partial y;$$

so ist, weil diese Gleichung für jedes x gilt,

$$4.\quad \partial_y f(x + \Delta x, y) = \varphi(x + \Delta x, y).\partial y;$$

und folglich nach 2.

$$5.\quad \partial_y \Delta_x u = \varphi(x + \Delta x, y).\partial y - \varphi(x, y).\partial y.$$

Aus der Gleichung 3., die man auch kürzer

$$6.\quad \partial_y u = \varphi(x, y).\partial y$$

schreiben kann, folgt, wenn man x in $x + \Delta x$ übergehen lässt, auf der Stelle

$$7.\quad \Delta_x \partial_y u = \varphi(x + \Delta x, y).\partial y - \varphi(x, y).\partial y.$$

Folglich ist nach 5. und 7.

$$8.\quad \Delta_x \partial_y u = \partial_y \Delta_x u;$$

also auch

$$9.\quad \frac{\Delta_x \partial_y u}{\Delta x} = \frac{\partial_y \Delta_x u}{\Delta x},$$

oder

$$10.\quad \frac{\Delta_x \partial_y u}{\Delta x} = \partial_y \left(\frac{\Delta_x u}{\Delta x}\right).$$

Da diese Gleichung für jedes Δx gilt; so gilt dieselbe offenbar auch für die Gränzen, denen

$$\frac{\Delta_x \partial_y u}{\Delta x} \text{ und } \frac{\Delta_x u}{\Delta x}$$

sich nähern, wenn Δx sich der Null nähert, und es ist folglich

$$11.\quad Lim \frac{\Delta_x \partial_y u}{\Delta x} = \partial_y Lim \frac{\Delta_x u}{\Delta x}.$$

Nach dem allgemeinen Begriffe des Differentialquotienten ist aber

$$12.\quad Lim \frac{\Delta_x \partial_y u}{\Delta x} = \frac{\partial_x \partial_y u}{\partial x},\quad Lim \frac{\Delta_x u}{\Delta x} = \frac{\partial_x u}{\partial x}.$$

Also ist

$$13.\quad \frac{\partial_x \partial_y u}{\partial x} = \partial_y \left(\frac{\partial_x u}{\partial x}\right)$$

und folglich auch

$$14.\quad \frac{\partial_x \partial_y u}{\partial x} \partial x = \partial_y \left(\frac{\partial_x u}{\partial x}\right).\partial x.$$

Nach dem Begriffe des Differentials ist aber

$$15.\quad \partial_x \partial_y u = \frac{\partial_x \partial_y u}{\partial x} \partial x,$$

und ferner ist, weil ∂x eine constante Grösse ist,

$$16.\quad \partial_y \left(\frac{\partial_x u}{\partial x}\right).\partial x = \partial_y \left(\frac{\partial_x u}{\partial x} \partial x\right) = \partial_y \partial_x u.$$

Also ist nach 14.

$$17.\quad \partial_x \partial_y u = \partial_y \partial_x u,$$

wie bewiesen werden sollte.

XI. Für $u = Arctang\, P$ ist

$$\partial_x u = \frac{\partial_x P}{1+P^2},\ \partial_y u = \frac{\partial_y P}{1+P^2},\ \ldots\ \partial_t u = \frac{\partial_t P}{1+P^2},$$

und folglich

$$\partial_x u + \partial_y u + \partial_z u + \ldots + \partial_t u$$
$$= \frac{\partial_x P + \partial_y P + \partial_z P + \ldots + \partial_t P}{1+P^2},$$

d. i. nach §. 130.

$$\partial u = \frac{\partial P}{1+P^2}.$$

XII. Für $u = Arc\cot P$ ist eben so

$$\partial_x u = -\frac{\partial_x P}{1+P^2},\ \partial_y u = -\frac{\partial_y P}{1+P^2},\ \ldots\ \partial_t u = -\frac{\partial_t P}{1+P^2},$$

und folglich

$$\partial_x u + \partial_y u + \partial_z u + \ldots + \partial_t u$$
$$= -\frac{\partial_x P + \partial_y P + \partial_z P + \ldots + \partial_t P}{1+P^2},$$

d. i. nach §. 130.

$$\partial u = -\frac{\partial P}{1+P^2}.$$

Die obigen Bemerkungen würden sich leicht vervielfältigen lassen.

§. 133.

Lehrsatz. Wenn

$$u = f(x, y)$$

eine Function der beiden veränderlichen Grössen x, y ist, oder wenigstens als eine bloss von diesen beiden veränderlichen Grössen abhängende Function betrachtet wird; so ist jederzeit

$$\partial_x \partial_y u = \partial_y \partial_x u.$$

Beweis. Die Veränderung, welche die Function u erleidet, wenn, indem y ungeändert bleibt, bloss x sich um Δx ändert, bezeichne man durch $\Delta_x u$; so ist

$$1.\quad \Delta_x u = f(x+\Delta x, y) - f(x, y),$$

und folglich, wenn man bloss in Bezug auf y als veränderliche Grösse differentiirt,

$$2.\quad \partial_y \Delta_x u = \partial_y f(x+\Delta x, y) - \partial_y f(x, y).$$

Setzen wir nun

$$3.\quad \partial_y f(x, y) = \varphi(x, y)\,.\,\partial y;$$

so ist, weil diese Gleichung für jedes x gilt,

$$4. \quad \partial_y f(x + \Delta x, y) = \varphi(x + \Delta x, y).\partial y;$$

und folglich nach 2.

$$5. \quad \partial_y \Delta_x u = \varphi(x + \Delta x, y).\partial y - \varphi(x, y).\partial y.$$

Aus der Gleichung 3., die man auch kürzer

$$6. \quad \partial_y u = \varphi(x, y).\partial y$$

schreiben kann, folgt, wenn man x in $x + \Delta x$ übergehen lässt, auf der Stelle

$$7. \quad \Delta_x \partial_y u = \varphi(x + \Delta x, y).\partial y - \varphi(x, y).\partial y.$$

Folglich ist nach 5. und 7.

$$8. \quad \Delta_x \partial_y u = \partial_y \Delta_x u;$$

also auch

$$9. \quad \frac{\Delta_x \partial_y u}{\Delta x} = \frac{\partial_y \Delta_x u}{\Delta x},$$

oder

$$10. \quad \frac{\Delta_x \partial_y u}{\Delta x} = \partial_y \left(\frac{\Delta_x u}{\Delta x}\right).$$

Da diese Gleichung für jedes Δx gilt; so gilt dieselbe offenbar auch für die Gränzen, denen

$$\frac{\Delta_x \partial_y u}{\Delta x} \text{ und } \frac{\Delta_x u}{\Delta x}$$

sich nähern, wenn Δx sich der Null nähert, und es ist folglich

$$11. \quad Lim \frac{\Delta_x \partial_y u}{\Delta x} = \partial_y Lim \frac{\Delta_x u}{\Delta x}.$$

Nach dem allgemeinen Begriffe des Differentialquotienten ist aber

$$12. \quad Lim \frac{\Delta_x \partial_y u}{\Delta x} = \frac{\partial_x \partial_y u}{\partial x}, \quad Lim \frac{\Delta_x u}{\Delta x} = \frac{\partial_x u}{\partial x}.$$

Also ist

$$13. \quad \frac{\partial_x \partial_y u}{\partial x} = \partial_y \left(\frac{\partial_x u}{\partial x}\right)$$

und folglich auch

$$14. \quad \frac{\partial_x \partial_y u}{\partial x} \partial x = \partial_y \left(\frac{\partial_x u}{\partial x}\right).\partial x.$$

Nach dem Begriffe des Differentials ist aber

$$15. \quad \partial_x \partial_y u = \frac{\partial_x \partial_y u}{\partial x} \partial x,$$

und ferner ist, weil ∂x eine constante Grösse ist,

$$16. \quad \partial_y \left(\frac{\partial_x u}{\partial x}\right).\partial x = \partial_y \left(\frac{\partial_x u}{\partial x} \partial x\right) = \partial_y \partial_x u.$$

Also ist nach 14.

$$17. \quad \partial_x \partial_y u = \partial_y \partial_x u,$$

wie bewiesen werden sollte.

Für die Function

$$u = Arc\,tang\,\frac{x}{y}$$

ist z. B. nach §. 128.

$$\partial_y u = -\frac{x}{x^2+y^2}\partial y,\quad \partial_x u = \frac{y}{x^2+y^2}\partial x.$$

Hieraus erhält man ferner

$$\partial_x\partial_y u = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\partial x\,\partial y,\quad \partial_y\partial_x u = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\partial x\,\partial y,$$

so dass also wirklich in diesem Falle

$$\partial_x\partial_y u = \partial_y\partial_x u$$

ist, wie es nach dem bewiesenen allgemeinen Satze seyn muss.

Bemerkung. Man kann die vorher bewiesene Gleichung auch unter der Form

$$\frac{\partial\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)}{\partial x} = \frac{\partial\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)}{\partial y},$$

wo alle Differentialquotienten partielle Differentialquotienten sind, oder, wenn man sich einer leicht verständlichen abkürzenden Bezeichnung bedient, unter der Form

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial x}$$

darstellen, d. h. man erhält jederzeit einerlei Resultat, wenn man zuerst den partiellen Differentialquotienten der Function u in Bezug auf y als veränderliche Grösse, und von diesem Differentialquotienten dann den partiellen Differentialquotienten in Bezug auf x als veränderliche Grösse entwickelt, oder die Ordnung dieser Differentiationen umkehrt.

Dies lässt sich sehr leicht auf folgende Art aus dem vorher bewiesenen Lehrsatze herleiten.

Es ist

$$\partial_y u = \frac{\partial u}{\partial y}\partial y,$$

und folglich, wenn man nach x differentiirt,

$$\partial_x\partial_y u = \frac{\partial\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)}{\partial x}\partial x\,\partial y.$$

Ganz eben so findet man

$$\partial_y\partial_x u = \frac{\partial\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)}{\partial y}\partial x\,\partial y.$$

Weil nun nach dem vorher bewiesenen Lehrsatze

$$\partial_x\partial_y u = \partial_y\partial_x u$$

ist; so ist

$$\frac{\partial\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)}{\partial x}\partial x\partial y=\frac{\partial\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)}{\partial y}\partial x\partial y,$$

und folglich

$$\frac{\partial\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)}{\partial x}=\frac{\partial\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)}{\partial y},$$

oder

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x},$$

wie bewiesen werden sollte.

§. 134.

Zusatz. Wenn $u=f(x,y)$ eine Function der beiden veränderlichen Grössen x, y ist, und α, β zwei beliebige positive ganze Zahlen sind; so ist immer

$$\partial_x^\alpha \partial_y^\beta u=\partial_y^\beta \partial_x^\alpha u.$$

Dieser Satz lässt sich auf folgende Art leicht beweisen.

I. Nach §. 133. ist

$$1.\quad \partial_x\partial_y u=\partial_y\partial_x u,$$

und folglich auch

$$2.\quad \partial_x\partial_x\partial_y u=\partial_x\partial_y\partial_x u.$$

Aber

$$3.\quad \partial_x\partial_x\partial_y u=\partial_x^2\partial_y u$$

und nach §. 133.

$$4.\quad \partial_x\partial_y\partial_x u=\partial_y\partial_x\partial_x u=\partial_y\partial_x^2 u.$$

Also ist

$$5.\quad \partial_x^2\partial_y u=\partial_y\partial_x^2 u.$$

Folglich ist auch

$$6.\quad \partial_x\partial_x^2\partial_y u=\partial_x\partial_y\partial_x^2 u.$$

Aber

$$7.\quad \partial_x\partial_x^2\partial_y u=\partial_x^3\partial_y u$$

und nach §. 133.

$$8.\quad \partial_x\partial_y\partial_x^2 u=\partial_y\partial_x\partial_x^2 u=\partial_y\partial_x^3 u.$$

Also ist

$$9.\quad \partial_x^3\partial_y u=\partial_y\partial_x^3 u$$

und folglich auch

$$10.\quad \partial_x\partial_x^3\partial_y u=\partial_x\partial_y\partial_x^3 u.$$

Aber

$$11.\quad \partial_x\partial_x^3\partial_y u=\partial_x^4\partial_y u$$

und nach §. 133.

$$12.\quad \partial_x \partial_y \partial_x^3 u = \partial_y \partial_x \partial_x^3 u = \partial_y \partial_x^4 u .$$

Also ist

$$13.\quad \partial_x^4 \partial_y u = \partial_y \partial_x^4 u .$$

Wie man auf diese Art weiter gehen kann, ist klar, und e folglich offenbar allgemein

$$\partial_x^\alpha \partial_y u = \partial_y \partial_x^\alpha u .$$

II. Daher ist nun ferner

$$1.\quad \partial_y \partial_x^\alpha \partial_y u = \partial_y \partial_y \partial_x^\alpha u .$$

Aber nach I.

$$2.\quad \partial_y \partial_x^\alpha \partial_y u = \partial_x^\alpha \partial_y \partial_y u = \partial_x^\alpha \partial_y^2 u$$

und

$$3.\quad \partial_y \partial_y \partial_x^\alpha u = \partial_y^2 \partial_x^\alpha u .$$

Also ist

$$4.\quad \partial_x^\alpha \partial^2 y = \partial_y^2 \partial_x^\alpha u ,$$

und folglich

$$5.\quad \partial_y \partial_x^\alpha \partial^2 y = \partial_y \partial_y^2 \partial_x^\alpha u .$$

Aber nach I.

$$6.\quad \partial_y \partial_x^\alpha \partial_y^2 u = \partial_x^\alpha \partial_y \partial_y^2 u = \partial_x^\alpha \partial_y^3 u$$

und

$$7.\quad \partial_y \partial_y^2 \partial_x^\alpha u = \partial_y^3 \partial_x^\alpha u .$$

Also ist

$$8.\quad \partial_x^\alpha \partial_y^3 u = \partial_y^3 \partial_x^\alpha u .$$

Wie man auf diese Art weiter gehen kann, erhellet hie schon deutlich genug, und es ist folglich offenbar allgemein

$$\partial_x^\alpha \partial_y^\beta u = \partial_y^\beta \partial_x^\alpha u ,$$

wie bewiesen werden sollte.

Bemerkung. Die in diesem Zusatze bewiesene Gleich lässt sich auch unter der Form

$$\frac{\partial^\alpha\left(\frac{\partial^\beta u}{\partial y^\beta}\right)}{\partial x^\alpha} = \frac{\partial^\beta\left(\frac{\partial^\alpha u}{\partial x^\alpha}\right)}{\partial y^\beta} ,$$

wo alle Differentialquotienten partielle Differentialquotienten s oder mittelst einer, der in der Bemerkung zum vorigen L satze gebrauchten ähnlichen, leicht verständlichen abkürzen Bezeichnung, unter der Form

$$\frac{\partial^{\alpha+\beta} u}{\partial x^\alpha \partial y^\beta} = \frac{\partial^{\alpha+\beta} u}{\partial y^\beta \partial x^\alpha}$$

darstellen, wie auf folgende Art leicht bewiesen werden kann.

Es ist

$$\partial_y^\beta u = \frac{\partial^\beta u}{\partial y^\beta} \partial y^\beta,$$

und folglich, wenn man αmal nach x differentiirt,

$$\partial_x^\alpha \partial_y^\beta u = \frac{\partial^\alpha \left(\frac{\partial^\beta u}{\partial y^\beta}\right)}{\partial x^\alpha} \partial x^\alpha \partial y^\beta.$$

Ganz auf dieselbe Art erhält man

$$\partial_y^\beta \partial_x^\alpha u = \frac{\partial^\beta \left(\frac{\partial^\alpha u}{\partial x^\alpha}\right)}{\partial y^\beta} \partial x^\alpha \partial y^\beta.$$

Weil nun nach dem vorher Bewiesenen

$$\partial_x^\alpha \partial_y^\beta u = \partial_y^\beta \partial_x^\alpha u$$

ist; so ist

$$\frac{\partial^\alpha \left(\frac{\partial^\beta u}{\partial y^\beta}\right)}{\partial x^\alpha} \partial x^\alpha \partial y^\beta = \frac{\partial^\beta \left(\frac{\partial^\alpha u}{\partial x^\alpha}\right)}{\partial y^\beta} \partial x^\alpha \partial y^\beta,$$

und folglich

$$\frac{\partial^\alpha \left(\frac{\partial^\beta u}{\partial y^\beta}\right)}{\partial x^\alpha} = \frac{\partial^\beta \left(\frac{\partial^\alpha u}{\partial x^\alpha}\right)}{\partial y^\beta}$$

oder

$$\frac{\partial^{\alpha+\beta} u}{\partial x^\alpha \partial y^\beta} = \frac{\partial^{\alpha+\beta} u}{\partial y^\beta \partial x^\alpha},$$

wie bewiesen werden sollte.

§. 135.

Lehrsatz. Wenn

$$u = f(x, y, z, v, \ldots s, t)$$

eine Function der beliebig vielen veränderlichen Grössen $x, y, z, v, \ldots s, t$ ist, oder wenigstens als eine bloss von diesen veränderlichen Grössen abhängende Function betrachtet wird; so bleibt der Ausdruck

$$\partial_x \partial_y \partial_z \partial_v \ldots \partial_s \partial_t u$$

völlig ungeändert, wie man auch die Symbole

$$\partial_x, \partial_y, \partial_z, \partial_v, \ldots \partial_s, \partial_t$$

unter einander versetzen mag.

Beweis. Für Functionen mit zwei veränderlichen Grössen ist der Satz schon in §. 133. bewiesen worden.

Wir wollen nun die Anzahl der veränderlichen Grössen x, y, z, v, ... s, t, von denen zwei beliebige durch p und q bezeichnet werden mögen, $= n + 1$ setzen, und nehmen den zu beweisenden Satz bis zu Functionen mit n veränderlichen Grössen als gültig oder schon bewiesen an.

Zwei beliebige Permutationen der Symbole

$$\partial_x, \partial_y, \partial_z, \partial_v, \ldots \partial_s, \partial_t,$$

wenn man das eine Mal das Glied ∂_p, das andere Mal das Glied ∂_q aus dieser Reihe weglässt, sollen respective durch P_p und P'_q bezeichnet werden. Dann kann man zwei beliebige Permutationen der sämmtlichen Symbole

$$\partial_x, \partial_y, \partial_z, \partial_v, \ldots \partial_s, \partial_t$$

durch $P_p \partial_p$ und $P'_q \partial_q$ bezeichnen, und soll nun beweisen, dass

$$P_p \partial_p u = P'_q \partial_q u$$

ist.

Weil nach der Voraussetzung der Satz für Functionen mit n veränderlichen Grössen gilt; so kann man, indem man jetzt $\partial_p u$ als die Function betrachtet, von welcher die Differentiale zu nehmen sind, die Elemente der Permutation P_p so unter einander versetzen, dass das Element ∂_q in die letzte Stelle kommt, d. h. man kann

$$P_p \partial_p u = \Pi_{p,q} \partial_q \partial_p u$$

setzen, wo $\Pi_{p,q}$ eine beliebige Permutation der Elemente

$$\partial_x, \partial_y, \partial_z, \partial_v, \ldots \partial_s, \partial_t$$

nach Weglassung der beiden Elemente ∂_p und ∂_q bezeichnet; und ganz auf ähnliche Art kann man

$$P'_q \partial_q u = \Pi'_{p,q} \partial_p \partial_q u$$

setzen.

Weil nun aber nach §. 133.

$$\partial_q \partial_p u = \partial_p \partial_q u$$

ist, weil ferner die beiden Permutationen $\Pi_{p,q}$ und $\Pi'_{p,q}$ ganz dieselben Elemente enthalten, und weil nach der Voraus-

setzung der zu beweisende Satz für Functionen mit $n-1$ veränderlichen Grössen gilt; so ist offenbar

$$\Pi_{p,q}\partial_q\partial_p u = \Pi'_{p,q}\partial_p\partial_q u,$$

d. i. nach dem Vorhergehenden

$$P_p\partial_p u = P'_q\partial_q u,$$

wie bewiesen werden sollte.

Man sieht also, dass der Satz für Functionen mit $n+1$ veränderlichen Grössen gilt, wenn er bis zu Functionen mit n veränderlichen Grössen gilt.

Hieraus folgt die allgemeine Richtigkeit des Satzes nach einer bekannten Schlussweise mittelst §. 133.

§. 136.

Zusatz. Wenn

$$u = f(x, y, z, v, \ldots s, t)$$

eine Function der beliebig vielen veränderlichen Grössen $x, y, z, v, \ldots s, t$ ist, oder wenigstens als eine bloss von diesen veränderlichen Grössen abhängende Function betrachtet wird; so bleibt der Ausdruck

$$\partial_x^\alpha \partial_y^\beta \partial_z^\gamma \partial_v^\delta \ldots \partial_s^\varkappa \partial_t^\lambda u,$$

wo $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \ldots \varkappa, \lambda$ beliebige positive ganze Zahlen bezeichnen, völlig ungeändert, wie man auch in demselben die Symbole

$$\partial_x^\alpha,\ \partial_y^\beta,\ \partial_z^\gamma,\ \partial_v^\delta, \ldots \partial_s^\varkappa,\ \partial_t^\lambda$$

unter einander versetzen mag.

Dieser Satz wird ganz eben so aus §. 134. hergeleitet, wie der in §. 135. bewiesene Satz aus §. 133. hergeleitet worden ist.

§. 137.

Wir wollen nun annehmen, dass

$$u = f(p, q, s, t, \ldots v, w)$$

eine beliebige Function der veränderlichen Grössen $p, q, s, t, \ldots v, w$ sey, dass aber diese veränderlichen Grössen keine unabhängigen veränderlichen Grössen seyen, sondern dass jede derselben eine Function der von einander unabhängigen veränderlichen Grössen $x, y, z, \ldots$ sey, und wollen nun das vollständige Differential von u zu entwickeln suchen.

Zu dem Ende denken wir uns, dass die unabhängigen veränderlichen Grössen $x, y, z, \ldots$ die Aenderungen $\alpha\partial x$, $\alpha\partial y$,

$w\partial z$; ..., wo ∂x, ∂y, ∂z, ... wie immer beliebige constante Grössen bezeichnen, erleiden, und bezeichnen die dadurch herbeigeführten Aenderungen der Functionen $p, q, s, t, \ldots v, w$ respective durch $\Delta p, \Delta q, \Delta s, \Delta t, \ldots \Delta v, \Delta w$, den veränderten Werth der Function u also durch

$$f(p+\Delta p,\ q+\Delta q,\ s+\Delta s,\ t+\Delta t, \ldots v+\Delta v,\ w+\Delta w).$$

Ferner wollen wir, unter der Voraussetzung, dass n die Anzahl der Grössen $p, q, s, t, \ldots v, w$ ist, die Functionen

$$f(p, q, s, t, \ldots v, w),$$
$$f(p+\Delta p, q, s, t, \ldots v, w),$$
$$f(p+\Delta p, q+\Delta q, s, t, \ldots v, w),$$
$$f(p+\Delta p, q+\Delta q, s+\Delta s, t, \ldots v, w)$$

u. s. w.

$$f(p+\Delta p,\ q+\Delta q,\ s+\Delta s,\ t+\Delta t, \ldots w+\Delta w)$$

der Kürze wegen respective durch $u, u_1, u_2, u_3, \ldots u_n$ bezeichnen; so ist, wenn jetzt wieder $\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3, \varrho_4, \ldots \varrho_{n-1}, \varrho_n$ gewisse positive echte Brüche bezeichnen, nach §. 110. II.

$$u_1 - u = f'_p(p+\varrho_1\Delta p, q, s, t, \ldots v, w).\Delta p,$$
$$u_2 - u_1 = f'_q(p+\Delta p, q+\varrho_2\Delta q, s, t, \ldots v, w).\Delta q,$$
$$u_3 - u_2 = f'_s(p+\Delta p, q+\Delta q, s+\varrho_3\Delta s, t, \ldots v, w).\Delta s,$$

u. s. w.

$$u_n - u_{n-1} = f'_w(p+\Delta p, q+\Delta q, s+\Delta s, \ldots v+\Delta v, w+\varrho_n\Delta w).\Delta w,$$

und folglich, wenn man auf beiden Seiten addirt,

$$\begin{aligned} &u_n - u \\ = &f'_p(p+\varrho_1\Delta p, q, s, t, \ldots v, w).\Delta p \\ &+f'_q(p+\Delta p, q+\varrho_2\Delta q, s, t, \ldots v, w).\Delta q \\ &+f'_s(p+\Delta p, q+\Delta q, s+\varrho_3\Delta s, t, \ldots v, w).\Delta s \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &+f'_w(p+\Delta p, q+\Delta q, s+\Delta s, \ldots v+\Delta v, w+\varrho_n\Delta w).\Delta w. \end{aligned}$$

Setzen wir nun wie in §. 129. $u_n = F(\alpha)$; so ist offenbar $u = F(0)$, und folglich

$$\begin{aligned} &\frac{F(\alpha)-F(0)}{\alpha} \\ = &f'_p(p+\varrho_1\Delta p, q, s, t, \ldots v, w).\frac{\Delta p}{\alpha} \\ &+f'_q(p+\Delta p, q+\varrho_2\Delta q, s, t, \ldots v, w).\frac{\Delta q}{\alpha} \\ &+f'_s(p+\Delta p, q+\Delta q, s+\varrho_3\Delta s, t, \ldots v, w).\frac{\Delta s}{\alpha} \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &+f'_w(p+\Delta p, q+\Delta q, s+\Delta s, \ldots v+\Delta v, w+\varrho_n\Delta w).\frac{\Delta w}{\alpha}. \end{aligned}$$

Stellen wir uns jetzt vor, dass α sich der Null nähert, und *gehen* zu den Gränzen über; so ist nach §. 129.

$$Lim \frac{F(\alpha) - F(0)}{\alpha} = Lim \frac{\Delta u}{\alpha} = \partial u ,$$

und ganz eben so

$$Lim \frac{\Delta p}{\alpha} = \partial p, \quad Lim \frac{\Delta q}{\alpha} = \partial q, \quad Lim \frac{\Delta s}{\alpha} = \partial s, \ldots Lim \frac{\Delta w}{\alpha} = \partial w,$$

wo ∂u, ∂p, ∂q, ∂s, ... ∂w die vollständigen Differentiale der Functionen u, p, q, s, ... w sind. Die Differenzen

$$\Delta p, \Delta q, \Delta s, \Delta t, \ldots \Delta v, \Delta w,$$

und folglich, weil ϱ_1, ϱ_2, ϱ_3, ϱ_4, ... ϱ_{n-1}, ϱ_n positive echte Brüche sind, auch die Producte

$$\varrho_1 \Delta p, \ \varrho_2 \Delta q, \ \varrho_3 \Delta s, \ \varrho_4 \Delta t, \ldots \varrho_{n-1} \Delta v, \ \varrho_n \Delta w,$$

nähern sich, wenn α sich der Null nähert, offenbar sämmtlich der Null als ihrer Gränze. Daher nähern die Grössen

$$f'_p(p + \varrho_1 \Delta p, q, s, t, \ldots v, w),$$
$$f'_p(p + \Delta p, q + \varrho_2 \Delta q, s, t, \ldots v, w),$$
$$f'_s(p + \Delta p, q + \Delta q, s + \varrho_3 \Delta s, t, \ldots v, w),$$
u. s. w.
$$f'_w(p + \Delta p, q + \Delta q, s + \Delta s, \ldots v + \Delta v, w + \varrho_n \Delta w)$$

sich, wenn α sich der Null nähert, offenbar respective den Grössen

$$f'_p(p, q, s, t, \ldots v, w),$$
$$f'_q(p, q, s, t, \ldots v, w),$$
$$f'_s(p, q, s, t, \ldots v, w),$$
u. s. w.
$$f'_w(p, q, s, t, \ldots v, w)$$

als ihren Gränzen, und aus der obigen Gleichung ergiebt sich folglich, wenn man auf beiden Seiten die Gränzen nimmt, auf der Stelle die Gleichung

$$\begin{aligned} \partial u = & \ f'_p(p, q, s, t, \ldots v, w) . \partial p \\ & + f'_q(p, q, s, t, \ldots v, w) . \partial q \\ & + f'_s(p, q, s, t, \ldots v, w) . \partial s \\ & \ldots \ldots \ldots \\ & + f'_w(p, q, s, t, \ldots v, w) . \partial w, \end{aligned}$$

oder, weil

$$\partial_p u = f'_p(p, q, s, t, \ldots v, w) . \partial p,$$
$$\partial_q u = f'_q(p, q, s, t, \ldots v, w) . \partial q,$$
$$\partial_s u = f'_s(p, q, s, t, \ldots v, w) . \partial s,$$
u. s. w.
$$\partial_w u = f'_w(p, q, s, t. \ldots v, w) . \partial w$$

ist, die Gleichung

$$\partial u = \partial_p u + \partial_q u + \partial_s u + \ldots \partial_w u .$$

Dass diese Gleichung der in §. 130. gefundenen Gleichung völlig ähnlich ist, fällt auf der Stelle in die Augen. Nur findet der wohl zu beachtende Unterschied Statt, dass die in ∂u enthaltenen Grössen ∂p, ∂q, ∂s, ... ∂w nicht, wie in §. 130. die Grössen ∂x, ∂y, ∂z, ... ∂t, willkührliche constante Grössen, sondern Functionen der unabhängigen veränderlichen Grössen x, y, z, ... und der willkührlichen constanten Grössen ∂x, ∂y, ∂z, ... sind. Will man also das zweite und die höhern Differentiale der Function u entwickeln; so kann man allerdings immer nach der in der Gleichung

$$\partial u = \partial_p u + \partial_q u + \partial_s u + \ldots + \partial_w u$$

enthaltenen Regel verfahren, darf aber, wenn man z. B. von ∂u zu $\partial^2 u$ übergeht, die Differentiale ∂p, ∂q, ∂s, ... ∂w nicht als constante Grössen betrachten, sondern muss dieselben als neue veränderliche Grössen behandeln. Eben so muss man, wenn man von $\partial^2 u$ zu $\partial^3 u$ übergeht, die Grössen ∂p, ∂q, ∂s, ... ∂w; $\partial^2 p$, $\partial^2 q$, $\partial^2 s$, ... $\partial^2 w$ sämmtlich als neue veränderliche Grössen behandeln, u. s. w.

Die partiellen Differentiale der Function $u = pq$ in Bezug auf p und q sind z. B. respective

$$q\partial p \text{ und } p\partial q.$$

Die partiellen Differentiale von ∂u in Bezug auf p, q, ∂p, ∂q sind ferner respective

$$\partial p\partial q,\quad \partial q\partial p,\quad q\partial^2 p,\quad p\partial^2 q.$$

Also ist

$$\partial^2 u = p\partial^2 q + 2\partial p\partial q + q\partial^2 p.$$

Eben so sind die partiellen Differentiale von $\partial^2 u$ in Bezug auf p, q, ∂p, ∂q, $\partial^2 p$, $\partial^2 q$ respective

$$\partial p\partial^2 q,\quad \partial q\partial^2 p,\quad 2\partial^2 p\partial q,\quad 2\partial p\partial^2 q,\quad q\partial^3 p,\quad p\partial^3 q.$$

Also ist

$$\partial^3 u = p\partial^3 q + 3\partial^2 p\partial q + 3\partial p\partial^2 q + q\partial^3 p,$$

und man wird nun schon sehen, wie man auf diese Art weiter gehen kann.

Hat man die beliebige Function

$$u = f(x, y)$$

der beiden veränderlichen Grössen x, y, und betrachtet y als von x abhängig; so ist zuerst

$$\partial u = \frac{\partial u}{\partial x}\partial x + \frac{\partial u}{\partial y}\partial y,$$

und hieraus ergiebt sich ferner leicht nach der oben bewiesenen allgemeinen Regel

$$\partial^2 u = \partial\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right).\partial x + \partial\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right).\partial y + \frac{\partial u}{\partial y}\partial^2 y.$$

Aber

$$\partial\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\partial x+\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\partial y,$$

$$\partial\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\partial x+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\partial y.$$

Also ist

$$\partial^2 u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\partial x^2+2\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\partial x\partial y+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\partial y^2+\frac{\partial u}{\partial y}\partial^2 y.$$

Wie man auf diese Art weiter gehen kann, ist klar. Die Differentialquotienten sind hier natürlich sämmtlich partielle Differentialquotienten.

Achtes Kapitel.

Der Taylor'sche und Maclaurin'sche Satz für Functionen mit mehrern veränderlichen Grössen.

§. 138.

Wir nehmen jetzt wieder an, dass

$$u=f(x, y, z, \ldots)$$

eine Function der von einander unabhängigen veränderlichen Grössen x, y, z, . . . ist, und setzen

$$F(\alpha)=f(x+\alpha\partial x,\ y+\alpha\partial y,\ z+\alpha\partial z,\ \ldots),$$

oder, indem wir der Kürze wegen

$$x+\alpha\partial x=x_1,\ y+\alpha\partial y=y_1,\ z+\alpha\partial z=z_1,\ \ldots$$

setzen,

$$F(\alpha)=f(x_1, y_1, z_1, \ldots).$$

Betrachten wir nun x_1, y_1, z_1, . . . als Functionen von α; so ist

$$\partial x_1=\partial\alpha\partial x,\ \partial y_1=\partial\alpha\partial y,\ \partial z_1=\partial\alpha\partial z,\ \ldots.$$

Nach §. 137. ist aber, wenn immer bloss α als unabhängige veränderliche Grösse betrachtet wird,

$$\partial F(\alpha)=\frac{\partial F(\alpha)}{\partial x_1}\partial x_1+\frac{\partial F(\alpha)}{\partial y_1}\partial y_1+\frac{\partial F(\alpha)}{\partial z_1}\partial z_1+\ldots,$$

wo

$$\frac{\partial F(\alpha)}{\partial x_1},\ \frac{\partial F(\alpha)}{\partial y_1},\ \frac{\partial F(\alpha)}{\partial z_1},\ \ldots$$

die partiellen Differentialquotienten von $F(\alpha)$ in Bezug auf x_1, y_1, z_1, ... als veränderliche Grössen sind. Also ist nach dem Obigen

$$\partial F(\alpha) = \frac{\partial F(\alpha)}{\partial x_1}\partial x\partial\alpha + \frac{\partial F(\alpha)}{\partial y_1}\partial y\,\partial\alpha + \frac{\partial F(\alpha)}{\partial z_1}\partial z\partial\alpha + \ldots.$$

und folglich

$$\frac{\partial F(\alpha)}{\partial\alpha} = \frac{\partial F(\alpha)}{\partial x_1}\partial x + \frac{\partial F(\alpha)}{\partial y_1}\partial y + \frac{\partial F(\alpha)}{\partial z_1}\partial z + \ldots.$$

oder

$$F'(\alpha) = \frac{\partial F(\alpha)}{\partial x_1}\partial x + \frac{\partial F(\alpha)}{\partial y_1}\partial y + \frac{\partial F(\alpha)}{\partial z_1}\partial z + \ldots.$$

Ueberlegt man nun, dass

$$\partial u = \frac{\partial u}{\partial x}\partial x + \frac{\partial u}{\partial y}\partial y + \frac{\partial u}{\partial z}\partial z + \ldots.$$

ist, und dass $F(\alpha)$ aus u hervorgeht, wenn man in u für x, y, z, ... respective x_1, y_1, z_1, ... setzt; so erhellet auf der Stelle, dass auch $F'(\alpha)$ aus ∂u erhalten wird, wenn man in ∂u für x, y, z, ... respective x_1, y_1, z_1, ... setzt.

Da nun wieder nach §. 137. in Bezug auf α als unabhängige veränderliche Grösse

$$\partial F'(\alpha) = \frac{\partial F'(\alpha)}{\partial x_1}\partial x_1 + \frac{\partial F'(\alpha)}{\partial y_1}\partial y_1 + \frac{\partial F'(\alpha)}{\partial z_1}\partial z_1 + \ldots,$$

d. i. nach dem Obigen

$$\partial F'(\alpha) = \frac{\partial F'(\alpha)}{\partial x_1}\partial x\partial\alpha + \frac{\partial F'(\alpha)}{\partial y_1}\partial y\partial\alpha + \frac{\partial F'(\alpha)}{\partial z_1}\partial z\partial\alpha \ldots.$$

ist; so ist

$$\frac{\partial F'(\alpha)}{\partial\alpha} = \frac{\partial F'(\alpha)}{\partial x_1}\partial x + \frac{\partial F'(\alpha)}{\partial y_1}\partial y + \frac{\partial F'(\alpha)}{\partial z_1}\partial z + \ldots.$$

oder

$$F''(\alpha) = \frac{\partial F'(\alpha)}{\partial x_1}\partial x + \frac{\partial F'(\alpha)}{\partial y_1}\partial y + \frac{\partial F'(\alpha)}{\partial z_1}\partial z + \ldots.$$

Ueberlegt man nun wieder, dass

$$\partial^2 u = \frac{\partial\partial u}{\partial x}\partial x + \frac{\partial\partial u}{\partial y}\partial y + \frac{\partial\partial u}{\partial z}\partial z + \ldots.$$

ist, und dass $F'(\alpha)$ aus ∂u hervorgeht, wenn man in ∂u für x, y, z, ... respective x_1, y_1, z_1, ... setzt; so erhellet sehr leicht, dass auch $F''(\alpha)$ aus $\partial^2 u$ erhalten wird, wenn man in $\partial^2 u$ für x, y, z, ... respective x_1, y_1, z_1, ... setzt.

Wie man auf diese Art weiter gehen kann, bedarf keiner Erläuterung mehr. Im Allgemeinen erhellet, dass überhaupt $F^{(n)}(\alpha)$ aus $\partial^n u$ erhalten wird, wenn man in $\partial^n u$ für x, y, z, ... respective x_1, y_1, z_1, ... d. i. $x + \alpha\partial x$, $y + \alpha\partial y$, $z + \alpha\partial z$, ... setzt.

§. 139.

Nach §. 109. ist nun, unter der Voraussetzung, dass die Functionen

$$F(\alpha),\ F'(\alpha),\ F''(\alpha),\ F'''(\alpha),\ \ldots\ F^{(n)}(\alpha)$$

von $\alpha = 0$ bis $\alpha = \alpha$ stetig sind,

$$F(\alpha) = F(0) + \frac{\alpha}{1} F'(0) + \frac{\alpha^2}{1.2} F''(0) + \frac{\alpha^3}{1.2.3} F'''(0) + \ldots$$

$$\ldots + \frac{\alpha^{n-1}}{1\ldots(n-1)} F^{(n-1)}(0) + \frac{\alpha^n}{1\ldots n} F^{(n)}(\varrho\alpha),$$

wo ϱ einen positiven echten Bruch bezeichnet.

Nach §. 138. werden die Grössen

$$F(\alpha),\ F'(\alpha),\ F''(\alpha),\ F'''(\alpha),\ \ldots\ F^{(n-1)}(\alpha)$$

respective aus

$$u,\ \partial u,\ \partial^2 u,\ \partial^3 u,\ \ldots\ \partial^{n-1} u$$

erhalten, wenn man in diesen Functionen für $x, y, z, \ldots$ respective $x + \alpha\partial x$, $y + \alpha\partial y$, $z + \alpha\partial z$, ... setzt.

Also ist offenbar

$$F(0) = u,\ F'(0) = \partial u,\ F''(0) = \partial^2 u,\ \ldots\ F^{(n-1)}(0) = \partial^{n-1} u$$

und folglich

$$F(\alpha) = u + \frac{\alpha}{1}\partial u + \frac{\alpha^2}{1.2}\partial^2 u + \frac{\alpha^3}{1.2.3}\partial^3 u + \ldots$$

$$\ldots + \frac{\alpha^{n-1}}{1\ldots(n-1)}\partial^{n-1} u + \frac{\alpha^n}{1\ldots n} F^{(n)}(\varrho\alpha)$$

oder

$$f(x + \alpha\partial x,\ y + \alpha\partial y,\ z + \alpha\partial z,\ \ldots)$$

$$= u + \frac{\alpha}{1}\partial u + \frac{\alpha^2}{1.2}\partial^2 u + \frac{\alpha^3}{1.2.3}\partial^3 u + \ldots$$

$$\ldots + \frac{\alpha^{n-1}}{1\ldots(n-1)}\partial^{n-1} u + \frac{\alpha^n}{1\ldots n} F^{(n)}(\varrho\alpha),$$

immer unter der Voraussetzung, dass die Functionen

$$F(\alpha),\ F'(\alpha),\ F''(\alpha),\ F'''(\alpha),\ \ldots\ F^{(n)}(\alpha),$$

welche aus

$$u,\ \partial u,\ \partial^2 u,\ \partial^3 u,\ \ldots\ \partial^n u$$

erhalten werden, wenn man für $x, y, z, \ldots$ respective $x + \alpha\partial x$, $y + \alpha\partial y$, $z + \alpha\partial z$, ... setzt, von $\alpha = 0$ bis $\alpha = \alpha$ stetig sind. $F^{(n)}(\varrho\alpha)$ geht aus $\partial^n u$ hervor, wenn man in $\partial^n u$ für x, $y, z, \ldots$ respective $x + \varrho\alpha\partial x$, $y + \varrho\alpha\partial y$, $z + \varrho\alpha\partial z$, ... setzt, und ϱ bezeichnet immer einen positiven echten Bruch.

Für $\alpha = 1$ ergiebt sich

$$f(x + \partial x,\ y + \partial y,\ z + \partial z,\ \ldots)$$

$$= u + \frac{\partial u}{1} + \frac{\partial^2 u}{1.2} + \frac{\partial^3 u}{1.2.3} + \ldots + \frac{\partial^{n-1} u}{1\ldots(n-1)} + \frac{F^{(n)}(\varrho)}{1\ldots n},$$

wo ϱ ein positiver echter Bruch ist, $F^{(n)}(\varrho)$ aus dem Differential $\partial^n u$ hervorgeht, wenn man für $x, y, z, \ldots$ respective $x+\varrho\partial x$, $y+\varrho\partial y$, $z+\varrho\partial z, \ldots$ setzt, und immer die Voraussetzung festzuhalten ist, dass die Functionen

$$F(\alpha),\ F'(\alpha),\ F''(\alpha),\ F'''(\alpha), \ldots F^{(n)}(\alpha),$$

welche aus

$$u,\ \partial u,\ \partial^2 u,\ \partial^3 u, \ldots \partial^n u$$

erhalten werden, wenn man für $x, y, z, \ldots$ respective $x+\alpha\partial x$, $y+\alpha\partial y$, $z+\alpha\partial z, \ldots$ setzt, von $\alpha=0$ bis $\alpha=1$ stetig seyn müssen.

Hieraus ergeben sich nun ferner die folgenden Sätze.

I. Nähert sich die Grösse

$$\frac{\alpha^n}{1\ldots n} F^{(n)}(\varrho\alpha),$$

wo ϱ ein positiver echter Bruch ist, und $F^{(n)}(\varrho\alpha)$ aus $\partial^n u$ erhalten wird, wenn man für $x, y, z, \ldots$ respective $x+\varrho\alpha\partial x$, $y+\varrho\alpha\partial y$, $z+\varrho\alpha\partial z, \ldots$ setzt, der Null, wenn man n wachsen lässt, und kann der Null beliebig nahe gebracht werden, wenn man nur n gross genug nimmt; so ist immer

$$f(x+\alpha\partial x, y+\alpha\partial y, z+\alpha\partial z, \ldots)$$
$$= u + \frac{\alpha}{1}\partial u + \frac{\alpha^2}{1.2}\partial^2 u + \frac{\alpha^3}{1.2.3}\partial^3 u + \frac{\alpha^4}{1\ldots 4}\partial^4 u + \ldots,$$

jedoch bloss unter der Voraussetzung, dass die Functionen

$$F(\alpha),\ F'(\alpha),\ F''(\alpha),\ F'''(\alpha),\ F^{\mathrm{IV}}(\alpha), \ldots,$$

welche aus

$$u,\ \partial u,\ \partial^2 u,\ \partial^3 u,\ \partial^4 u, \ldots$$

erhalten werden, wenn man für $x, y, z, \ldots$ respective $x+\alpha\partial x$, $y+\alpha\partial y$, $z+\alpha\partial z, \ldots$ setzt, von $\alpha=0$ bis $\alpha=\alpha$ sämmtlich stetig sind.

II. Nähert sich die Grösse

$$\frac{F^{(n)}(\varrho)}{1\ldots n},$$

wo ϱ ein positiver echter Bruch ist, und $F^{(n)}(\varrho)$ aus $\partial^n u$ erhalten wird, wenn man für $x, y, z, \ldots$ respective $x+\varrho\partial x$, $y+\varrho\partial y$, $z+\varrho\partial z, \ldots$ setzt, der Null, wenn man n wachsen lässt, und kann derselben beliebig nahe gebracht werden, wenn man nur n gross genug nimmt; so ist

$$f(x+\partial x, y+\partial y, z+\partial z, \ldots)$$
$$= u + \frac{\partial u}{1} + \frac{\partial^2 u}{1.2} + \frac{\partial^3 u}{1.2.3} + \frac{\partial^4 u}{1.2.3.4} + \ldots,$$

jedoch nur unter der Voraussetzung, dass die Functionen

$$F(\alpha),\ F'(\alpha),\ F''(\alpha),\ F'''(\alpha),\ F^{\text{IV}}(\alpha),\ \ldots\ldots,$$

welche aus

$$u,\ \partial u,\ \partial^2 u,\ \partial^3 u,\ \partial^4 u,\ \ldots\ldots$$

erhalten werden, wenn man für x, y, z, ... respective $x+\alpha\partial x$, $y+\alpha\partial y$, $z+\alpha\partial z$, ... setzt, von $\alpha=0$ bis $\alpha=1$ sämmtlich stetig sind.

Letztern Satz nennt man den Taylor'schen Lehrsatz für Functionen mit mehrern veränderlichen Grössen.

§. 140.

Eine Grösse, welche überhaupt aus dem Differential $\partial^n u$ entsteht, wenn man in demselben für x, y, z, ... respective αx, αy, αz, ..., und für ∂x, ∂y, ∂z, ... respective x, y, z, ... setzt, wollen wir jetzt durch $\varphi_n(\alpha)$ bezeichnen, so dass also $\varphi_n(0)$ eine Grösse bezeichnet, welche aus $\partial^n u$ entsteht, wenn man die Grössen x, y, z, ... sämmtlich $=0$, und für ∂x, ∂y, ∂z, ... respective x, y, z, ... setzt. $\varphi_0(\alpha)$ bezeichnet hiernach die Grösse, welche aus u entsteht, wenn man für x, y, z, ... respective αx, αy, αz, ... setzt, und $\varphi_0(0)$ bezeichnet die Grösse, welche aus u entsteht, wenn man die Grössen x, y, z, ... sämmtlich $=0$ setzt.

Es ist leicht zu übersehen, dass die Function $F^{(n)}(\alpha)$, wenn man in derselben die Grössen x, y, z, ... sämmtlich $=0$ und für ∂x, ∂y, ∂z, ... respective x, y, z, ... setzt, in $\varphi_n(\alpha)$ übergeht. Setzt man nämlich

$$\partial^n u = \psi(x, y, z, \ldots;\ \partial x, \partial y, \partial z, \ldots);$$

so ist bekanntlich

$$F^{(n)}(\alpha) = \psi(x+\alpha\partial x,\ y+\alpha\partial y,\ z+\alpha\partial z, \ldots;\ \partial x,\ \partial y,\ \partial z, \ldots),$$

und $F^{(n)}(\alpha)$ geht folglich, wenn man die Grössen x, y, z, ... sämmtlich $=0$ und für ∂x, ∂y, ∂z, ... respective x, y, z, ... setzt, in

$$\psi(\alpha x,\ \alpha y,\ \alpha z, \ldots;\ x, y, z, \ldots)$$

über. In dieselbe Grösse geht aber $\partial^n u$ über, wenn man für x, y, z, ... respective αx, αy, αz, ..., und für ∂x, ∂y, ∂z, ... respective x, y, z, ... setzt. Da nun die Grösse, in welche auf diese Weise $\partial^n u$ übergeht, $\varphi_n(\alpha)$ ist; so erhellet die Richtigkeit der oben ausgesprochenen Behauptung.

Denkt man sich also in der in §. 139. bewiesenen Gleichung

$$f(x+\partial x,\ y+\partial y,\ z+\partial z, \ldots)$$
$$= u + \frac{\partial u}{1} + \frac{\partial^2 u}{1.2} + \frac{\partial^3 u}{1.2.3} + \ldots + \frac{\partial^{n-1} u}{1\ldots(n-1)} + \frac{F^{(n)}(\varrho)}{1\ldots n}$$

die Grössen $x, y, z, \ldots$ sämmtlich $= 0$ und für $\partial x, \partial y, \partial z, \ldots$ respective $x, y, z, \ldots$ gesetzt, so ergiebt sich, dass immer

$$f(x, y, z, \ldots)$$

$$= \varphi_0(0) + \frac{\varphi_1(0)}{1} + \frac{\varphi_2(0)}{1.2} + \frac{\varphi_3(0)}{1.2.3} + \ldots + \frac{\varphi_{n-1}(0)}{1\ldots(n-1)} + \frac{\varphi_n(\varrho)}{1\ldots n},$$

wo ϱ einen positiven echten Bruch bezeichnet, ist, wenn nur die Voraussetzung erfüllt ist, dass die Functionen

$$\varphi_0(\alpha), \varphi_1(\alpha), \varphi_2(\alpha), \varphi_3(\alpha), \ldots \varphi_n(\alpha)$$

von $\alpha = 0$ bis $\alpha = 1$ sämmtlich stetig sind, und hieraus ergiebt sich ferner unmittelbar der folgende Satz.

Wenn die Grösse

$$\frac{\varphi_n(\varrho)}{1\ldots n},$$

wo ϱ einen positiven echten Bruch bezeichnet, sich, wenn n wächst, der Null nähert, und derselben beliebig nahe gebracht werden kann, wenn man nur n gross genug nimmt, und wenn die Grössen

$$\varphi_0(\alpha), \varphi_1(\alpha), \varphi_2(\alpha), \varphi_3(\alpha), \varphi_4(\alpha), \ldots.$$

von $\alpha = 0$ bis $\alpha = 1$ sämmtlich stetig sind; so ist immer

$$f(x, y, z, \ldots.)$$

$$= \varphi_0(0) + \frac{\varphi_1(0)}{1} + \frac{\varphi_2(0)}{1.2} + \frac{\varphi_3(0)}{1.2.3} + \frac{\varphi_4(0)}{1.2.3.4} + \ldots.,$$

Diesen Satz könnte man den Maclaurin'schen Lehrsatz für Functionen mit mehrern veränderlichen Grössen nennen.

Neuntes Kapitel.

Von der Differentiation der unentwickelten Functionen oder der Gleichungen.

§. 141.

Wir wollen jetzt annehmen, dass die Gleichung

$$u = f(x, y, z, \ldots) = C,$$

wo C eine constante Grösse bezeichnet, eine identische, d. h. *eine* für jedes $x, y, z, \ldots$ geltende Gleichung sey, so dass

also auch für jedes α und jedes $x, y, z, \ldots$; $\partial x, \partial y, \partial z, \ldots$

$$f(x+\alpha\partial x,\ y+\alpha\partial y,\ z+\alpha\partial z, \ldots) = C$$

ist. Setzen wir folglich wieder

$$F(\alpha) = f(x+\alpha\partial x,\ y+\alpha\partial y,\ z+\alpha\partial z, \ldots),$$

also

$$F(0) = f(x, y, z, \ldots);$$

so ist für jedes α und natürlich auch für jedes $x, y, z, \ldots$; $\partial x, \partial y, \partial z, \ldots$

$$F(\alpha) - F(0) = C - C = 0.$$

Also ist auch, wie nahe man auch α bei Null annehmen mag, für jedes $x, y, z, \ldots$; $\partial x, \partial y, \partial z, \ldots$

$$\frac{F(\alpha) - F(0)}{\alpha} = 0.$$

Weil nun nach §. 129. unter der Voraussetzung, dass man sich α der Null nähern lässt,

$$\partial u = Lim\, \frac{F(\alpha) - F(0)}{\alpha}$$

ist; so ist offenbar auch für jedes $x, y, z, \ldots$; $\partial x, \partial y, \partial z, \ldots$

$$\partial u = 0,$$

und folglich auch ganz auf dieselbe Weise

$$\partial^2 u = 0,\ \partial^3 u = 0,\ \partial^4 u = 0, \ldots \partial^n u = 0, \ldots$$

Dass dies auch dann noch gilt, wenn die Constante $C = 0$ ist, versteht sich von selbst.

§. 142.

Man habe nun ferner zwischen den veränderlichen Grössen $x, y, z, \ldots v, \ldots$ die ganz beliebige Gleichung

$$u = f(x, y, z, \ldots v, \ldots) = 0;$$

so kann offenbar jede der Grössen $x, y, z, \ldots v, \ldots$ als eine Function aller übrigen betrachtet werden. Betrachten wir nun z. B. v als eine Function von $x, y, z, \ldots$, und setzen zu dem Ende

$$v = \varphi(x, y, z, \ldots);$$

so ist

$$u = f(x, y, z, \ldots \varphi(x, y, z, \ldots) \ldots) = 0$$

eine identische, d. i. für jedes $x, y, z, \ldots$ geltende Gleichung, und folglich nach §. 141.

$$\partial u = 0,\ \partial^2 u = 0,\ \partial^3 u = 0, \ldots \partial^n u = 0, \ldots$$

Weil nun aber nach §. 137.

$$\partial u = \frac{\partial u}{\partial x}\partial x + \frac{\partial u}{\partial y}\partial y + \frac{\partial u}{\partial z}\partial z + \ldots + \frac{\partial u}{\partial v}\partial v + \ldots$$

ist; so hat man, wenn zwischen den Grössen $x, y, z, \ldots v, \ldots$ die Gleichung

$$u = f(x, y, z, \ldots v, \ldots) = 0$$

gegeben ist, zwischen den Grössen $x, y, z, \ldots v, \ldots; \partial x, \partial y, \partial z, \ldots \partial v, \ldots$ jederzeit die Gleichung

$$\frac{\partial u}{\partial x}\partial x + \frac{\partial u}{\partial y}\partial y + \frac{\partial u}{\partial z}\partial z + \ldots + \frac{\partial u}{\partial v}\partial v + \ldots = 0.$$

Um die Gleichungen

$$\partial^2 u = 0, \partial^3 u = 0, \partial^4 u = 0, \ldots \partial^n u = 0, \ldots$$

weiter zu entwickeln, müsste man nach den aus dem Obigen bekannten Regeln die Differentiale $\partial^2 u, \partial^3 u, \partial^4 u, \ldots$ entwickeln, und hätte dabei nur vorzüglich zu bemerken, dass die höhern Differentiale von $x, y, z, \ldots$ sämmtlich $= 0$ zu setzen sind, welches aber von den höhern Differentialen der Grösse v nicht gilt, da diese Grösse keine unabhängige veränderliche Grösse, sondern als eine Function von $x, y, z, \ldots$ zu betrachten ist.

Da es völlig willkührlich ist, welche der veränderlichen Grössen, zwischen denen die Gleichung $u = 0$ gegeben ist, man als Function der übrigen betrachten will; so ergiebt sich aus dem Vorhergehenden überhaupt Folgendes:

Wenn zwischen mehrern veränderlichen Grössen in beliebiger Anzahl eine Gleichung

$$u = 0$$

gegeben ist; so folgen aus dieser Gleichung jederzeit die Gleichungen

$$\partial u = 0, \partial^2 u = 0, \partial^3 u = 0, \ldots \partial^n u = 0, \ldots,$$

wenn man nur bei der Entwickelung der Differentiale der Function u eine, übrigens beliebige, der veränderlichen Grössen, zwischen denen die Gleichung $u = 0$ gegeben ist, als Function der übrigen betrachtet, also die höhern Differentiale dieser veränderlichen Grösse nicht, die höhern Differentiale der übrigen veränderlichen Grössen dagegen sämmtlich $= 0$ setzt.

§. 143.

Man habe, um dies durch ein Beispiel zu erläutern, zwischen den beiden veränderlichen Grössen x, y die Gleichung

$$y^3 - 3axy + x^3 = 0;$$

so ist

$$u = y^3 - 3axy + x^3,$$

und folglich

$$\partial u = 3(y^2 - ax)\partial y - 3(ay - x^2)\partial x;$$

also

$$(y^2 - ax)\partial y - (ay - x^2)\partial x = 0.$$

Betrachten wir nun y als Function von x; so ist

$$\partial^2 u = 3(y^2 - ax)\partial^2 y + 6y\,\partial y^2 - 6a\partial y\partial x + 6x\partial x^2$$

und folglich

$$(y^2 - ax)\partial^2 y + 2y\,\partial y^2 - 2a\partial y\,\partial x + 2x\partial x^2 = 0.$$

Stellt man die beiden gefundenen Gleichungen unter der Form

$$(y^2 - ax)\frac{\partial y}{\partial x} - ay + x^2 = 0,$$

$$(y^2 - ax)\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + 2y\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 - 2a\frac{\partial y}{\partial x} + 2x = 0$$

dar; so übersieht man am leichtesten, dass sich mittelst derselben die Differentialquotienten

$$\frac{\partial y}{\partial x} \text{ und } \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

durch x und y ausdrücken lassen. Aus der ersten dieser beiden Gleichungen ergiebt sich nämlich auf der Stelle

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{ay - x^2}{y^2 - ax},$$

und, wenn man diesen Werth des ersten Differentialquotienten nun ferner in die zweite der beiden obigen Gleichungen einführt, nach einigen leichten Reductionen

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = -\frac{2a^3 xy}{(y^2 - ax)^3}.$$

Wollte man aber die beiden Differentialquotienten

$$\frac{\partial y}{\partial x} \text{ und } \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

bloss durch x ausdrücken; so würde dies nur durch Auflösung der gegebenen Gleichung

$$y^3 - 3axy + x^3 = 0$$

in Bezug auf y als unbekannte Grösse möglich seyn, indem man nämlich mittelst dieser Gleichung y durch x zu bestimmen und den gefundenen Werth dann für y in die beiden oben für

$$\frac{\partial y}{\partial x} \text{ und } \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

gefundenen Ausdrücke einzuführen hätte.

§. 144.

Wir wollen nun noch einige besondere Fälle etwas ausführlicher betrachten.

Ist zuerst zwischen den zwei veränderlichen Grössen x, y die Gleichung $u = 0$ gegeben; so ist nach §. 142.

$$\frac{\partial u}{\partial x}\partial x + \frac{\partial u}{\partial y}\partial y = 0,$$

oder auch, wenn wir y als Function von x betrachten, wie auch nachher immer geschehen soll,

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x} = 0.$$

Das Differential von ∂u in Bezug auf x als unabhängige veränderliche Grösse ist

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\partial x^2 + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\partial x \partial y.$$

Das Differential von ∂u in Bezug auf y als unabhängige veränderliche Grösse ist

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\partial x \partial y + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\partial y^2.$$

Das Differential von ∂u in Bezug auf ∂y als unabhängige veränderliche Grösse ist

$$\frac{\partial u}{\partial y}\partial^2 y.$$

Das vollständige zweite Differentiale von u ist also

$$\partial^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\partial x^2 + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\partial x \partial y + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\partial y^2 + \frac{\partial u}{\partial y}\partial^2 y,$$

und folglich nach §. 142.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\partial x^2 + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\partial x \partial y + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\partial y^2 + \frac{\partial u}{\partial y}\partial^2 y = 0$$

oder

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0.$$

Aus dieser Gleichung findet man $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$, nachdem man aus der Gleichung

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x} = 0$$

den ersten Differentialquotienten $\frac{\partial y}{\partial x}$ gefunden hat.

Wie man auf diese Art weiter gehen und auch die höhern Differentialquotienten von y finden kann, wird hieraus schon mit hinreichender Deutlichkeit erhellen.

§. 145.

Wenn zwischen den drei veränderlichen Grössen x, y, z die *eine* Gleichung $u = 0$ gegeben ist; so kann man x als

Function von x und y betrachten. Dann sind aber x, y, und auch ∂x, ∂y, völlig willkührliche von einander unabhängige Grössen. Nach §. 142. ist nun

$$\frac{\partial u}{\partial x}\partial x + \frac{\partial u}{\partial y}\partial y + \frac{\partial u}{\partial z}\partial z = 0.$$

Weil aber bekanntlich, da z eine Function von x und y ist,

$$\partial z = \frac{\partial z}{\partial x}\partial x + \frac{\partial z}{\partial y}\partial y$$

ist; so ist auch

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}\right)\partial x + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}\right)\partial y = 0,$$

und diese Gleichung gilt für jedes ganz beliebige ∂x und ∂y, zerfällt also in die beiden abgesondert bestehenden Gleichungen

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y} = 0,$$

mittelst welcher die beiden Differentialquotienten

$$\frac{\partial z}{\partial x} \text{ und } \frac{\partial z}{\partial y}$$

gefunden werden können.

Aus der ersten dieser beiden Gleichungen ergeben sich nun ganz auf dieselbe Weise, wie diese Gleichungen selbst aus der Gleichung $u = 0$ abgeleitet worden sind, die beiden Gleichungen

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z}\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\\ &\quad + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\frac{\partial z}{\partial x}\right)\frac{\partial z}{\partial x}\end{aligned}\right\} = 0,$$

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z}\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\\ &\quad + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\frac{\partial z}{\partial x}\right)\frac{\partial z}{\partial y}\end{aligned}\right\} = 0,$$

d. i.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z}\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z}\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z}\frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0,$$

und ganz eben so ergeben sich aus der zweiten der beiden obigen Gleichungen die Gleichungen

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z}\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z}\frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z}\frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0.$$

Daher hat man jetzt bloss die drei folgenden Gleichungen:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z}\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z}\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z}\frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z}\frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0,$$

mittelst welcher sich die Differentialquotienten

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2},\ \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y},\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$

finden lassen, nachdem man

$$\frac{\partial z}{\partial x} \text{ und } \frac{\partial z}{\partial y}$$

mittelst der beiden oben entwickelten Gleichungen

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} = 0,\quad \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

gefunden hat.

Auch wird hieraus nun schon erhellen, wie man auf diese Art weiter gehen kann.

§. 146.

Hat man zwischen den drei veränderlichen Grössen x, y, z die beiden Gleichungen $u = 0$, $u_1 = 0$; so kann man y und z als Functionen von x betrachten, und hat nun nach §. 142. offenbar die beiden Gleichungen

$$\frac{\partial u}{\partial x}\partial x + \frac{\partial u}{\partial y}\partial y + \frac{\partial u}{\partial z}\partial z = 0,$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial x}\partial x + \frac{\partial u_1}{\partial y}\partial y + \frac{\partial u_1}{\partial z}\partial z = 0;$$

oder

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} = 0,$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} = 0,$$

aus denen die beiden Differentialquotienten

$$\frac{\partial y}{\partial x} \text{ und } \frac{\partial z}{\partial x}$$

gefunden werden können.

Diese beiden Gleichungen führen nun ferner auf dieselbe Weise, wie sie selbst aus den beiden Gleichungen $u = 0$, $u_1 = 0$ abgeleitet worden sind, zu den beiden Gleichungen

$$\left.\begin{array}{l}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}\frac{\partial y}{\partial x} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 \\ + 2\frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial z}\frac{\partial y}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\end{array}\right\} = 0,$$

$$\left.\begin{array}{l}\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 u_1}{\partial x\,\partial y}\frac{\partial y}{\partial x} + 2\frac{\partial^2 u_1}{\partial x\,\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 \\ + 2\frac{\partial^2 u_1}{\partial y\,\partial z}\frac{\partial y}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial z^2}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \frac{\partial u_1}{\partial y}\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \frac{\partial u_1}{\partial z}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\end{array}\right\} = 0,$$

ıs denen

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \text{ und } \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$$

ıfunden werden können.

Auf diese Art weiter zu gehen, hat, die Weitläufigkeit der ›rmeln abgerechnet, keine Schwierigkeit.

Zehntes Kapitel.

'on der Bestimmung der in gewissen Fällen unbestimmt ı seyn scheinenden Werthe der reellen Functionen mit einer veränderlichen Grösse.

§. 147.

Es tritt nicht selten der Fall ein, dass für einen bestimmten Verth a der unabhängigen veränderlichen Grösse x Zähler und lenner einer gebrochenen Function

$$F(x) = \frac{f(x)}{\varphi(x)}$$

erschwinden, und dieselbe also für den in Rede stehenden beimmten Werth von x unter der unbestimmten Form $\frac{0}{0}$ erheint. Bei der Bestimmung solcher unbestimmt zu seyn scheinden Werthe der gebrochenen reellen Functionen mit einer ränderlichen Grösse leistet die Differentialrechnung die vortreffhsten Dienste, wie wir jetzt zeigen wollen.

Man lasse x sich um Δx verändern; so gehen die Functionen x) und $\varphi(x)$ respective in

$$f(x+\Delta x) = f(x) + \Delta f(x) \text{ und } \varphi(x+\Delta x) = \varphi(x) + \Delta\varphi(x)$$

er, und die Function

$$F(x) = \frac{f(x)}{\varphi(x)}$$

ist, wenn nur die Functionen $f(x)$ und $\varphi(x)$ in der Nähe von x stetig sind, offenbar die Gränze, welcher der Bruch

$$\frac{f(x)+\Delta f(x)}{\varphi(x)+\Delta\varphi(x)}$$

sich nähert, wenn Δx sich der Null nähert. Wenn nun $f(x)$ und $\varphi(x)$ für $x=a$ verschwinden, so dass $f(a)=0$, $\varphi(a)=0$ ist; so ist $F(a)$ offenbar die Gränze, welcher

$$\frac{\Delta f(x)}{\Delta\varphi(x)}$$

sich nähert, indem Δx sich der Null nähert, wenn man nur in dieser Gränze, die im Allgemeinen natürlich eine Function von x ist, ebenfalls $x=a$ setzt. Da nun aber

$$\frac{\Delta f(x)}{\Delta\varphi(x)}=\frac{\Delta f(x):\Delta x}{\Delta\varphi(x):\Delta x}$$

ist, und die Gränzen, welchen

$$\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} \text{ und } \frac{\Delta\varphi(x)}{\Delta x}$$

sich nähern, wenn Δx sich der Null nähert, bekanntlich die Differentialquotienten

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x}=f'(x) \text{ und } \frac{\partial\varphi(x)}{\partial x}\ \varphi'(x)$$

sind, die Gränze, welcher

$$\frac{\Delta f(x)}{\Delta\varphi(x)}$$

sich nähert, wenn Δx sich der Null nähert, also offenbar der Bruch

$$\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$$

ist; so ist nach dem Vorhergehenden offenbar

$$F(a)=\frac{f'(a)}{\varphi'(a)},$$

und hierdurch also der Werth $F(a)$ der Function $F(x)$ bestimmt, wenn nur die Differentialquotienten $f'(x)$ und $\varphi'(x)$ für $x=a$ nicht selbst zugleich verschwinden, auch nicht beide unendlich werden.

Ist aber $f'(a)=0$, $\varphi'(a)=0$; so ist ganz wie vorher

$$\frac{f'(a)}{\varphi'(a)}=\frac{f''(a)}{\varphi''(a)},$$

folglich auch

$$F(a)=\frac{f''(a)}{\varphi''(a)},$$

und hierdurch also der Werth $F(a)$ der Function $F(x)$ bestimmt, *wenn nur* die Differentialquotienten $f''(a)$ und $\varphi''(a)$ für $x=a$

nicht selbst zugleich verschwinden, auch nicht beide unendlich werden.

Ist aber $f''(a) = 0$, $\varphi''(a) = 0$; so ist ganz wie oben

$$\frac{f''(a)}{\varphi''(a)} = \frac{f'''(a)}{\varphi'''(a)},$$

folglich auch

$$F(a) = \frac{f'''(a)}{\varphi'''(a)},$$

und hierdurch also der Werth $F(a)$ der Function $F(x)$ bestimmt, wenn nur die Differentialquotienten $f'''(x)$ und $\varphi'''(x)$ für $x=a$ nicht selbst zugleich verschwinden, auch nicht beide unendlich werden.

Wie man auf diese Art weiter gehen kann, erhellet leicht, und es ergiebt sich also hieraus überhaupt das folgende merkwürdige allgemeine Theorem:

Wenn

$$F(x) = \frac{f(x)}{\varphi(x)}$$

ist, und die Functionen

$$f(x),\, f'(x),\, f''(x),\, f'''(x),\, \ldots f^{(n-1)}(x);$$
$$\varphi(x),\, \varphi'(x),\, \varphi''(x),\, \varphi'''(x),\, \ldots \varphi^{(n-1)}(x)$$

für $x = a$ sämmtlich verschwinden; so ist

$$F(a) = \frac{f^{(n)}(a)}{\varphi^{(n)}(a)},$$

und hierdurch also der Werth $F(a)$ der Function $F(x)$ bestimmt, wenn die Differentialquotienten $f^{(n)}(x)$ und $\varphi^{(n)}(x)$ für $x = a$ nicht selbst zugleich verschwinden, auch nicht beide unendlich werden.

§. 148.

Um dieses Theorem auf einige Beispiele anzuwenden; so sey

$$\text{I.}\quad F(x) = \frac{ax^2 - 2acx + ac^2}{bx^2 - 2bcx + bc^2},$$

und folglich

$$f(x) = ax^2 - 2acx + ac^2,\quad \varphi(x) = bx^2 - 2bcx + bc^2.$$

Für $x = c$ ist $f(c) = 0$, $\varphi(c) = 0$. Differentiirt man nun, so erhält man

$$f'(x) = 2ax - 2ac,\quad \varphi'(x) = 2bx - 2bc,$$

und es ist folglich wieder $f'(c) = 0$, $\varphi'(c) = 0$. Also muss man von Neuem differentiiren, und erhält

$$f''(x) = 2a,\quad \varphi''(x) = 2b.$$

Da dies für jedes x gilt, so ist auch

$$f''(c) = 2a,\ \varphi''(c) = 2b,$$

und folglich

$$F(c) = \frac{2a}{2b} = \frac{a}{b}.$$

II. $$F(x) = \frac{x^3 - ax^2 - a^2x + a^3}{x^2 - a^2};$$

also

$$f(x) = x^3 - ax^2 - a^2x + a^3,\quad \varphi(x) = x^2 - a^2.$$

Für $x = a$ ist $f(a) = 0$, $\varphi(a) = 0$. Durch Differentiation ergiebt sich

$$f'(x) = 3x^2 - 2ax - a^2,\quad \varphi'(x) = 2x,$$

und folglich $f'(a) = 0$, $\varphi'(a) = 2a$. Also ist

$$F(a) = 0.$$

III. Bekanntlich ist

$$1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^n = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1}.$$

Setzen wir nun

$$F(x) = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1};$$

so ist $f(x) = x^{n+1} - 1$, $\varphi(x) = x - 1$, und folglich $f(1) = 0$, $\varphi(1) = 0$. Durch Differentiation erhält man

$$f'(x) = (n+1)\, x^n,\quad \varphi'(x) = 1;$$

also $f'(1) = n + 1$, $\varphi'(1) = 1$, und folglich $F(1) = n + 1$. Der Werth der Summe

$$1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^n$$

ist für $x = 1$ in der That $= n + 1$.

IV. Für $F(x) = \frac{\sin x}{x}$ ist $f(x) = \sin x$, $\varphi(x) = x$, und folglich $f(0) = 0$, $\varphi(0) = 0$. Durch Differentiation erhält man $f'(x) = \cos x$, $\varphi'(x) = 1$; also ist $f'(0) = 1$, $\varphi'(0) = 1$, und folglich $F(0) = 1$.

V. Für $F(x) = \frac{x - \sin x}{x^3}$ ist

$$f(x) = x - \sin x,\quad \varphi(x) = x^3,$$

und folglich $f(0) = 0$, $\varphi(0) = 0$. Weil nun

$$f'(x) = 1 - \cos x,\quad \varphi'(x) = 3x^2$$

und folglich $f'(0) = 0$, $\varphi'(0) = 0$ ist; so muss man von Neuem differentiiren. Dadurch erhält man

$$f''(x) = \sin x,\quad \varphi''(x) = 6x,$$

und folglich wieder $f''(0) = 0$, $\varphi''(0) = 0$. Also muss man zum dritten Male differentiiren, und erhält dadurch

$$f'''(x) = \cos x,\quad \varphi'''(x) = 6.$$

Weil nun $f'''(0) = 1$, $\varphi'''(0) = 6$ ist; so ist $F(0) = \frac{1}{6}$.

VI. Für $F(x) = \frac{e^{x} - e^{-x} - 2x}{x - \sin x}$
ist

$$f(x) = e^{x} - e^{-x} - 2x,\quad \varphi(x) = x - \sin x;$$
$$f(0) = 0,\quad \varphi(0) = 0;$$
$$f'(x) = e^{x} + e^{-x} - 2,\quad \varphi'(x) = 1 - \cos x;$$
$$f'(0) = 0,\quad \varphi'(0) = 0;$$
$$f''(x) = e^{x} - e^{-x},\quad \varphi''(x) = \sin x;$$
$$f''(0) = 0,\quad \varphi''(0) = 0;$$
$$f'''(x) = e^{x} + e^{-x},\quad \varphi'''(x) = \cos x;$$
$$f'''(0) = 2,\quad \varphi'''(0) = 1.$$

Also ist $F(0) = 2$.

§. 149.

Oft kommen auch Fälle vor, wo für einen bestimmten Werth a der unabhängigen veränderlichen Grösse x Zähler und Nenner der gebrochenen Function

$$F(x) = \frac{f(x)}{\varphi(x)}$$

unendlich werden. In einem solchen Falle Falle ist

$$\frac{1}{f(a)} = 0,\ \frac{1}{\varphi(a)} = 0.$$

Weil nun bekanntlich die Differentialquotienten der Functionen

$$\frac{1}{f(x)} \text{ und } \frac{1}{\varphi(x)}$$

respective

$$-\frac{f'(x)}{\{f(x)\}^2} \text{ und } -\frac{\varphi'(x)}{\{\varphi(x)\}^2}$$

sind; so ist nach §. 147.

$$\frac{\frac{1}{f(a)}}{\frac{1}{\varphi(a)}} = \frac{-\frac{f'(a)}{\{f(a)\}^2}}{-\frac{\varphi'(a)}{\{\varphi(a)\}^2}}$$

oder

$$\frac{\varphi(a)}{f(a)} = \frac{f'(a)}{\varphi'(a)} \cdot \left\{\frac{\varphi(a)}{f(a)}\right\}^2,$$

und folglich, wie sogleich erhellet, wenn man auf beiden Seiten mit

$$\left\{\frac{f(a)}{\varphi(a)}\right\}^2$$

multiplicirt,

$$F(a) = \frac{f'(a)}{\varphi'(a)}.$$

Wären aber auch $f'(a)$ und $\varphi'(a)$ beide unendlich; so wäre ganz eben so

$$\frac{f'(a)}{\varphi'(a)} = \frac{f''(a)}{\varphi''(a)},$$

und folglich

$$F(a) = \frac{f''(a)}{\varphi''(a)}.$$

Wären auch $f''(a)$ und $\varphi''(a)$ beide unendlich; so wäre ganz auf dieselbe Art

$$\frac{f''(a)}{\varphi''(a)} = \frac{f'''(a)}{\varphi'''(a)},$$

und folglich

$$F(a) = \frac{f'''(a)}{\varphi'''(d)}.$$

Wie man auf diese Art weiter gehen kann, ist klar, und es ergiebt sich nun wieder das folgende allgemeine Theorem:

Wenn

$$F(x) = \frac{f(x)}{\varphi(x)}$$

ist, und die Functionen

$$f(x), f'(x), f''(x), f'''(x), \ldots f^{(n-1)}(x);$$
$$\varphi(x), \varphi'(x), \varphi''(x), \varphi'''(x), \ldots \varphi^{(n-1)}(x)$$

für $x = a$ sämmtlich unendlich werden; so ist

$$F(a) = \frac{f^{(n)}(a)}{\varphi^{(n)}(a)},$$

und hierdurch also der Werth $F(a)$ der Function $F(x)$ bestimmt, wenn die Differentialquotienten $f^{(n)}(x)$ und $\varphi^{n}(x)$ für $x = a$ nicht selbst beide unendlich werden, auch nicht beide zugleich verschwinden.

Für $F(x) = \frac{a^x}{x}$ ist z. B. $f(x) = a^x$, $\varphi(x) = x$, und folglich, wenn, wie wir voraussetzen wollen, a grösser als die Einheit ist, $f(\infty) = \infty$, $\varphi(\infty) = \infty$. Aber $f'(x) = a^x la$, $\varphi'(x) = 1$. Also $f'(\infty) = \infty$, $\varphi'(\infty) = 1$, und folglich $F(\infty) = \infty$.

Für $F(x) = \frac{lx}{x}$ ist $f(x) = lx$, $\varphi(x) = x$, und folglich $f(\infty) = \infty$, $\varphi(\infty) = \infty$. Aber $f'(x) = \frac{1}{x}$, $\varphi'(x) = 1$, und folglich $f'(\infty) = 0$, $\varphi'(\infty) = 1$; also $F(\infty) = 0$.

§. 150.

Wenn $F(x) = f(x) . \varphi(x)$ ist; so kann es vorkommen, dass der Werth $F(a)$ der Function $F(x)$ sich unter der unbestimmten Form $0 . \pm \infty$ darstellt. Weil aber

$$F(x) = \frac{f(x)}{\frac{1}{\varphi(x)}} = \frac{\varphi(x)}{\frac{1}{f(x)}}$$

gesetzt werden kann; so kann die Bestimmung solcher unbestimmten Werthe offenbar immer nach §. 147. und §. 149. bewirkt werden.

Ist z. B. der Werth von

$$F(x) = (1-x) \, tang \, \tfrac{1}{2} \pi x$$

für $x = 1$ zu bestimmen; so setze man

$$F(x) = \frac{1-x}{cot \, \frac{1}{2} \pi x}$$

und folglich

$$f(x) = 1-x, \quad \varphi(x) = cot \, \tfrac{1}{2} \pi x.$$

Differentiirt man nun; so ergiebt sich

$$f'(x) = -1, \quad \varphi'(x) = -\tfrac{1}{2}\pi \, (cosec \, \tfrac{1}{2} \pi x)^2;$$

$$f'(1) = -1, \quad \varphi'(1) = -\tfrac{1}{2}\pi;$$

folglich $F(1) = \frac{2}{\pi}$.

Soll man den Werth von $F(x) = x log x$ für $x = 0$ bestimmen; so setze man $f(x) = log x$, $\varphi(x) = \frac{1}{x} = x^{-1}$. Dann ist

$$f'(x) = \frac{1}{x l b}, \quad \varphi'(x) = -\frac{1}{x^2},$$

und folglich

$$\frac{f'(x)}{\varphi'(x)} = -\frac{x}{lb};$$

also

$$F(0) = \frac{f'(0)}{\varphi'(0)} = 0.$$

§. 151.

Wenn $F(x) = f(x) - \varphi(x)$ ist; so tritt zuweilen der Fall ein, dass für einen bestimmten Werth von x die Functionen $f(x)$ und $\varphi(x)$ beide unendlich werden. Wie man sich in solchen Fällen zu verhalten hat, wird am besten an ein Paar Beispielen gezeigt werden.

Der in Rede stehende Fall tritt z. B. bei der Function

$$F(x) = \frac{1}{1-x} - \frac{2}{1-x^2}$$

für $x = 1$ ein. Zieht man die beiden Brüche wirklich von einander ab; so erhält man

$$F(x) = \frac{x-1}{1-x^2},$$

und es ist nun, wenn man

$$f(x) = x - 1, \quad \varphi(x) = 1 - x^2$$

setzt, $f(1) = 0$ und $\varphi(1) = 0$, so dass man also jetzt §. 147. anwenden kann. Da nun $f'(x) = 1$, $\varphi'(x) = -2x$, und folglich $f'(1) = 1$, $\varphi'(1) = -2$ ist; so ist nach §. 147. $F(1) = -\frac{1}{2}$.

Ist ferner

$$F(x) = x \tang x - \tfrac{1}{2}\pi \sec x$$

und die Frage nach dem Werthe $F(\frac{1}{2}\pi)$ von $F(x)$; so setze man

$$F(x) = \frac{x \sin x - \frac{1}{2}\pi}{\cos x},$$

und es ist nun, wenn man

$$f(x) = x \sin x - \tfrac{1}{2}\pi, \quad \varphi(x) = \cos x$$

setzt, $f(\frac{1}{2}\pi) = 0$ und $\varphi(\frac{1}{2}\pi) = 0$, jetzt also wieder §. 147. anzuwenden. Weil aber

$$f'(x) = x \cos x + \sin x, \quad \varphi'(x) = -\sin x$$

und folglich $f'(\frac{1}{2}\pi) = 1$, $\varphi'(\frac{1}{2}\pi) = -1$ ist; so ist nach §. 147. $F(\frac{1}{2}\pi) = -1$.

Eilftes Kapitel.

Von den grössten und kleinsten Werthen der Functionen.

A. Entwickelte Functionen mit *einer* veränderlichen Grösse.

§. 152.

Es sey $y = f(x)$ eine Function von x, und x selbst bezeichne jetzt irgend einen bestimmten Werth der unabhängigen veränderlichen Grösse. i sey eine unendlich kleine positive Grösse. Auch wollen wir für jetzt immer annehmen, dass die gegebene Function in der Nähe des bestimmten Werths x der unabhängigen veränderlichen Grösse, d. h. in dem unendlich kleinen Intervalle $x - i$, $x + i$ stetig, und in diesem Intervalle also auch stets reell sey.

Wenn nun für unendlich kleine i

$$f(x) > f(x - i), \quad f(x) > f(x + i)$$

ist; so heisst $f(x)$ ein Maximum, ein Grösstes oder ein grösster Werth der gegebenen Function.

Wenn dagegen für unendlich kleine i

$$f(x) < f(x-i), \quad f(x) < f(x+i)$$

ist; so heisst $f(x)$ ein Minimum, ein Kleinstes oder ein kleinster Werth der gegebenen Function.

Wäre aber für unendlich kleine i mit Beziehung der obern und untern Zeichen auf einander

$$f(x) \gtrless f(x-i), \quad f(x) \lesseqgtr f(x+i);$$

so würde $f(x)$ weder ein Maximum noch ein Minimum der gegebenen Function seyn.

Bei dieser Definition wird, was man wohl zu beachten hat, i immer als unendlich klein angenommen. Unter dieser Voraussetzung sagt man, dass die Werthe $f(x-i)$ und $f(x+i)$ der gegebenen Function dem Werthe $f(x)$ derselben benachbart oder Nachbarwerthe dieses letztern Werths seyen, und kann nun die obigen Erklärungen auch auf folgenden Ausdruck bringen:

Wenn x einen bestimmten Werth der unabhängigen veränderlichen Grösse bezeichnet, so heisst $f(x)$ ein Maximum oder ein grösster Werth der gegebenen Function, wenn derselbe grösser ist als seine Nachbarwerthe nach beiden Seiten hin. Dagegen heisst $f(x)$ ein Minimum oder ein kleinster Werth der gegebenen Function, wenn derselbe kleiner ist als seine Nachbarwerthe nach beiden Seiten hin. In jedem andern Falle ist $f(x)$ weder ein Maximum noch ein Minimum der gegebenen Function.

Es geht aus diesen Erklärungen hervor, dass es für ein und dieselbe Function sowohl mehrere Maxima, als auch mehrere Minima, auch Maxima und Minima zugleich geben kann. Dies erhellet auf der Stelle, wenn man nur nie aus den Augen verliert, dass es sich hierbei immer bloss um das Verhalten der Werthe einer Function zu ihren Nachbarwerthen nach beiden Seiten hin handelt. An Anschaulichkeit gewinnen übrigens die obigen Begriffe, wenn man sich die Function durch eine Curve dargestellt denkt, bei welcher die Abscissen die Werthe der unabhängigen veränderlichen Grösse, die entsprechenden Ordinaten dagegen die entsprechenden Werthe der Function sind. Eine solche Curve wird offenbar in mehrern Punkten so gekrümmt seyn können, dass die zu denselben gehörenden Ordinaten entweder grösser oder kleiner als die benachbarten Ordinaten nach beiden Seiten hin sind, und in solchen Punkten werden die Ordinaten, d. h. die Werthe der gegebenen Function, Maxima oder Minima werden. Ist aber in einem Punkte die Ordinate kleiner oder grösser als die benachbarten Ordinaten nach der einen, und respective grösser oder kleiner als die benachbarten

Ordinaten nach der andern Seite hin; so findet weder ein Maximum, noch ein Minimum Statt.

§. 153.

I. Den analytischen Untersuchungen über die Maxima und Minima, welche nun folgen werden, schicken wir die für diese Untersuchungen sehr wichtige allgemeine Bemerkung voraus, dass, wenn die Function $f(x)$ für den bestimmten Werth x ihrer unabhängigen veränderlichen Grösse nicht verschwindet, und in dem unendlich kleinen Intervall $x-i$, $x+i$ stetig ist, diese Function in dem in Rede stehenden unendlich kleinen Intervall fortwährend ein und dasselbe Vorzeichen haben muss, wie auf der Stelle erhellet, wenn man nur nicht aus den Augen verliert, dass das Intervall $x-i$, $x+i$ als unendlich klein angenommen wird, und bedenkt, dass die in diesem Intervalle stetige Function $f(x)$ ihr Zeichen innerhalb desselben nur dann ändern kann, wenn sie innerhalb desselben durch Null hindurch geht oder verschwindet.

II. Dies vorausgesetzt, wollen wir nun annehmen, dass die Function $f(x)$ und ihr erster Differentialquotient $f'(x)$ in dem unendlich kleinen Intervall $x-i$, $x+i$, d. h. in der Nähe des bestimmten Werthes x der unabhängigen veränderlichen Grösse stetig seyen; so ist nach §. 110. II., wenn θ und ϱ gewisse positive echte Brüche bezeichnen,

$$f(x-i)=f(x)-if'(x-\theta i),$$
$$f(x+i)=f(x)+if'(x+\varrho i).$$

Ist nun $f'(x)$ nicht $=0$; so haben nach I., weil $x-\theta i$ und $x+\varrho i$ offenbar zwei innerhalb des unendlich kleinen Intervalls $x-i$, $x+i$ liegende Werthe der unabhängigen veränderlichen Grösse sind, $f'(x-\theta i)$ und $f'(x+\varrho i)$ gleiche Vorzeichen, und es ist folglich mit Beziehung der obern und untern Zeichen auf einander

$$f(x-i)\lesseqgtr f(x),\quad f(x+i)\gtreqless f(x)$$

oder

$$f(x)\gtreqless f(x-i),\quad f(x)\lesseqgtr f(x+i);$$

also $f(x)$ nach §. 152. weder ein Maximum, noch ein Minimum der gegebenen Function. Soll daher $f(x)$ ein Maximum oder ein Minimum der gegebenen Function seyn; so muss nothwendig

$$f'(x)=0$$

seyn.

Ist dies der Fall, und ist auch $f''(x)$ eine in dem unendlich kleinen Intervall $x-i$, $x+i$ stetige Function; so ist nach §. 110. II., wenn θ_1 und ϱ_1 wieder gewisse positive echte Brüche bezeichnen,

$$f(x-i) = f(x) + \frac{i^2}{1.2} f''(x-\theta_1 i),$$

$$f(x+i) = f(x) + \frac{i^2}{1.2} f''(x+\varrho_1 i).$$

Ist nun $f''(x)$ nicht $=0$; so haben nach I. $f''(x-\theta_1 i)$ und $f''(x+\varrho_1 i)$ mit einander und mit $f''(x)$ gleiche Vorzeichen. Daher ist, wenn $f''(x)$ positiv ist,

$$f(x-i) > f(x), \quad f(x+i) > f(x)$$

oder

$$f(x) < f(x-i), \quad f(x) < f(x+i),$$

und folglich nach §. 152. in diesem Falle $f(x)$ ein Minimum der gegebenen Function. Ist dagegen $f''(x)$ negativ; so ist

$$f(x-i) < f(x), \quad f(x+i) < f(x)$$

oder

$$f(x) > f(x-i), \quad f(x) > f(x+i),$$

und in diesem Falle folglich $f(x)$ ein Maximum der gegebenen Function. Wenn aber $f''(x) = 0$ und auch $f'''(x)$ in dem unendlich kleinen Intervall $x-i$, $x+i$ stetig ist; so ist nach §. 110. II., wenn θ_2 und ϱ_2 gewisse positive echte Brüche bezeichnen,

$$f(x-i) = f(x) - \frac{i^3}{1.2.3} f'''(x-\theta_2 i),$$

$$f(x+i) = f(x) + \frac{i^3}{1.2.3} f'''(x+\varrho_2 i).$$

Ist nun $f'''(x)$ nicht $=0$; so haben nach I. $f'''(x-\theta_2 i)$ und $f'''(x+\varrho_2 i)$ gleiche Vorzeichen, und es ist folglich mit Beziehung der obern und untern Zeichen auf einander

$$f(x-i) \lesseqgtr f(x), \quad f(x+i) \gtreqless f(x)$$

oder

$$f(x) \gtreqless f(x-i), \quad f(x) \lesseqgtr f(x+i);$$

also $f(x)$ nach §. 152. weder ein Maximum, noch ein Minimum der gegebenen Function. Soll daher in diesem Falle, wo $f''(x) = 0$ ist, $f(x)$ ein Maximum oder ein Minimum der gegebenen Function seyn; so muss nothwendig auch

$$f'''(x) = 0$$

seyn.

Ist dies der Fall, und ist dann auch $f^{IV}(x)$ in dem unendlich kleinen Intervall $x-i$, $x+i$ stetig; so ist nach §. 110. II., wenn θ_3 und ϱ_3 wieder positive echte Brüche bezeichnen,

$$f(x-i) = f(x) + \frac{i^4}{1\ldots4} f^{IV}(x-\theta_3 i),$$

$$f(x+i) = f(x) + \frac{i^4}{1\ldots4} f^{IV}(x+\varrho_3 i).$$

Ist nun $f^{IV}(x)$ nicht $=0$; so haben nach I. $f^{IV}(x-\theta_3 i)$ und

$f^{\text{IV}}(x+\varrho_3 i)$ mit einander und mit $f^{\text{IV}}(x)$ gleiche Vorzeichen. Daher ist, wenn $f^{\text{IV}}(x)$ positiv ist,

$$f(x-i) > f(x),\quad f(x+i) > f(x)$$

oder

$$f(x) < f(x-i),\quad f(x) < f(x+i),$$

und folglich $f(x)$ nach §. 152. ein Minimum der gegebenen Function. Ist dagegen $f^{\text{IV}}(x)$ negativ; so ist

$$f(x-i) < f(x),\ f(x+i) < f(x)$$

oder

$$f(x) > f(x-i),\quad f(x) > f(x+i),$$

und folglich $f(x)$ nach §. 152. ein Maximum der gegebenen Function. Wenn aber $f^{\text{IV}}(x) = 0$ und auch $f^{\text{V}}(x)$ in dem unendlich kleinen Intervall $x-i$, $x+i$ stetig ist; so ist nach §. 110. II.

$$f(x-i) = f(x) - \frac{i^5}{1\ldots 5} f^{\text{V}}(x-\theta_4 i),$$

$$f(x+i) = f(x) + \frac{i^5}{1\ldots 5} f^{\text{V}}(x+\varrho_4 i),$$

wo θ_4 und ϱ_4 wieder positive echte Brüche bezeichnen. Ist nun $f^{\text{V}}(x)$ nicht $= 0$; so haben nach I. $f^{\text{V}}(x-\theta_4 i)$ und $f^{\text{V}}(x+\varrho_4 i)$ gleiche Vorzeichen, und es ist folglich

$$f(x-i) \lessgtr f(x),\quad f(x+i) \gtrless f(x)$$

oder

$$f(x) \gtrless f(x-i),\quad f(x) \lessgtr f(x+i);$$

also nach §. 152. $f(x)$ weder ein Maximum, noch ein Minimum der gegebenen Function. Soll daher in diesem Falle, wo $f^{\text{IV}}(x) = 0$ ist, $f(x)$ ein Maximum oder ein Minimum der gegebenen Function seyn; so muss nothwendig auch

$$f^{\text{V}}(x) = 0$$

seyn.

Wie man auf diese Art weiter gehen kann, erhellet hieraus schon deutlich genug. Ueberhaupt ergiebt sich aber aus dem Vorhergehenden das folgende wichtige allgemeine Theorem:

Wenn für den bestimmten Werth x der unabhängigen veränderlichen Grösse die Functionen

$$f'(x),\ f''(x),\ f'''(x),\ \ldots f^{(n-1)}(x)$$

sämmtlich verschwinden, und, so wie $f(x)$ und $f^{(n)}(x)$, in der Nähe des in Rede stehenden bestimmten Werths der unabhängigen veränderlichen Grösse stetig sind, aber $f^{(n)}(x)$ nicht $= 0$ ist; so ist

1. wenn n eine ungerade Zahl ist, $f(x)$ weder ein Maximum, noch ein Minimum; dagegen ist

2. wenn n eine gerade Zahl ist, $f(x)$ ein Maximum oder ein Minimum, jenachdem $f^{(n)}(x)$ negativ oder positiv ist.

§. 154.

Im Allgemeinen bedient man sich des vorhergehenden Lehrsatzes zur Aufsuchung der grössten und kleinsten Werthe einer Function $f(x)$ auf folgende Art.

Man entwickelt den ersten Differentialquotienten $f'(x)$, setzt

$$f'(x) = 0,$$

und sucht die reellen Wurzeln dieser Gleichung, wenn es deren giebt. Hat dieselbe gar keine reelle Wurzel; so existirt kein reeller Werth von x, für welchen der Differentialquotient $f'(x)$ verschwindet, und es giebt also nach §. 153. auch weder Maxima, noch Minima der gegebenen Function. Ist aber ξ eine reelle Wurzel der Gleichung

$$f'(x) = 0;$$

so setze man dieselbe für x in die Differentialquotienten

$$f''(x),\ f'''(x),\ f^{\text{IV}}(x),\ f^{\text{V}}(x),\ \ldots.,$$

wodurch man die Reihe

$$f''(\xi),\ f'''(\xi),\ f^{\text{IV}}(\xi),\ f^{\text{V}}(\xi),\ \ldots.$$

erhält, und bleibe in dieser Reihe bei dem ersten nicht verschwindenden Gliede, wofern es ein solches Glied giebt, stehen. Ist nun $f^{(n)}(\xi)$ dieses erste nicht verschwindende Glied; so ist

1. wenn n eine ungerade Zahl ist, $f(\xi)$ weder ein Maximum, noch ein Minimum der gegebenen Function; dagegen ist

2. wenn n eine gerade Zahl ist, $f(\xi)$ ein Maximum oder ein Minimum der gegebenen Function, jenachdem $f^{(n)}(\xi)$ negativ oder positiv ist.

Dieselbe Untersuchung muss man mit allen reellen Wurzeln der Gleichung $f'(x) = 0$, so viel es deren giebt, anstellen. Uebrigens gilt alles Obige nur unter der Voraussetzung, dass die Functionen

$$f(x),\ f'(x),\ f''(x)\ f'''(x),\ \ldots f^{(n)}(x)$$

in der Nähe des bestimmten Werths ξ von x stetig sind, wovon man sich also streng genommen in jedem einzelnen Falle besonders überzeugen muss. Jedoch leuchtet die Stetigkeit der in Rede stehenden Functionen in der Nähe des bestimmten Werths ξ der unabhängigen veränderlichen Grösse in den meisten vorkommenden Fällen so leicht und von selbst ein, dass man eine besondere Untersuchung in der angedeuteten Beziehung gewöhnlich nicht anstellt, wenn es nicht anders die Natur der Sache unbedingt fordert.

§. 155.

Bei gebrochenen Functionen kann man sich die Aufsuchung der Maxima und Minima auf folgende Art erleichtern, wobei wir jedoch bloss den Fall näher betrachten wollen, wenn der zweite

Differentialquotient der gegebenen Function in der Reihe der ferentialquotienten der erste ist, welcher für den Werth der abhängigen veränderlichen Grösse, für welchen der erste Diffe tialquotient verschwindet, nicht verschwindet.

Sey zu diesem Ende überhaupt $y=\frac{p}{q}$, wo p und q F ctionen von x bezeichnen, die gegebene Function; so ist kanntlich

$$\frac{\partial y}{\partial x}=\frac{q\frac{\partial p}{\partial x}-p\frac{\partial q}{\partial x}}{q^2},$$

und es ist folglich $\frac{\partial y}{\partial x}=0$, wenn

$$q\frac{\partial p}{\partial x}-p\frac{\partial q}{\partial x}=0$$

ist, vorausgesetzt, dass für denselben Werth von x, wel vorstehender Gleichung genügt, nicht auch q verschwindet. wird also jederzeit die reellen Wurzeln der Gleichung

$$q\frac{\partial p}{\partial x}-p\frac{\partial q}{\partial x}=0$$

aufzusuchen, sich aber zugleich auch bei jeder dieser Wur zu versichern haben, dass für dieselbe q nicht verschwin Durch Entwickelung des zweiten Differentialquotienten der g benen Function ergiebt sich ferner

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}=\frac{q^2\left\{q\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}-p\frac{\partial^2 q}{\partial x^2}\right\}-2q\left\{q\frac{\partial p}{\partial x}-p\frac{\partial q}{\partial x}\right\}\frac{\partial q}{\partial x}}{q^4}.$$

Da nun für die nach der vorher gegebenen Anweisung gefu nen Werthe von x

$$q\frac{\partial p}{\partial x}-p\frac{\partial q}{\partial x}=0$$

ist; so ist für diese Werthe von x

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}=\frac{q\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}-p\frac{\partial^2 q}{\partial x^2}}{q^2}.$$

Weil es aber bekanntlich bloss darauf ankommt, ob der zw Differentialquotient für die in Rede stehenden Werthe von x, ausgesetzt, dass derselbe für diese Werthe von x nicht schwindet, positiv oder negativ ist; so braucht man, wei immer positiv ist, diese Werthe bloss in die Grösse

$$q\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}-p\frac{\partial^2 q}{\partial x^2}$$

für x zu setzen, und zu untersuchen, ob die entspreche Werthe dieser Grösse positiv oder negativ sind. Im ersten I wird jederzeit ein Minimum, im zweiten ein Maximum finden.

§. 156.

Die im Vorhergehenden entwickelten allgemeinen Regeln wollen wir nun auf einige Beispiele anwenden.

I. Die Werthe von x zu finden, für welche die Function

$$y = x^2 + 3x + 2$$

ein Maximum oder ein Minimum wird.

Durch Entwickelung des ersten Differentialquotienten ergiebt sich

$$\frac{\partial y}{\partial x} = 2x + 3,$$

und man hat folglich zur Bestimmung von x die Gleichung

$$2x + 3 = 0,$$

welche die eine reelle Wurzel $x = -\frac{3}{2}$ hat. Für den zweiten Differentialquotienten erhält man

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 2.$$

Da nun dieser Differentialquotient für jedes x, folglich auch für $x = -\frac{3}{2}$, $= 2$ ist, für den in Rede stehenden Werth von x also nicht verschwindet und positiv ist; so wird die gegebene Function für $x = -\frac{3}{2}$ ein Minimum. Für $x = -\frac{3}{2}$ ist aber $y = -\frac{1}{4}$, und dieser Werth ist also ein Minimum der gegebenen Function y. Andere Minima oder Maxima dieser Function giebt es nicht, weil die Gleichung $2x + 3 = 0$ nur die eine reelle Wurzel $-\frac{3}{2}$ hat.

II. Die Werthe von x zu finden, für welche die Function

$$y = x^4 - 8x^3 + 22x^2 - 24x + 12$$

ein Maximum oder ein Minimum wird.

Weil

$$\frac{\partial y}{\partial x} = 4x^3 - 24x^2 + 44x - 24$$

ist; so muss man die reellen Wurzeln der Gleichung

$$x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$$

aufsuchen. Durch Zerfällung des letzten Gliedes in Factoren findet man in diesem Falle leicht, dass die Gleichung die drei reellen Wurzeln 1, 2, 3 hat. Der zweite Differentialquotient ist

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 12x^2 - 48x + 44,$$

und man müsste also nun die Werthe 1, 2, 3 für x in diesen Differentialquotienten einführen, um zu prüfen, ob derselbe für den einen oder den andern dieser Werthe von x verschwindet, oder einen positiven nicht verschwindenden, oder einen negativen Werth erhält. Man übersieht aber leicht, dass man den Diffe-

rentialquotienten vorher durch 4 dividiren, und die in Rede stehende Prüfung bloss mit der Grösse

$$3x^2 - 12x + 11$$

anstellen kann. Da nun diese Grösse für $x = 1, 2, 3$ respective die Werthe $2, -1, 2$, erhält; so wird y für $x = 1, 2, 3$ respective ein Minimum, Maximum, Minimum. Die den Werthen $x = 1, 2, 3$ entsprechenden Werthe von y sind 3, 4, 3.

III. Die Werthe von x zu finden, für welche die Function

$$y = 6x^7 - 70x^6 + 336x^5 - 861x^4 + 1274x^3 - 1092x^2 + 504x - 27$$

ein Maximum oder ein Minimum wird.

Entwickelt man den ersten Differentialquotienten und setzt denselben $= 0$; so erhält man, nachdem man mit 42 dividirt hat, die Gleichung

$$x^6 - 10x^5 + 40x^4 - 82x^3 + 91x^2 - 52x + 12 = 0$$

oder

$$(x-1)^3(x-2)^2(x-3) = 0,$$

woraus man sieht, dass unsere Gleichung die drei reellen Wurzeln 1, 2, 3 hat.

Für den zweiten Differentialquotienten erhält man

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 84(3x^5 - 25x^4 + 80x^3 - 123x^2 + 91x - 26)$$
$$= 84(x-1)^2(x-2)(3x^2 - 13x + 13),$$

und sieht also, dass dieser Differentialquotient für $x = 1$ und $x = 2$ verschwindet. Für $x = 3$ wird derselbe dagegen $= 336$, und die gegebene Function wird also für $x = 3$ ein Minimum.

Um nun ferner zu entscheiden, ob für $x = 1$ und $x = 2$ Maxima oder Minima Statt finden, muss man den dritten Differentialquotienten

$$\frac{\partial^3 y}{\partial x^3} = 84(15x^4 - 100x^3 + 240x^2 - 246x + 91)$$
$$= 84(x-1)(15x^3 - 85x^2 + 155x - 91)$$

entwickeln.

Da dieser Differentialquotient für $x = 2$ nicht verschwindet; so findet für $x = 2$ weder ein Maximum, noch ein Minimum Statt.

Weil aber für $x = 1$ der dritte Differentialquotient verschwindet; so muss man, um zu entscheiden, ob für diesen Werth von x ein Maximum oder ein Minimum Statt findet, noch den vierten Differentialquotienten

$$\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = 168(30x^3 - 150x^2 + 240x - 123)$$

entwickeln. Für $x = 1$ wird dieser Differentialquotient $= -504$, und die gegebene Function für diesen Werth von x also ein *Maximum*.

Die den Werthen $x = 1$ und $x = 3$, für welche die gegebene Function respective ein Maximum und ein Minimum wird, entsprechenden Werthe von y sind 70 und 54.

IV. Die Werthe von x zu finden, für welche die Function

$$y = \frac{x^3 + x}{x^4 - x^2 + 1}$$

ein Maximum oder ein Minimum wird.

Man setze

$$p = x^3 + x, \quad q = x^4 - x^2 + 1;$$

so ist

$$\frac{\partial p}{\partial x} = 3x^2 + 1, \quad \frac{\partial q}{\partial x} = 4x^3 - 2x,$$

und man muss also nach §. 155. x aus der Gleichung

$$(x^4 - x^2 + 1)(3x^2 + 1) - (x^3 + x)(4x^3 - 2x) = 0,$$

d. i.

$$x^6 + 4x^4 - 4x^2 - 1 = 0$$

bestimmen.

Da sich diese Gleichung unter der Form

$$(x^2 - 1)(x^4 + 5x^2 + 1) = 0$$

darstellen lässt; so hat man zur Bestimmung von x die beiden Gleichungen

$$x^2 - 1 = 0, \quad x^4 + 5x^2 + 1 = 0.$$

Aus der ersten ergiebt sich $x = \pm 1$; aus der zweiten erhält man

$$x^2 = \frac{-5 \pm \sqrt{21}}{2},$$

und folglich

$$x = \sqrt{\frac{-5 \pm \sqrt{21}}{2}}, \quad x = -\sqrt{\frac{-5 \pm \sqrt{21}}{2}}.$$

Da die vier letzten Wurzeln sämmtlich imaginär sind; so hat unsere Gleichung bloss die beiden reellen Wurzeln $+1$ und -1.

Weil nun ferner

$$q\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} - p\frac{\partial^2 q}{\partial x^2} = -6x^5 - 16x^3 + 8x$$

ist, und diese Grösse für $x = +1$ und $x = -1$ respective $= -14$ und $= +14$ ist; so wird die gegebene Function für $x = +1$ ein Maximum, für $x = -1$ dagegen ein Minimum.

V. Drei Spieler haben zusammen die Summe a verloren. Der zweite verlor zwei Mal so viel als der erste, und die drei Verluste verhalten sich so, dass ihr Product ein Maximum ist. Wie viel betrug der Verlust eines jeden der drei Spieler?

Ist x der Verlust des ersten, so ist $2x$ der Verlust des zweiten, und folglich $a - 3x$ der Verlust des dritten. Das Product der drei Verluste ist

$$y = 2x^2(a - 3x) = 2ax^2 - 6x^3.$$

Differentiirt man, so erhält man

$$\frac{\partial y}{\partial x} = 4ax - 18x^2,$$

und hat also zur Bestimmung von x die Gleichung

$$4ax - 18x^2 = (4a - 18x)x = 0,$$

d. i. die beiden Gleichungen

$$x = 0, \quad 4a - 18x = 0,$$

aus denen sich die Werthe $x = 0$ und $x = \frac{2}{9}a$ ergeben.

Der zweite Differentialquotient ist

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 4a - 36x,$$

und erhält also für $x = 0$ und $x = \frac{2}{9}a$ respective die Werthe $4a$ und $-4a$. Daher wird y für $x = 0$ ein Minimum, für $x = \frac{2}{9}a$ dagegen ein Maximum, und man muss folglich den Bedingungen der Aufgabe gemäss $x = \frac{2}{9}a$ setzen. Die Verluste der beiden andern Spieler sind $\frac{4}{9}a$ und $\frac{1}{3}a$.

VI. Einen Werth von x zu finden, für welchen die Function

$$y = x^a e^{-x},$$

wo a eine positive Grösse seyn soll, ein Maximum oder ein Minimum wird.

Es ist

$$\frac{\partial y}{\partial x} = x^a e^{-x}\left(\frac{a}{x} - 1\right),$$

und dieser Differentialquotient verschwindet also für $x = a$. Für den zweiten Differentialquotienten erhält man

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \left\{\left(\frac{a}{x} - 1\right)^2 - \frac{a}{x^2}\right\} y,$$

und für $x = a$ ist also der Werth dieses Differentialquotienten $= -a^{a-1}e^{-a}$, d. i. negativ. Folglich wird für $x = a$ die gegebene Function ein Maximum.

Nach diesen arithmetischen Beispielen wollen wir nun einige geometrische Aufgaben über die Maxima und Minima auflösen.

§. 157.

Aufgabe. Unter allen Dreiecken mit zwei gegebenen Seiten a, b dasjenige zu finden, welches den grössten Flächeninhalt hat.

Auflösung. Die dritte Seite des gesuchten Dreiecks sey x, sein Flächeninhalt sey y. Das Quadrat seiner Höhe in Bezug auf a als Grundlinie ist, wie man leicht findet,

$$\frac{4a^2b^2 - (a^2 + b^2 - x^2)^2}{4a^2}.$$

Folglich ist

$$y^2 = \tfrac{1}{16}\{4a^2b^2 - (a^2 + b^2 - x^2)^2\}$$

oder

$$16y^2 = 4a^2b^2 - (a^2 + b^2 - x^2)^2.$$

Differentiirt man nun; so erhält man

$$8y\frac{\partial y}{\partial x} = x(a^2 + b^2 - x^2).$$

Ist aber $\frac{\partial y}{\partial x} = 0$; so ist auch

$$8y\frac{\partial y}{\partial x} = 0,$$

und x muss folglich aus der Gleichung

$$x(a^2 + b^2 - x^2) = 0,$$

welche sich in die beiden Gleichungen

$$x = 0, \quad a^2 + b^2 - x^2 = 0$$

zerlegen lässt, bestimmt werden. Aus diesen Gleichungen ergeben sich die drei folgenden Werthe von x:

$$x = 0, \quad x = \pm\sqrt{a^2 + b^2}.$$

Da aber die beiden Werthe

$$x = 0, \quad x = -\sqrt{a^2 + b^2}$$

in dem vorliegenden Falle offenbar nicht zulässig sind; so bleibt bloss der Werth

$$x = \sqrt{a^2 + b^2},$$

und es muss nun untersucht werden, ob für diesen Werth von x der Flächeninhalt ein Maximum wird.

Differentiirt man zu dem Ende die Gleichung

$$8y\frac{\partial y}{\partial x} = x(a^2 + b^2 - x^2);$$

so erhält man

$$8y\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + 8\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 = a^2 + b^2 - 3x^2.$$

Weil nun $\frac{\partial y}{\partial x}$ für $x = \sqrt{a^2 + b^2}$ verschwindet; so ist $-2(a^2 + b^2)$ der Werth, welchen $8y\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ erhält, wenn man $x = \sqrt{a^2 + b^2}$ setzt, und $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ erhält also, weil y in dem vorliegenden Falle offenbar positiv ist, für den in Rede stehenden Werth von x einen negativen Werth. Daher wird y für $x = \sqrt{a^2 + b^2}$ in der That ein Maximum.

Nach dem pythagoräischen Lehrsatze ist x die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks, dessen beide Catheten a und b sind. Daher hat unter allen Dreiecken mit zwei gegebenen Seiten dasjenige den grössten Flächeninhalt, in welchem diese beiden Seiten einen rechten Winkel mit einander einschliessen.

§. 158.

Aufgabe. Die Summe $2a$ der drei Seiten eines Dreiecks und eine derselben b sey gegeben; wie gross müssen die beiden andern Seiten seyn, wenn der Flächeninhalt des Dreiecks ein Maximum seyn soll?

Auflösung. In Bezug auf die beiden gegebenen Grössen a und b ist bei dieser Aufgabe zuerst zu bemerken, dass dieselben nicht ganz willkührlich sind, sondern dass immer $a > b$ seyn muss, weil die halbe Summe der drei Seiten eines Dreiecks nothwendig immer grösser als jede Seite desselben seyn muss, wie auf folgende Art leicht gezeigt werden kann.

Sind α, β, γ die drei Seiten des Dreyecks; so ist nach einem bekannten geometrischen Satze

$$\beta + \gamma > \alpha,$$

und folglich, wenn man auf beiden Seiten α addirt,

$$\alpha + \beta + \gamma > 2\alpha$$

oder

$$\tfrac{1}{2}(\alpha + \beta + \gamma) > \alpha,$$

wie behauptet wurde.

Dies vorausgesetzt, sey nun x die eine der beiden andern Seiten des gesuchten Dreiecks; so ist $2a - b - x$ die dritte Seite desselben. Ist ferner y der Flächeninhalt; so ist nach einem sehr bekannten geometrischen Satze

$$y^2 = a(a - b)(a - x)(b - a + x)$$

und folglich

$$2y\frac{\partial y}{\partial x} = a(a - b)(2a - b - 2x),$$

so dass also x offenbar aus der Gleichung

$$2a - b - 2x = 0$$

bestimmt werden muss. Durch Auflösung dieser Gleichung ergiebt sich

$$x = \frac{2a - b}{2},$$

und die dritte Seite ist

$$2a - b - x = \frac{2a - b}{2},$$

so dass also das gesuchte Dreieck offenbar ein gleichschenkliges Dreieck seyn muss.

Durch Differentiation erhält man nun ferner aus dem Obigen

$$y\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 = -a(a - b)$$

Nach dem Obigen ist $a > b$. Also ist die Grösse

$$y\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2,$$

und folglich offenbar auch die Grösse $y\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ für jedes x, also auch für

$$x = \frac{2a - b}{2}$$

negativ. Für diesen Werth von x ist aber

$$y = \tfrac{1}{2} b \sqrt{a(a-b)},$$

wo die Quadratwurzel, der Natur von y gemäss, offenbar positiv genommen werden muss. Also ist für den in Rede stehenden Werth von x der zweite Differentialquotient offenbar negativ, und y wird folglich für diesen Werth von x in der That ein Maximum. Dass das gesuchte Dreieck ein gleichschenkliges ist, ist schon vorher bemerkt worden.

§. 159.

Aufgabe. Unter allen rechtwinkligen Vierecken, welche sich wie *CDEF* (Fig. 1.) in einen Kreisquadranten *ACB* beschreiben lassen, dasjenige zu finden, welches den grössten Flächeninhalt hat.

Auflösung. Der Radius des Kreisquadranten sey a, die Seite *CD* des gesuchten rechtwinkligen Vierecks sey x; so ist $\sqrt{a^2 - x^2}$ die andere Seite dieses Vierecks, und folglich, wenn wir seinen Flächeninhalt, welcher ein Maximum werden soll, durch y bezeichnen,

$$y = x\sqrt{a^2 - x^2}.$$

Durch Differentiation ergiebt sich

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{a^2 - 2x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}},$$

und folglich zur Bestimmung des x die Gleichung

$$a^2 - 2x^2 = 0,$$

aus der

$$x = \pm\frac{a}{\sqrt{2}},$$

oder, weil x seiner Natur nach offenbar positiv seyn muss,

$$x = \frac{a}{\sqrt{2}}$$

folgt.

Durch Entwickelung des zweiten Differentialquotienten erhält man

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{(2x^2 - 3a^2)x}{(a^2 - x^2)\sqrt{a^2 - x^2}},$$

und für $x = \frac{a}{\sqrt{2}}$ ist also der Werth dieses Differentialquotienten

offenbar negativ. Daher wird für $x=\frac{a}{\sqrt{2}}$ der Flächeninhalt y wirklich ein Maximum.

Weil $CD=\frac{a}{\sqrt{2}}$ und

$$CE=\sqrt{a^2-CD^2}=\sqrt{a^2-\tfrac{1}{2}a^2}=\frac{a}{\sqrt{2}},$$

also $CD=CE$ ist; so ist das gesuchte rechtwinklige Viereck das in den gegebenen Quadranten beschriebene Quadrat, welches man immer leicht erhalten kann, wenn man den rechten Winkel ACB halbirt.

§. 160.

Aufgabe. Unter allen rechtwinkligen Vierecken, welche sich wie $CDEF$ (Fig. 1.) in einen Kreisquadranten ACB beschreiben lassen, dasjenige zu finden, welches den grössten Umfang hat.

Auflösung. Behält man die in §. 159. gebrauchten Zeichen bei, nur dass jetzt y den Umfang des gesuchten rechtwinkligen Vierecks bezeichnet; so ist

$$y=2x+2\sqrt{a^2-x^2},$$

und folglich

$$\frac{\partial y}{\partial x}=\frac{2(\sqrt{a^2-x^2}-x)}{\sqrt{a^2-x^2}}.$$

Also hat man zur Bestimmung von x die Gleichung

$$\sqrt{a^2-x^2}-x=0,$$

aus der sich

$$x=\pm\frac{a}{\sqrt{2}},$$

oder, weil hier wieder x offenbar positiv ist,

$$x=\frac{a}{\sqrt{2}}$$

ergiebt.

Für den zweiten Differentialquotienten erhält man

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}=-\frac{2a^2}{(a^2-x^2)\sqrt{a^2-x^2}},$$

so dass also der Werth dieses Differentialquotienten für $x=\frac{a}{\sqrt{2}}$ offenbar negativ ist, und für diesen Werth von x folglich y in der That ein Maximum wird. Auch erhellet wie in §. 159., dass das gesuchte rechtwinklige Viereck das in den gegebenen Quadranten beschriebene Quadrat ist.

§. 161.

Aufgabe. In einer Ebene seyen zwei Punkte A, B (Fig. 2.) und eine gerade Linie MN gegeben; man soll in letzterer einen Punkt E so bestimmen, dass die Summe $AE + BE$ der beiden von A und B nach E gezogenen geraden Linien ein Minimum wird.

Auflösung. Um die Lage der gegebenen Punkte A, B und des gesuchten Punktes E gehörig bestimmen zu können, wollen wir die Linie MN als Abscissenaxe eines rechtwinkligen Coordinatensystems, und den Fusspunkt des von A auf MN gefällten Perpendikels als Anfang der Coordinaten annehmen. Die Ordinate des Punktes A in Bezug auf dieses System sey a, die Abscisse und Ordinate des Punktes B seyen c und b, die Abscisse des gesuchten Punktes E sey x, und der Einfachheit wegen wollen wir, was offenbar verstattet ist, annehmen, dass a und c positiv seyen. Nach Principien der analytischen Geometrie ist

$$AE = \sqrt{a^2 + x^2}, \quad BE = \sqrt{b^2 + (c-x)^2},$$

die Quadratwurzeln positiv genommen, und folglich, wenn wir die Summe der Linien AE und BE, welche ein Minimum werden soll, durch y bezeichnen,

$$y = \sqrt{a^2 + x^2} + \sqrt{b^2 + (c-x)^2};$$

also

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}} - \frac{c-x}{\sqrt{b^2 + (c-x)^2}}.$$

Folglich hat man zur Bestimmung von x die Gleichung

$$\frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}} - \frac{c-x}{\sqrt{b^2 + (c-x)^2}} = 0,$$

welche, rational gemacht und gehörig reducirt, endlich auf die quadratische Gleichung

$$x^2 + \frac{2a^2 c}{b^2 - a^2} x = \frac{a^2 c^2}{b^2 - a^2}$$

führt, durch deren Auflösung man

$$x = \pm \frac{ac(b \mp a)}{(b-a)(b+a)},$$

wo die obern und untern Zeichen sich auf einander beziehen, d. i.

$$x = \frac{ac}{b+a} \text{ und } x = -\frac{ac}{b-a},$$

oder

$$x = \frac{ac}{a+b} \text{ und } x = \frac{ac}{a-b}$$

erhält.

Entwickelt man nun den zweiten Differentialquotienten; so erhält man

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{a^2}{(a^2 + x^2)\sqrt{a^2 + x^2}} + \frac{b^2}{\{b^2 + (c-x)^2\}\sqrt{b^2 + (c-x)^2}},$$

und übersieht sogleich, dass derselbe für die beiden obigen Werthe von x positiv ist, so dass also y für jeden dieser beiden Werthe von x ein Minimum wird, welches nach dem, was in §. 152. gesagt worden ist, nicht auffallend seyn kann.

Für

$$x = \frac{ac}{a+b} \text{ und } x = \frac{ac}{a-b}$$

wird aber respective

$$y = (a \pm b)\sqrt{1 + \left(\frac{c}{a+b}\right)^2}$$

und

$$y = (a \pm b)\sqrt{1 + \left(\frac{c}{a-b}\right)^2},$$

indem man nämlich, weil die beiden Quadratwurzeln, deren Summe y ist, der Natur der Aufgabe nach stets positiv seyn müssen, in beiden Fällen das obere oder untere Zeichen nimmt, jenachdem b positiv oder negativ ist. Ist nun b positiv; so ist von den Grössen

$$(a+b)\sqrt{1 + \left(\frac{c}{a+b}\right)^2},\ (a+b)\sqrt{1 + \left(\frac{c}{a-b}\right)^2}$$

offenbar die erste am kleinsten. Dagegen ist, wenn b negativ ist, von den beiden Grössen

$$(a-b)\sqrt{1 + \left(\frac{c}{a+b}\right)^2},\ (a-b)\sqrt{1 + \left(\frac{c}{a-b}\right)^2}$$

offenbar die zweite am kleinsten. Folglich muss man, damit y seinen allerkleinsten Werth erhalte, in dem Falle, wo b positiv ist,

$$x = \frac{ac}{a+b};$$

dagegen in dem Falle, wo b negativ ist,

$$x = \frac{ac}{a-b}$$

setzen. Nimmt man also, so wie a und c, auch b immer als positiv an; so wird man, damit y seinen kleinsten Werth erhalte, stets

$$x = \frac{ac}{a+b}$$

zu setzen haben, und aus dieser Formel erhellet auch, dass x nie grösser als c ist.

In Beziehung auf *Fig.* 2. ist nun

$$AC = a,\ BD = b,\ CD = c,\ CE = x,$$

und folglich nach dem Vorhergehenden

$$CE = \frac{AC \cdot CD}{AC + BD}$$

oder

$$AC + BD : AC = CD : CE.$$

Also ist nach einem bekannten Satze von den Proportionen:

$$BD : AC = CD - CE : CE,$$

d. i.

$$BD : AC = DE : CE$$

oder

$$AC : CE = BD : DE.$$

Daher sind die beiden rechtwinkligen Dreiecke *ACE*, *BDE* einander ähnlich, und folglich die beiden Winkel *AEC*, *BED* einander gleich. Also muss der Punkt *E* jederzeit eine solche Lage in der Linie *MN* haben, dass die beiden Linien *AE* und *BE* gegen dieselbe unter gleichen Winkeln geneigt sind.

Diese Aufgabe bietet zugleich ein Beispiel eines sogenannten *Minimum Minimorum* dar, über dessen allgemeinen Begriff wir hier wohl weiter nichts hinzuzusetzen brauchen.

§. 162.

Aufgabe. Unter allen geraden Cylindern von einem gegebenen cubischen Inhalt a denjenigen zu finden, welcher die kleinste Oberfläche hat.

Auflösung. Setzt man den Halbmesser der Grundfläche des gesuchten Cylinders $= x$, seine Oberfläche $= y$; so ist, wie leicht erhellet,

$$y = \frac{2a}{x} + 2\pi x^2;$$

also

$$\frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{2a}{x^2} + 4\pi x.$$

Folglich hat man zur Bestimmnng von x die Gleichung

$$-\frac{2a}{x^2} + 4\pi x = 0,$$

aus welcher sich

$$x = \sqrt[3]{\frac{a}{2\pi}}$$

ergiebt. Der zweite Differentialquotient ist

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 4\pi + \frac{4a}{x^3},$$

und ist also für den obigen Werth von x offenbar positiv, so dass y für diesen Werth von x in der That ein Minimum ist.

Die Höhe des Cylinders ist

$$\frac{a}{\pi x^2} = 2\sqrt[3]{\frac{a}{2\pi}},$$

so dass also, für den Fall des Minimums der Oberfläche, die Höhe des Cylinders dem Durchmesser seiner Grundfläche gleich ist.

§. 163.

Aufgabe. Unter allen geraden Cylindern von gegebenem cubischen Inhalt a denjenigen zu finden, bei welchem die Summe der Seitenfläche und der einen Grundfläche ein Minimum ist.

Auflösung. Ist x wieder der Halbmesser der Grundfläche, y die Grösse, welche ein Minimum werden soll; so ist

$$y = \frac{2a}{x} + \pi x^2$$

und folglich

$$\frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{2a}{x^2} + 2\pi x.$$

Also hat man zur Bestimmung von x die Gleichung

$$-\frac{2a}{x^2} + 2\pi x = 0,$$

aus der sich

$$x = \sqrt[3]{\frac{a}{\pi}}$$

ergiebt. Der zweite Differentialquotient ist

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 2\pi + \frac{4a}{x^3}$$

und ist also für den obigen Werth von x offenbar positiv, daher für diesen Werth von x in der That ein Minimum Statt findet.

Die Höhe des Cylinders ist

$$\frac{a}{\pi x^2} = \sqrt[3]{\frac{a}{\pi}},$$

und folglich dem Halbmesser der Grundfläche gleich.

Diese Aufgabe kann bei der Verfertigung der cylindrischen Hohlmaasse Anwendung finden, indem dieselben offenbar dann die vortheilhafteste Gestalt haben werden, wenn zu ihrer Verfertigung, denselben cubischen Inhalt vorausgesetzt, das wenigste Material erforderlich ist.

§. 164.

Aufgabe. Unter allen in eine Kugel mit dem gegebenen Halbmesser r beschriebenen geraden Cylindern denjenigen zu finden, welcher entweder die grösste Seitenfläche oder den grössten körperlichen Inhalt hat.

Auflösung. Man bezeichne in beiden Fällen die Höhe des gesuchten Cylinders durch $2x$, die Seitenfläche durch s, den körperlichen Inhalt durch v. Der Halbmesser der Grundfläche ist, wie leicht erhellet, $= \sqrt{r^2 - x^2}$, und folglich

$$s = 4\pi x\sqrt{r^2 - x^2}, \quad v = 2\pi x(r^2 - x^2);$$

also

$$\frac{\partial s}{\partial x} = 4\pi \frac{r^2 - 2x^2}{\sqrt{r^2 - x^2}}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 2\pi(r^2 - 3x^2).$$

Soll nun zuerst s ein Maximum werden; so setze man

$$r^2 - 2x^2 = 0,$$

und bestimme x aus dieser Gleichung. Dies giebt, weil x offenbar positiv seyn muss, $x = \frac{r}{\sqrt{2}}$. Entwickelt man nun noch den zweiten Differentialquotienten von s; so erhält man

$$\frac{\partial^2 s}{\partial x^2} = 4\pi x \frac{2x^2 - 3r^2}{(r^2 - x^2)^{\frac{3}{2}}},$$

und dieser Differentialquotient wird für den obigen Werth von x also $= -16\pi$, so dass s folglich für $x = \frac{r}{\sqrt{2}}$ wirklich ein Maximum wird. Der Inhalt der Seitenfläche des in die Kugel beschriebenen Cylinders, welcher die grösste Seitenfläche hat, findet sich nach dem Obigen leicht $= 2r^2\pi$, d. h. doppelt so gross wie der Inhalt eines grössten Kreises der Kugel.

Soll ferner v ein Maximum werden; so bestimme man x aus der Gleichung

$$r^2 - 3x^2 = 0.$$

Dadurch erhält man $x = \frac{r}{\sqrt{3}}$. Der zweite Differentialquotient von v ist

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = -12\pi x,$$

und wird für den obigen Werth von x also $= -\frac{12\pi r}{\sqrt{3}}$, d. i. negativ, so dass also v für $x = \frac{r}{\sqrt{3}}$ wirklich ein Maximum wird. Der Inhalt des in die Kugel beschriebenen Cylinders, welcher den grössten körperlichen Inhalt hat, ist $= 4\pi\left(\frac{r}{\sqrt{3}}\right)^3$, d. h. drei Mal so gross wie der Inhalt einer Kugel, welche die Höhe des Cylinders zum Durchmesser hat.

§. 165.

Wir wollen nun die allgemeinen Bedingungen des Maximums und Minimums noch auf einen andern Ausdruck bringen, weil derselbe seiner Einfachheit wegen auch gekannt zu seyn verdient, und in manchen Fällen mit besonderm Vortheil angewandt wird.

Das Symbol x möge wieder einen gewissen bestimmten Werth der unabhängigen veränderlichen Grösse, und $f(x)$ den entsprechenden Werth der gegebenen Function bezeichnen. Um

nun zu beurtheilen, ob $f(x)$ vielleicht ein Maximum oder ein Minimum der gegebenen Function ist, kann man auf folgende Art verfahren.

Man lasse x sich um die der Null unendlich nahe kommende Grösse Δx verändern. Ist dann

I. $\Delta f(x)$ für positive und negative, immer als der Null unendlich nahe kommend gedachte, Δx negativ; so ist $f(x)$ ein Maximum. Ist dagegen

II. $\Delta f(x)$ für positive und negative, immer als der Null unendlich nahe kommend gedachte, Δx positiv; so ist $f(x)$ ein Minimum.

Dass alles dieses den oben aufgestellten allgemeinen Begriffen des Maximums und Minimums völlig gemäss ist, fällt sogleich in die Augen.

Weil aber

$$\Delta f(x) = \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} \Delta x.$$

ist; so lassen sich die obigen Bedingungen des Maximums und Minimums, wie sogleich erhellet, auch auf folgende Art ausdrücken:

I. Wenn für der Null unendlich nahe kommende Δx der Differenzenquotient $\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}$ negativ oder positiv ist, jenachdem Δx positiv oder negativ ist; so ist $f(x)$ ein Maximum.

II. Wenn für der Null unendlich nahe kommende Δx der Differenzenquotient $\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}$ positiv oder negativ ist, jenachdem Δx positiv oder negativ ist; so ist $f(x)$ ein Minimum.

Dies kann man aber auch auf folgende Art ausdrücken:

I. Wenn für der Null unendlich nahe kommende positive oder negative Δx die Grössen Δx und $\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}$ stets ungleiche Vorzeichen haben; so ist $f(x)$ ein Maximum.

II. Wenn für der Null unendlich nahe kommende positive oder negative Δx die Grössen Δx und $\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}$ stets gleiche Vorzeichen haben; so ist $f(x)$ ein Minimum.

Nach dem allgemeinen Begriffe des Differentialquotienten nähern aber die Grössen

$$f'(x+\Delta x) \text{ und } \frac{\Delta f(x)}{\Delta x}$$

sich desto mehr, je näher Δx der Null kommt, und können einander *beliebig* nahe gebracht werden, wenn man nur Δx der

Null nahe genug kommen lässt, woraus sogleich erhellet, dass für der Null unendlich nahe kommende Δx die Grössen

$$f'(x+\Delta x) \text{ und } \frac{\Delta f(x)}{\Delta x}$$

stets gleiche Vorzeichen haben werden. Daher können die obigen Bedingungen des Maximums und Minimums offenbar auch auf den folgenden Ausdruck gebracht werden.

I. Wenn für der Null unendlich nahe kommende positive oder negative Δx die Grössen Δx und $f'(x+\Delta x)$ stets ungleiche Vorzeichen haben; so ist $f(x)$ ein Maximum.

II. Wenn für der Null unendlich nahe kommende positive oder negative Δx die Grössen Δx und $f'(x+\Delta x)$ stets gleiche Vorzeichen haben; so ist $f(x)$ ein Minimum.

Lässt man endlich i eine unendlich kleine positive Grösse bezeichnen; so kann man diese Bedingungen auch auf folgende Art ausdrücken:

I. Wenn die Grösse $f'(x-i)$ positiv, die Grösse $f'(x+i)$ dagegen negativ ist; so ist $f(x)$ ein Maximum.

II. Wenn die Grösse $f'(x-i)$ negativ, die Grösse $f'(x+i)$ dagegen positiv ist; so ist $f(x)$ ein Minimum.

Da hiernach, wenn $f(x)$ ein Maximum oder ein Minimum ist, $f'(x-i)$ und $f'(x+i)$ stets ungleiche Vorzeichen haben; so ist klar, dass im Falle des Maximums oder Minimums, wenn nur der erste Differentialquotient der gegebenen Function in der Nähe des Werths x ihrer unabhängigen veränderlichen Grösse stetig ist, jederzeit $f'(x) = 0$ seyn muss, wie wir auch schon aus dem Obigen wissen. Auch wird nun leicht erhellen, dass, wenn $f'(x-i)$ und $f'(x+i)$ gleiche Vorzeichen haben, $f(x)$ weder ein Maximum, noch ein Minimum ist.

§. 166.

Die Bedingungen des Maximums und Minimums, so wie sie im vorhergehenden Paragraphen ausgedrückt worden sind, treten oft mit Vortheil an die Stelle der nicht selten weitläufigen und Zeit raubenden Entwickelung des zweiten Differentialquotienten, wie dies z. B. aus der folgenden Aufgabe erhellen wird.

Aufgabe. Unter allen rechtwinkligen Dreiecken mit einer gegebenen Cathete a dasjenige zu finden, in welchem das Verhältniss der Hypotenuse zu der Summe der beiden Catheten ein Maximum ist.

Auflösung. Ist x die andere Cathete des gesuchten Dreiecks; so ist $\sqrt{a^2+x^2}$ die Hypotenuse desselben, und nach der Bedingung der Aufgabe soll das Verhältniss

$$\sqrt{a^2+x^2} : a+x,$$

d. i. der Bruch

$$y = \frac{a+x}{\sqrt{a^2+x^2}}$$

ein Maximum werden. Durch Differentiation erhält man

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{a(a-x)}{(a^2+x^2)\sqrt{a^2+x^2}}$$

und x muss also offenbar aus der Gleichung $a - x = 0$ bestimmt werden. Die Auflösung dieser Gleichung giebt $x = a$.

Für $y = f(x)$ ist in diesem Falle

$$f'(x) = \frac{a(a-x)}{(a^2+x^2)\sqrt{a^2+x^2}}.$$

Denkt man sich nun hierin $x = a$ gesetzt und lässt dann x von a an um die unendlich kleine positive Grösse i ab- und zunehmen; so erhellet auf der Stelle, dass $f'(a-i)$ positiv, dagegen $f'(a+i)$ negativ, und folglich nach §. 165. $f(a)$ ein Maximum ist.

Durch Entwickelung des zweiten Differentialquotienten erhält man

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{a(2x^2-3ax-a^2)}{(a^2+x^2)\sqrt{a^2+x^2}}$$

und derselbe erhält also für $x = a$ offenbar einen negativen Werth. Daher wird y für $x = a$ ein Maximum, wie wir schon vorher gefunden haben.

Das oben angestellte einfache Raisonnement führt aber in diesem Falle gewiss leichter zum Zweck, wie die Berechnung des zweiten Differentialquotienten.

In §. 159. fanden wir $x = \frac{a}{\sqrt{2}}$ und, wenn wir $y = f(x)$ setzen,

$$f'(x) = \frac{a^2 - 2x^2}{\sqrt{a^2-x^2}},$$

und es erhellet wieder leicht, dass $f'\left(\frac{a}{\sqrt{2}} - i\right)$ positiv, dagegen $f'\left(\frac{a}{\sqrt{2}} + i\right)$ negativ ist, folglich nach §. 165. ein Maximum Statt findet, wie auch in §. 159. durch Entwickelung des zweiten Differentialquotienten gefunden worden ist.

In §. 163. fanden wir $x = \sqrt[3]{\frac{a}{\pi}}$ und, wenn wir $y = f(x)$ setzen,

$$f'(x) = -\frac{2a}{x^2} + 2\pi x.$$

Für $x = \sqrt[3]{\frac{a}{\pi}}$ verschwindet $f'(x)$. Lassen wir nun x von $\sqrt[3]{\frac{a}{\pi}}$ an um i abnehmen; so nimmt $\frac{2a}{x^2}$ zu, dagegen $2\pi x$ ab.

Also ist offenbar $f'\left(\sqrt[3]{\frac{a}{\pi}} - i\right)$ negativ. Lassen wir dagegen x von $\sqrt[3]{\frac{a}{\pi}}$ an um i zunehmen; so nimmt $\frac{2a}{x^2}$ ab, dagegen $2\pi x$ zu. Also ist offenbar $f'\left(\sqrt[3]{\frac{a}{\pi}} + i\right)$ positiv. Folglich wird nach §. 165. $y = f(x)$ für $x = \sqrt[3]{\frac{a}{\pi}}$ ein Minimum, wie auch in §. 163. durch Entwickelung des zweiten Differentialquotienten gefunden worden ist.

§. 167.

Die Werthe von x, für welche eine Unterbrechung der Stetigkeit der Function $y = f(x)$ Statt findet, muss man, um zu bestimmen, ob für dieselben, wie es in der That oft der Fall ist, nicht vielleicht wenigstens in gewissem Sinne ein Maximum oder ein Minimum Statt findet, jederzeit besonders untersuchen, wie wir jetzt an ein Paar einfachen Beispielen zeigen wollen.

Ist z. B. $y = \pm \sqrt{x}$; so findet, wenn man sich vorstellt, dass x sich von $-\infty$ bis $+\infty$ stetig verändert, bei dem Uebergange dieser Grösse vom Negativen durch Null zum Positiven offenbar eine Unterbrechung der Stetigkeit der Function y Statt, weil dieselbe dann vom Imaginären zum Reellen übergeht, und wir müssen daher den Werth $x = 0$ in Bezug auf die Maxima und Minima der Function y besonders untersuchen. Setzt man aber zuerst $y = +\sqrt{x}$; so ist klar, dass, wenn man x von 0 an stetig wachsen lässt, auch y von 0 an stetig und fortwährend wachsen wird, und dass daher der dem Werthe $x = 0$ der unabhängigen veränderlichen Grösse entsprechende Werth $y = 0$ der Function $y = +\sqrt{x}$ offenbar in gewissem Sinne als ein Minimum dieser Function betrachtet werden kann, wenn auch freilich der in Rede stehende bestimmte Werth der gegebenen Function eigentlich nicht dem in §. 152. aufgestellten allgemeinen Begriffe des Minimums entspricht, welches aber auch nicht seyn kann, weil dieser allgemeine Begriff des Minimums, eben so wie der in §. 152. aufgestellte allgemeine Begriff des Maximums, als nothwendige völlig unerlässliche Bedingung voraussetzt, dass die Function in der Nähe des Werths ihrer unabhängigen veränderlichen Grösse, für welchen sie ein Maximum oder ein Minimum werden soll, stetig ist. Setzt man ferner $y = -\sqrt{x}$; so nimmt y, wenn man x von 0 an stetig wachsen lässt, stetig und fortwährend ab, und der dem Werthe $x = 0$ entsprechende Werth $y = 0$ der Function $y = -\sqrt{x}$ kann also als ein Maximum dieser Function betrachtet werden.

Für $x = 0$ findet eine Unterbrechung der Stetigkeit der Function $y = \frac{1}{lx}$ Statt. Wir wollen nun annehmen, dass die Grössen x' und x'' beide positiv und beide kleiner als die Einheit seyen, dass aber $x'' > x'$ sey. Weil bekanntlich $x' = e^{lx'}$, $x'' = e^{lx''}$ ist; so ist

$$e^{lx''} > e^{lx'},$$

und folglich

$$e^{-lx''} < e^{-lx'}.$$

Weil aber x' und x'' beide kleiner als die Einheit sind; so sind lx', lx'' beide negativ, also $-lx'$, $-lx''$ beide positiv. Folglich ist nach dem Vorhergehenden offenbar $-lx'' < -lx'$; also

$$-\frac{1}{lx''} > -\frac{1}{lx'},$$

und daher, weil diese Grössen beide positiv, folglich

$$\frac{1}{lx'} \text{ und } \frac{1}{lx''}$$

beide negativ sind,

$$\frac{1}{lx''} < \frac{1}{lx'}.$$

Hieraus sieht man, dass man den dem Werthe $x = 0$ entsprechenden Werth der gegebenen Function, welcher, wie leicht erhellen wird, ebenfalls $= 0$ zu setzen ist, als ein Maximum dieser Function betrachten kann.

Für $x = 1$ findet ebenfalls eine Unterbrechung der Stetigkeit der Function $y = \frac{1}{lx}$ Statt, und man kann den diesem Werthe der unabhängigen veränderlichen Grösse entsprechenden Werth der Function sowohl $= +\infty$, als auch $= -\infty$ setzen, jenachdem man sich nämlich x von der Einheit an stetig wachsend, oder von der Einheit an stetig abnehmend denkt. Den Werth $+\infty$ hat man offenbar als ein Maximum, den Werth $-\infty$ dagegen als ein Minimum der in Rede stehenden Function zu betrachten.

Der dem Werthe $x = \infty$ entsprechende Werth der Function $y = \frac{1}{lx}$, welcher $= 0$ ist, ist endlich offenbar als ein Minimum dieser Function zu betrachten.

§. 168.

Der in §. 165. bewiesenen Bedingungen des Maximums und Minimums bedient man sich vorzüglich auch, um zu beurtheilen, ob den Werthen der unabhängigen veränderlichen Grösse, bei

denen eine Unterbrechung der Stetigkeit des ersten Differentialquotienten Statt findet, ein Maximum oder ein Minimum der gegebenen Function entspricht, und untersucht in dieser Beziehung vorzugsweise immer die Werthe von x, für welche

$$\frac{1}{f'(x)} = 0$$

ist.

Ist z. B. die Function

$$f(x) = b + c(x-a)^{\frac{2}{3}}$$

gegeben; so ist

$$f'(x) = \tfrac{2}{3}c(x-a)^{-\frac{1}{3}},$$

und folglich

$$\frac{1}{f'(x)} = \frac{3}{2c}(x-a)^{\frac{1}{3}},$$

eine Grösse, welche für $x = a$ verschwindet. Weil nun

$$f'(a-i) = \tfrac{2}{3}c(-i)^{-\frac{1}{3}} = -\frac{2c}{3\sqrt[3]{i}},$$

$$f'(a+i) = \tfrac{2}{3}c(+i)^{-\frac{1}{3}} = +\frac{2c}{3\sqrt[3]{i}}$$

ist; so ist

1. wenn c positiv ist, $f'(a-i)$ negativ, $f'(a+i)$ positiv, also nach §. 165. $f(a)$ ein Minimum; und

2. wenn c negativ ist, $f'(a-i)$ positiv, $f'(a+i)$ negativ, also nach §. 165. $f(a)$ ein Maximum.

B. Entwickelte Functionen mit zwei von einander unabhängigen veränderlichen Grössen.

§. 169.

Es sey $u = f(x, y)$ eine beliebige Function zweier von einander unabhängigen veränderlichen Grössen, und x, y sollen jetzt wieder irgend zwei bestimmte Werthe dieser veränderlichen Grössen, $u = f(x, y)$ also den diesen bestimmten Werthen der veränderlichen Grössen entsprechenden bestimmten Werth der Function bezeichnen. Lässt man nun die in Rede stehenden bestimmten Werthe der veränderlichen Grössen um beliebige unendlich kleine Grössen zu- und abnehmen; so heissen die diesen veränderten Werthen der veränderlichen Grössen entsprechenden Werthe der Function dem Werthe $u = f(x, y)$ benachbarte Werthe derselben, und man sagt nun wieder, dass $u = f(x, y)$ ein grösster oder ein kleinster Werth der Function, oder ein Maximum oder ein Minimum derselben sey, wenn $u = f(x, y)$ respective grösser oder kleiner als alle seine Nachbarwerthe ist. Stetigkeit der Function in der Nähe der be-

stimmten Werthe x, y ihrer veränderlichen Grössen wird hierbei immer vorausgesetzt.

§. 170.

Nach §. 139. ist

$$f(x+\partial x,\ y+\partial y) = u + F(\varrho),$$

wo ϱ einen positiven echten Bruch bezeichnet, und $F(\varrho)$ aus ∂u erhalten wird, wenn man für x, y respective $x+\varrho\partial x$, $y+\varrho\partial y$ setzt. Weil nun nach §. 130. bekanntlich

$$\partial u = \frac{\partial u}{\partial x}\partial x + \frac{\partial u}{\partial y}\partial y$$

oder

$$\partial u = f'_x(x,y)\,.\,\partial x + f'_y(x,y)\,.\,\partial y$$

ist; so ist

$$F(\varrho) = f'_x(x+\varrho\partial x,\ y+\varrho\partial y)\,.\,\partial x + f'_y(x+\varrho\partial x,\ y+\varrho\partial y)\,.\,\partial y;$$

folglich

$$f(x+\partial x,\ y+\partial y)$$
$$= f(x,y) + f'_x(x+\varrho\partial x,\ y+\varrho\partial y)\,.\,\partial x + f'_y(x+\varrho\partial x,\ y+\varrho\partial y)\,.\,\partial y,$$

und, wenn auch θ einen positiven echten Bruch bezeichnet, ganz eben so

$$f(x-\partial x,\ y-\partial y)$$
$$= f(x,y) - f'_x(x-\theta\partial x,\ y-\theta\partial y)\,.\,\partial x - f'_y(x-\theta\partial x,\ y-\theta\partial y)\,.\,\partial y.$$

Sind nun die Grössen $f'_x(x,y)$ und $f'_y(x,y)$, die wir in der Nähe der bestimmten Werthe x, y der unabhängigen veränderlichen Grössen als stetig annehmen, nicht beide $=0$; so haben für der Null unendlich nahe kommende ∂x und ∂y die Grössen

$$f'_x(x+\varrho\partial x,\ y+\varrho\partial y)\,.\,\partial x + f'_y(x+\varrho\partial x,\ y+\varrho\partial y)\,.\,\partial y,$$

$$f'_x(x-\theta\partial x,\ y-\theta\partial y)\,.\,\partial x + f'_y(x-\theta\partial x,\ y-\theta\partial y)\,.\,\partial y$$

offenbar beide mit der Grösse

$$f'_x(x,y)\,.\,\partial x + f'_y(x,y)\,.\,\partial y$$

gleiches Vorzeichen. Folglich haben, wenn die Grössen $f'_x(x,y)$ und $f'_y(x,y)$ nicht beide $=0$ sind, die Grössen

$$f'_x(x+\varrho\partial x,\ y+\varrho\partial y)\,.\,\partial x + f'_y(x+\varrho\partial x,\ y+\varrho\partial y)\,.\,\partial y,$$

$$f'_x(x-\theta\partial x,\ y-\theta\partial y)\,.\,\partial x + f'_y(x-\theta\partial x,\ y-\theta\partial y)\,.\,\partial y$$

für der Null unendlich nahe kommende ∂x und ∂y gleiche, die Grössen

$$f'_x(x+\varrho\partial x,\ y+\varrho\partial y)\,.\,\partial x + f'_y(x+\varrho\partial x,\ y+\varrho\partial y)\,.\,\partial y,$$

$$-f'_x(x-\theta\partial x,\ y-\theta\partial y)\,.\,\partial x - f'_y(x-\theta\partial x,\ y-\theta\partial y)\,.\,\partial y$$

also entgegengesetzte Vorzeichen, immer unter der Voraussetzung, dass ∂x und ∂y der Null unendlich nahe kommende Grössen sind.

Sind also die Grössen $f'_x(x, y)$ und $f'_y(x, y)$ nicht beide $= 0$; so ist für der Null unendlich nahe kommende ∂x und ∂y nach dem Obigen

$$f(x+\partial x, y+\partial y) \gtrless f(x, y),$$

$$f(x-\partial x, y-\partial y) \lessgtr f(x, y),$$

oder

$$f(x, y) \lessgtr f(x+\partial x, y+\partial y),$$

$$f(x, y) \gtrless f(x-\partial x, y-\partial y),$$

und folglich offenbar $f(x, y)$ weder ein Maximum, noch ein Minimum der gegebenen Function.

Soll also $u = f(x, y)$ ein Maximum oder ein Minimum der gegebenen Function seyn; so muss nothwendig zugleich

$$f'_x(x, y) = 0, \quad f'_y(x, y) = 0,$$

d. i.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

seyn, wo, wie sich von selbst versteht, die Differentialquotienten partielle Differentialquotienten sind.

§. 171.

Nehmen wir nun an, dass

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

ist; so ist auch

$$\partial u = \frac{\partial u}{\partial x}\partial x + \frac{\partial u}{\partial y}\partial y = 0,$$

und folglich nach §. 139.

$$f(x+\partial x, y+\partial y) = u + \frac{F''(\varrho)}{1.2},$$

wo ϱ ein positiver echter Bruch ist, und $F''(\varrho)$ aus $\partial^2 u$ erhalten wird, wenn man für x, y respective $x+\varrho\partial x$, $y+\varrho\partial y$ setzt.

Da bekanntlich

$$\partial^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\partial x^2 + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\partial x\,\partial y + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\partial y^2$$

ist; so wird, wenn nur nicht zugleich

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

ist, für der Null unendlich nahe kommende ∂x und ∂y offenbar $F''(\varrho)$ mit $\partial^2 u$ gleiches Vorzeichen haben, was auch übrigens ∂x und ∂y für Vorzeichen haben mögen. Wenn also $\partial^2 u$, wie sich auch ∂x und ∂y ändern mögen, sein Zeichen niemals ändert; so wird, wegen der obigen Gleichung

$$f(x+\partial x,\ y+\partial y) = u + \frac{F''(\varrho)}{1.2}$$

oder

$$f(x+\partial x,\ y+\partial y) = f(x,\ y) + \frac{F''(\varrho)}{1.2},$$

jederzeit $u = f(x,\ y)$ ein Maximum oder ein Minimum seyn: ein Maximum nämlich, wenn $\partial^2 u$ immer negativ ist; ein Minimum dagegen, wenn $\partial^2 u$ immer positiv ist. Dass nicht zugleich

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0,\ \frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} = 0,\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

ist, wird hierbei immer vorausgesetzt.

Wir haben also jetzt zunächst zu untersuchen, welche Bedingungen erfüllt seyn müssen, wenn, wie auch ∂x und ∂y sich ändern mögen, die Grösse

$$\partial^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\partial x^2 + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}\partial x\,\partial y + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\partial y^2$$

ihr Zeichen niemals ändern soll.

§. 172.

Aendert die Grösse

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\partial x^2 + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}\partial x\,\partial y + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\partial y^2$$

ihr Zeichen nicht; so ändert auch die Grösse

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2 + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}\cdot\frac{\partial x}{\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2},$$

welche mit jener immer gleiches Vorzeichen hat, ihr Zeichen nicht, und umgekehrt. Aenderte aber die letztere Grösse ihr Zeichen; so würde nach einem sehr bekannten Satze aus der Theorie der Gleichungen die Gleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2 + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}\cdot\frac{\partial x}{\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$$

indem man nämlich $\frac{\partial x}{\partial y}$ als unbekannte Grösse betrachtet, reelle Wurzeln haben. Hat also diese Gleichung keine reelle Wurzel; so ändert die Grösse

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2 + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}\cdot\frac{\partial x}{\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2},$$

und folglich auch die Grösse

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\partial x^2 + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\partial x \partial y + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\partial y^2$$

ihr Zeichen niemals. Durch Auflösung der obigen Gleichung ergiebt sich aber

$$\frac{\partial x}{\partial y} = \frac{-\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \pm \sqrt{\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\right)^2 - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}}}{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}},$$

und es sind also beide Wurzeln der in Rede stehenden Gleichung imaginär, wenn

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\right)^2 - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} < 0$$

ist. Daher wird also auch, wenn diese Bedingung erfüllt ist, die Grösse

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\partial x^2 + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\partial x \partial y + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\partial y^2$$

ihr Zeichen niemals ändern, und zugleich erhellet auf der Stelle, dass, wenn die obige Bedingung erfüllt ist, die Differentialquotienten

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \text{ und } \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

jederzeit einerlei Vorzeichen haben.

Da nun aber, wenn die Bedingung

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\right)^2 - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} < 0$$

erfüllt ist, die Grösse

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\partial x^2 + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\partial x \partial y + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\partial y^2,$$

was auch ∂x und ∂y für Werthe haben mögen, immer ein und dasselbe Vorzeichen hat; so erhellet, wenn man nur, wie verstattet ist, $\partial y = 0$ setzt, auf der Stelle, dass diese Grösse immer mit

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\partial x^2,$$

also auch mit $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, und nach dem Obigen folglich auch immer mit $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ einerlei Vorzeichen hat, also positiv oder negativ ist, jenachdem die beiden Differentialquotienten

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \text{ und } \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

positiv oder negativ sind.

Weil

$$\partial^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\partial x^2 + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\partial x \partial y + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\partial y^2$$

ist; so ist, wenn

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\right)^2 - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} < 0$$

ist, auch $\partial^2 u$, was auch ∂x und ∂y für Werthe haben mög immer positiv oder immer negativ, jenachdem die Differenti quotienten

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \text{ und } \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

beide positiv oder beide negativ sind.

Fasst man nun, in Verbindung mit §. 170. und §. 17 alles Vorhergehende zusammen, und bemerkt, dass, wenn

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\right)^2 - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} < 0$$

ist, offenbar auch nie zugleich

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0,\ \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0,\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

seyn kann; so ergiebt sich unmittelbar das folgende merkwür und wichtige Theorem:

Wenn

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0,\ \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

und

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\right)^2 - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} < 0$$

ist; so ist $u = f(x, y)$ ein Maximum oder ein mum, jenachdem die Differentialquotienten

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \text{ und } \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

beide negativ oder beide positiv sind.

Von diesem Satze wollen wir nun einige Anw machen.

§. 173.

Aufgabe. Man soll eine gegebene Zahl a solche Art in drei Theile theilen, dass da der drei Theile ein Maximum wird.

Auflösung. Man bezeichne zwei der gesuchten Theile durch x, y; so ist $a - x - y$ der dritte Theil, und nach der Bedingung der Aufgabe soll also die Function

$$u = xy\,(a - x - y)$$

ein Maximum werden. Für die Differentialquotienten erhält man folgende Ausdrücke:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = y(a - x - y) - xy = ay - 2xy - y^2,$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = x(a - x - y) - xy = ax - x^2 - 2xy;$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -2y, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -2x, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = a - 2y - 2x,$$

und hat nun zur Bestimmung von x und y die beiden Gleichungen

$$ay - 2xy - y^2 = 0,$$
$$ax - 2xy - x^2 = 0,$$

oder, weil dem Sinne der Aufgabe nach offenbar weder x, noch $y = 0$ ist:

$$a - 2x - y = 0, \quad a - 2y - x = 0,$$

und folglich $x = y = \frac{1}{3}a$.

Weil nun für diesen gemeinschaftlichen Werth von x und y

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{2}{3}a, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = -\frac{1}{3}a$$

ist; so sind für den gefundenen gemeinschaftlichen Werth von x und y die Differentialquotienten $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ und $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ beide negativ. Ferner ist

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\right)^2 - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{1}{3}a^2,$$

d. i.

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\right)^2 - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} < 0.$$

Also wird das Product u für $x = y = \frac{1}{3}a$ wirklich ein Maximum. Der dritte Theil ist $a - x - y = \frac{1}{3}a$, und es müssen folglich, wenn eine gegebene Zahl so in drei Theile getheilt werden soll, dass das Product der drei Theile ein Maximum wird, die drei Theile einander gleich seyn.

Uebrigens werden die beiden Gleichungen

$$ay - 2xy - y^2 = 0, \quad ax - 2xy - x^2 = 0$$

auch erfüllt, wenn man $x = y = 0$ setzt. Dann ist das Product der drei Theile $= 0$, und folglich in diesem Falle offenbar als ein Minimum zu betrachten.

§. 174.

Aufgabe. Unter allen ebenen Dreiecken, welche einen gegebenen Umfang haben, dasjenige zu finden, welches den grössten Flächeninhalt hat.

Auflösung. Setzen wir den gegebenen Umfang $= s$, den Flächeninhalt, welcher ein Maximum werden soll, $= u$, und bezeichnen die drei Seiten des Dreiecks durch x, y, z; so ist

$$u^2 = \tfrac{1}{2}s(\tfrac{1}{2}s-x)(\tfrac{1}{2}s-y)(\tfrac{1}{2}s-z),$$

und u ist offenbar ein Maximum, wenn das Product

$$(\tfrac{1}{2}s-x)(\tfrac{1}{2}s-y)(\tfrac{1}{2}s-z)$$

ein Maximum ist. Die Summe der drei Factoren dieses Products ist $\frac{3}{2}s - s = \frac{1}{2}s$, d. i. eine gegebene Grösse. Also reducirt sich die vorgelegte Aufgabe offenbar auf die im vorigen Paragraphen aufgelöste Aufgabe: die gegebene Grösse $\frac{1}{2}s$ in drei Theile zu theilen, deren Product ein Maximum ist, und man muss folglich nach §. 173.

$$\tfrac{1}{2}s-x = \tfrac{1}{6}s,\ \tfrac{1}{2}s-y = \tfrac{1}{6}s,\ \tfrac{1}{2}s-z = \tfrac{1}{6}s$$

setzen, woraus sich $x = y = z = \frac{1}{3}s$, und also der folgende merkwürdige Lehrsatz ergiebt:

Unter allen ebenen Dreiecken von gleichem Umfange hat das gleichseitige den grössten Flächeninhalt.

§. 175.

Aufgabe. In der Ebene eines Dreiecks $AA'A''$ einen Punct O von solcher Lage zu finden, dass die Summe der Entfernungen desselben von den drei Spitzen des Dreiecks ein Minimum ist.

Auflösung. Man nehme in der Ebene des Dreiecks zwei auf einander senkrechte Axen an, und bezeichne die Coordinaten der drei Spitzen A, A', A'' des Dreiecks in Bezug auf diese Axen durch a, b; a', b'; a'', b''; die Coordinaten des gesuchten Punktes O in Bezug auf dieselben Axen durch x, y. Sind nun s, s', s'' die Entfernungen des Punktes O von den drei Spitzen des Dreiecks; so ist nach Principien der analytischen Geometrie

$$s = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2},$$

$$s' = \sqrt{(x-a')^2 + (y-b')^2},$$

$$s'' = \sqrt{(x-a'')^2 + (y-b'')^2},$$

die Quadratwurzeln sämmtlich positiv genommen. Nach der Bedingung der Aufgabe soll

$$u = s + s' + s''$$

ein Minimum werden. Um dieser Bedingung zu genügen, muss man x und y aus den beiden Gleichungen

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial s}{\partial x}+\frac{\partial s'}{\partial x}+\frac{\partial s''}{\partial x}=0,$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial s}{\partial y}+\frac{\partial s'}{\partial y}+\frac{\partial s''}{\partial y}=0$$

bestimmen. Es ist aber, wie man leicht findet,

$$\frac{\partial s}{\partial x}=\frac{x-a}{s},\ \frac{\partial s'}{\partial x}=\frac{x-a'}{s'},\ \frac{\partial s''}{\partial x}=\frac{x-a''}{s''};$$

$$\frac{\partial s}{\partial y}=\frac{y-b}{s},\ \frac{\partial s'}{\partial y}=\frac{y-b'}{s'},\ \frac{\partial s''}{\partial y}=\frac{y-b''}{s''}.$$

Also müssen x und y so bestimmt werden, dass den beiden Gleichungen

$$\frac{x-a}{s}+\frac{x-a'}{s'}+\frac{x-a''}{s''}=0,$$

$$\frac{y-b}{s}+\frac{y-b'}{s'}+\frac{y-b''}{s''}=0$$

genügt wird.

Betrachtet man nun die Linien s, s', s'' als die positiven Theile der Abscissenaxen dreier neuen rechtwinkligen Coordinatensysteme, deren Anfangspunkte A, A', A'' sind, und bezeichnet die von s, s', s'' mit der primitiven Abscissenaxe eingeschlossenen Winkel, indem man diese Winkel von dem positiven Theil der primitiven Abscissenaxe an nach dem positiven Theile der primitiven Ordinatenaxe hin von 0 bis 360° zählt, durch φ, φ', φ''; so erhält man nach den bekannten Gleichungen der Coordinatenverwandlung, mittelst welcher man von einem rechtwinkligen Systeme zu einem andern rechtwinkligen Systeme überzugehen pflegt, auf der Stelle die folgenden Gleichungen:

$$x=a+s\cos\varphi,\ x=a'+s'\cos\varphi',\ x=a''+s''\cos\varphi'';$$
$$y=b+s\sin\varphi,\ y=b'+s'\sin\varphi',\ y=b''+s''\sin\varphi'';$$

oder

$$\frac{x-a}{s}=\cos\varphi,\ \frac{x-a'}{s'}=\cos\varphi',\ \frac{x-a''}{s''}=\cos\varphi'';$$

$$\frac{y-b}{s}=\sin\varphi,\ \frac{y-b'}{s'}=\sin\varphi',\ \frac{y-b''}{s''}=\sin\varphi''.$$

Also müssen nach dem Obigen x und y so bestimmt werden, oder der Punkt O muss eine solche Lage haben, dass

$$\cos\varphi+\cos\varphi'+\cos\varphi''=0,\quad \sin\varphi+\sin\varphi'+\sin\varphi''=0$$

ist. Schreibt man diese Gleichungen unter der Form

$$\cos\varphi+\cos\varphi'=-\cos\varphi'',\ \sin\varphi+\sin\varphi'=-\sin\varphi'',$$

quadrirt und addirt sie dann zu einander; so erhält man $\cos(\varphi-\varphi')=-\frac{1}{2}$, und hat also nun überhaupt die drei folgenden Gleichungen:

$$\cos(\varphi-\varphi')=-\tfrac{1}{2},\ \cos(\varphi-\varphi'')=-\tfrac{1}{2},\ \cos(\varphi'-\varphi'')=-\tfrac{1}{2}.$$

Nimmt man jetzt nach und nach die drei Seiten AA', $A'A''$, AA'' des gegebenen Dreiecks als Axen, die drei Spitzen A, A', A'' respective als Anfangspunkte der Abscissen an, und bezeichnet die von den drei Linien s, s', s'' am Punkte O eingeschlossenen Winkel durch ψ, ψ', ψ''; so erhellet aus dem Vorhergehenden leicht, dass auch

$$\cos\psi=-\tfrac{1}{2},\ \cos\psi'=-\tfrac{1}{2},\ \cos\psi''=-\tfrac{1}{2}$$

und folglich $\psi=\psi'=\psi''=120^\circ$ seyn, der Punkt O also eine solche Lage haben muss, dass die drei von ihm an die drei Spitzen des Dreiecks gezogenen Linien s, s', s'' mit einander drei gleiche Winkel einschliessen. Nur entsteht nun noch die Frage, ob, wenn diese Bedingung erfüllt ist, die Summe $s+s'+s''$ auch wirklich, wie die Aufgabe verlangt, ein Minimum ist. Um diese Frage zu beantworten, muss man die Differentialquotienten

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2},\ \frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}$$

entwickeln.

Es ist aber

$$\frac{\partial^2 s}{\partial x^2}=\frac{s-(x-a)\frac{\partial s}{\partial x}}{s^2}=\frac{1}{s}\left\{1-\left(\frac{x-a}{s}\right)^2\right\}=\frac{\sin\varphi^2}{s},$$

$$\frac{\partial^2 s'}{\partial x^2}=\frac{s'-(x-a')\frac{\partial s'}{\partial x}}{s'^2}=\frac{1}{s'}\left\{1-\left(\frac{x-a'}{s'}\right)^2\right\}=\frac{\sin\varphi'^2}{s'},$$

$$\frac{\partial^2 s''}{\partial x^2}=\frac{s''-(x-a'')\frac{\partial s''}{\partial x}}{s''^2}=\frac{1}{s''}\left\{1-\left(\frac{x-a''}{s''}\right)^2\right\}=\frac{\sin\varphi''^2}{s''};$$

$$\frac{\partial^2 s}{\partial y^2}=\frac{s-(y-b)\frac{\partial s}{\partial y}}{s^2}=\frac{1}{s}\left\{1-\left(\frac{y-b}{s}\right)^2\right\}=\frac{\cos\varphi^2}{s},$$

$$\frac{\partial^2 s'}{\partial y^2}=\frac{s'-(y-b')\frac{\partial s'}{\partial y}}{s'^2}=\frac{1}{s'}\left\{1-\left(\frac{y-b'}{s'}\right)^2\right\}=\frac{\cos\varphi'^2}{s'},$$

$$\frac{\partial^2 s''}{\partial y^2}=\frac{s''-(y-b'')\frac{\partial s''}{\partial y}}{s''^2}=\frac{1}{s''}\left\{1-\left(\frac{y-b''}{s''}\right)^2\right\}=\frac{\cos\varphi''^2}{s''};$$

folglich

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\sin\varphi^2}{s} + \frac{\sin\varphi'^2}{s'} + \frac{\sin\varphi''^2}{s''},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\cos\varphi^2}{s} + \frac{\cos\varphi'^2}{s'} + \frac{\cos\varphi''^2}{s''}.$$

Ferner ist

$$\frac{\partial^2 s}{\partial x \partial y} = -\frac{(y-b)\frac{\partial s}{\partial x}}{s^2} = -\frac{(x-a)(y-b)}{s^3} = -\frac{\cos\varphi \sin\varphi}{s},$$

$$\frac{\partial^2 s'}{\partial x \partial y} = -\frac{(y-b')\frac{\partial s'}{\partial x}}{s'^2} = -\frac{(x-a')(y-b')}{s'^3} = -\frac{\cos\varphi' \sin\varphi'}{s'},$$

$$\frac{\partial^2 s''}{\partial x \partial y} = -\frac{(y-b'')\frac{\partial s''}{\partial x}}{s''^2} = -\frac{(x-a'')(y-b'')}{s''^3} = -\frac{\cos\varphi'' \sin\varphi''}{s''};$$

und folglich

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = -\frac{\cos\varphi \sin\varphi}{s} - \frac{\cos\varphi' \sin\varphi'}{s'} - \frac{\cos\varphi'' \sin\varphi''}{s''}.$$

Hieraus ergiebt sich durch leichte Rechnung

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\right)^2 - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

$$= -\frac{\sin(\varphi-\varphi')^2}{ss'} - \frac{\sin(\varphi-\varphi'')^2}{ss''} - \frac{\sin(\varphi'-\varphi'')^2}{s's''};$$

also

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\right)^2 - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} < 0.$$

Nimmt man hierzu nun noch, dass die Differentialquotienten

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \text{ und } \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

nach dem Obigen beide positiv sind; so ist klar, dass die Summe $s + s' + s''$ ein Minimum ist, wenn der Punkt O die angegebene Lage hat.

Denkt man sich den Punkt O auf die angegebene Art bestimmt; so fällt zuvörderst auf der Stelle in die Augen, dass dieser Punkt, wenn überhaupt eine solche Bestimmung möglich ist, jederzeit innerhalb des Dreiecks $AA'A''$ liegt. Dann erhellet aber auch leicht, dass z. B.

$$A'OA'' = A'AA'' + AA'O + AA''O,$$

d. i.

$$A'AA'' + AA'O + AA''O = 120^0$$

ist, und der Winkel $A'AA''$ folglich nicht grösser als 120^0 seyn kann. Da nun dasselbe auch von den Winkeln $AA'A''$ und $AA''A'$

des gegebenen Dreiecks gilt; so ist klar, dass, wenn eine Bestimmung des Punktes O auf die angegebene Art möglich seyn soll, kein Winkel des gegebenen Dreiecks grösser als 120° seyn darf.

Durch Construction findet man den Punkt O leicht, wenn man über zwei Seiten des gegebenen Dreiecks zwei Kreisabschnitte beschreibt, deren jeder einen Winkel von 120° fasst. Der Durchschnittspunkt der Bogen dieser beiden Kreisabschnitte wird dann jederzeit, wenn es überhaupt einen Punkt von der verlangten Beschaffenheit giebt, diesen Punkt bestimmen.

Wir wollen nun noch die Entfernungen $OA = s$, $OA' = s'$, $OA'' = s''$ des Punktes O von den drei Spitzen des gegebenen Dreiecks durch die Seiten dieses Dreiecks, welche, so wie sie den Spitzen A, A', A'' gegenüber stehen, respective durch α, β, γ bezeichnet werden mögen, auszudrücken suchen.

Weil $\cos 120° = -\cos 60° = -\sin 30° = -\frac{1}{2}$ ist; so ist nach Principien der ebenen Trigonometrie

$$OA^2 + OA'^2 + OA.OA' = AA'^2,$$
$$OA''^2 + OA^2 + OA''.OA = AA''^2,$$
$$OA'^2 + OA''^2 + OA'.OA'' = A'A''^2;$$

d. i.

$$s^2 + s'^2 + ss' = \gamma^2,$$
$$s''^2 + s^2 + s''s = \beta^2,$$
$$s'^2 + s''^2 + s's'' = \alpha^2.$$

Subtrahiren wir die dritte dieser Gleichungen von der ersten und zweiten; so erhalten wir

$$(s - s'')(s + s' + s'') = \gamma^2 - \alpha^2,$$
$$(s - s')(s + s' + s'') = \beta^2 - \alpha^2,$$

und folglich, wenn wir der Kürze wegen $s + s' + s'' = \Sigma$ setzen,

$$s - s'' = \frac{\gamma^2 - \alpha^2}{\Sigma}, \quad s - s' = \frac{\beta^2 - \alpha^2}{\Sigma}.$$

Addiren wir nun zu der Summe dieser beiden Gleichungen noch die identische Gleichung $s - s = 0$; so erhalten wir

$$3s - \Sigma = \frac{\beta^2 + \gamma^2 - 2\alpha^2}{\Sigma},$$

und folglich, zugleich mit gehöriger Vertauschung der Buchstaben:

$$s = \frac{\Sigma^2 + \beta^2 + \gamma^2 - 2\alpha^2}{3\Sigma}, \quad s' = \frac{\Sigma^2 + \alpha^2 + \gamma^2 - 2\beta^2}{3\Sigma},$$
$$s'' = \frac{\Sigma^2 + \alpha^2 + \beta^2 - 2\gamma^2}{3\Sigma}.$$

zeichnet man den Flächeninhalt des gegebenen Dreiecks durch so ist, wie leicht erhellen wird,

$$(ss' + ss'' + s's'')\sin 120^0 = 2\Delta,$$

i., weil $\sin 120^0 = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ ist,

$$3(ss' + ss'' + s's'') = 4\Delta\sqrt{3},$$

d man hat also jetzt die vier folgenden Gleichungen:

$$s^2 + s'^2 + ss' = \gamma^2,$$

$$s''^2 + s^2 + s''s = \beta^2,$$

$$s'^2 + s''^2 + s's'' = \alpha^2,$$

$$3(ss' + ss'' + s's'') = 4\Delta\sqrt{3}.$$

urch Addition dieser vier Gleichungen ergiebt sich auf der elle

$$2(s + s' + s'')^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + 4\Delta\sqrt{3},$$

. i.

$$\Sigma = \sqrt{\tfrac{1}{2}(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) + 2\Delta\sqrt{3}}.$$

ach gehöriger Substitution erhält man nun:

$$s = \frac{\beta^2 + \gamma^2 - \alpha^2 + \frac{4}{3}\Delta\sqrt{3}}{2\sqrt{\frac{1}{2}(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) + 2\Delta\sqrt{3}}},$$

$$s' = \frac{\alpha^2 + \gamma^2 - \beta^2 + \frac{4}{3}\Delta\sqrt{3}}{2\sqrt{\frac{1}{2}(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) + 2\Delta\sqrt{3}}},$$

$$s'' = \frac{\alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2 + \frac{4}{3}\Delta\sqrt{3}}{2\sqrt{\frac{1}{2}(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) + 2\Delta\sqrt{3}}}.$$

Weil man bekanntlich Δ durch α, β, γ ausdrücken kann; so kann man nun auch s, s', s'' durch α, β, γ ausdrücken, wie verlangt wurde.

Zwölftes Kapitel.

Von der Verwechslung oder Vertauschung der unabhängigen veränderlichen Grösse.

§. 176.

Wir wollen annehmen, dass y eine Function von x und

$$V = f\left(x, y, \frac{\partial y}{\partial x}, \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}, \frac{\partial^3 y}{\partial x^3}, \ldots \frac{\partial^n y}{\partial x^n}\right)$$

in, ausser gewissen Constanten, die Grössen x, y und die Differentialquotienten von y in Bezug auf x bis zum $n$ten enthaltender belie-

biger analytischer Ausdruck sey. Ist nun aber x selbst eine Function einer neuen veränderlichen Grösse t, oder soll x wenigstens als Function einer neuen veränderlichen Grösse t betrachtet werden; so kann man fragen, was man für

$$\frac{\partial y}{\partial x},\ \frac{\partial^2 y}{\partial x^2},\ \frac{\partial^3 y}{\partial x^3},\ \ldots\ \frac{\partial^n y}{\partial x^n}$$

setzen, oder wie überhaupt die Grösse V umgeformt werden muss, wenn dieselbe auf die Grösse t als unabhängige veränderliche Grösse bezogen werden soll. Diese Frage wollen wir jetzt zu beantworten suchen.

§. 177.

Nach dem in §. 43. bewiesenen, in vieler Beziehung wichtigen Satze erhält man durch successive Differentiation leicht:

$$\frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial y}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial t},$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial y}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\cdot\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2,$$

$$\frac{\partial^3 y}{\partial t^3} = \frac{\partial y}{\partial x}\cdot\frac{\partial^3 x}{\partial t^3} + 3\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}\cdot\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial^3 y}{\partial x^3}\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^3,$$

u. s. w. u. s. w.

Bestimmt man nun aus diesen Gleichungen umgekehrt

$$\frac{\partial y}{\partial x},\ \frac{\partial^2 y}{\partial x^2},\ \frac{\partial^3 y}{\partial x^3},\ \ldots\ldots;$$

so erhält man

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\frac{\partial y}{\partial t}}{\frac{\partial x}{\partial t}},\quad \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}}{\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2} - \frac{\frac{\partial y}{\partial t}}{\frac{\partial x}{\partial t}}\cdot\frac{\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}}{\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2},$$

$$\frac{\partial^3 y}{\partial x^3} =$$

$$\frac{\frac{\partial^3 y}{\partial t^3}}{\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^3} - 3\frac{\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}}{\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2}\cdot\frac{\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}}{\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2} + 3\frac{\frac{\partial y}{\partial t}}{\frac{\partial x}{\partial t}}\cdot\frac{\left(\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}\right)^2}{\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^4} - \frac{\frac{\partial y}{\partial t}}{\frac{\partial x}{\partial t}}\cdot\frac{\frac{\partial^3 x}{\partial t^3}}{\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^3},$$

u. s. w. u. s. w.

und dies sind die Ausdrücke, welche man für

$$\frac{\partial y}{\partial x},\ \frac{\partial^2 y}{\partial x^2},\ \frac{\partial^3 y}{\partial x^3},\ \ldots\ldots$$

in die Grösse V einführen muss, wenn dieselbe auf t als unabhängige veränderliche Grösse bezogen werden soll.

Uebrigens erhellet leicht, dass man in diesen Ausdrücken gleiche in den Zählern und Nennern der einzelnen Brüche vorkommende Potenzen von ∂t gegen einander aufheben kann, so dass also, wenn V auf t als unabhängige veränderliche Grösse bezogen werden soll, für $\frac{\partial y}{\partial x}$, $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^3 y}{\partial x^3}$, ... respective die Ausdrücke

$$\frac{\partial y}{\partial x},\quad \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{\partial y}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 x}{\partial x^2},$$

$$\frac{\partial^3 y}{\partial x^3} - 3\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 x}{\partial x^2} + 3\frac{\partial y}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 x^2}{\partial x^4} - \frac{\partial y}{\partial x}\cdot\frac{\partial^3 x}{\partial x^3},$$

u. s. w.

gesetzt werden müssen, wobei aber zu bemerken ist, dass in diesen Ausdrücken x und y als Functionen einer neuen beliebigen veränderlichen Grösse zu betrachten, und ∂x, $\partial^2 x$, $\partial^3 x$, ...; ∂y, $\partial^2 y$, $\partial^3 y$, ... die Differentiale dieser Functionen in Bezug auf die in Rede stehende neue unabhängige veränderliche Grösse sind.

§. 178.

Ein allgemeines Bildungsgesetz der im vorigen Paragraphen gefundenen Ausdrücke lässt sich auf folgende sehr einfache Art angeben.

Nach §. 177. hat man für den ersten Differentialquotienten $\frac{\partial y}{\partial x}$ der Function y in Bezug auf x als unabhängige veränderliche Grösse den Quotienten $\partial y : \partial x$ der Differentiale von y und x in Bezug auf t als unabhängige veränderliche Grösse, wenn man nämlich y und x als Functionen von t betrachtet, oder, wie man dies der Kürze wegen ganz zweckmässig zu bezeichnen pflegt, die Grösse $\frac{1}{\partial x}\partial y$ zu setzen. Daher hat man für die Differentialquotienten

$$\frac{\partial y}{\partial x},\quad \frac{\partial^2 y}{\partial x^2},\quad \frac{\partial^3 y}{\partial x^3},\quad \frac{\partial^4 y}{\partial x^4},\ \ldots.$$

von y in Bezug auf x als unabhängige veränderliche Grösse offenbar überhaupt respective die Grössen

$$\frac{1}{\partial x}\partial y,\quad \frac{1}{\partial x}\partial\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right),\quad \frac{1}{\partial x}\partial\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right),\quad \frac{1}{\partial x}\partial\left(\frac{\partial^3 y}{\partial x^3}\right),\ \ldots..;$$

also die Grössen

$$\frac{1}{\partial x}\partial y,$$

$$\frac{1}{\partial x}\partial\left(\frac{1}{\partial x}\partial y\right),$$

$$\frac{1}{\partial x}\partial\left(\frac{1}{\partial x}\partial\left(\frac{1}{\partial x}\partial y\right)\right),$$

$$\frac{1}{\partial x}\partial\left(\frac{1}{\partial x}\partial\left(\frac{1}{\partial x}\partial\left(\frac{1}{\partial x}\partial y\right)\right)\right),$$

u. s. w.

deren Bildungsgesetz sogleich in die Augen fällt, zu setzen. darf man aber vergessen, dass in diesen Ausdrücken x un als Functionen einer neuen beliebigen unabhängigen verän lichen Grösse zu betrachten, und auch alle Differentiale vo und y in Bezug auf diese neue unabhängige veränderliche Gr zu nehmen sind.

§. 179.

Oft kommt auch der Fall vor, dass, statt dass vorhe als Function von x betrachtet wurde, umgekehrt x als Func von y betrachtet werden soll. In einem solchen Falle ist die vorher durch t bezeichnete willkührliche veränderliche Gr $= y$ zu setzen, und in den Ausdrücken

$$\frac{1}{\partial x}\partial y,$$

$$\frac{1}{\partial x}\partial\left(\frac{1}{\partial x}\partial y\right),$$

$$\frac{1}{\partial x}\partial\left(\frac{1}{\partial x}\partial\left(\frac{1}{\partial x}\partial y\right)\right),$$

$$\frac{1}{\partial x}\partial\left(\frac{1}{\partial x}\partial\left(\frac{1}{\partial x}\partial\left(\frac{1}{\partial x}\partial y\right)\right)\right),$$

u. s. w.

muss man also ∂y als constant betrachten, folglich die Diffe tiale $\partial^2 y$, $\partial^3 y$, $\partial^4 y$, $\partial^5 y$, ... sämmtlich $=0$ setzen. wickelt man unter dieser Voraussetzung die vorhergehen Ausdrücke; so findet man leicht, dass man, wenn x als F ction von y betrachtet werden soll, statt der Differentialquot ten $\frac{\partial y}{\partial x}$, $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^3 y}{\partial x^3}$, ... respective

$$\frac{\partial y}{\partial x},\ -\frac{\partial y}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 x}{\partial x^2},\ 3\frac{\partial y}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 x^2}{\partial x^4}-\frac{\partial y}{\partial x}\cdot\frac{\partial^3 x}{\partial x^5},\ \ldots.$$

oder

$$\frac{1}{\frac{\partial x}{\partial y}},\ -\frac{\frac{\partial^2 x}{\partial y^2}}{\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^3},\ -\frac{\frac{\partial^3 x}{\partial y^3}}{\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^4}+3\frac{\left(\frac{\partial^2 x}{\partial y^2}\right)^2}{\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^5},\ \ldots.$$

setzen muss.

Ist z. B. $y = \sin x$; so ist bekanntlich

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \cos x, \quad \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = -\sin x.$$

Will man nun x als Function von x betrachten; so muss man nach dem Vorhergehenden für die Differentialquotienten $\frac{\partial y}{\partial x}$ und $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ respective $\frac{\partial y}{\partial x}$ und $-\frac{\partial y \, \partial^2 x}{\partial x^3}$ setzen. Dadurch erhält man

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \cos x, \quad \frac{\partial y \, \partial^2 x}{\partial x^3} = \sin x;$$

oder

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \cos x, \quad \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^3 . \frac{\partial^2 x}{\partial y^2} = \sin x;$$

oder

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \cos x, \quad \cos x^3 \frac{\partial^2 x}{\partial y^2} = \sin x;$$

oder

$$\frac{\partial x}{\partial y} = \frac{1}{\cos x}, \quad \frac{\partial^2 x}{\partial y^2} = \frac{\sin x}{\cos x^3}.$$

Weil nun $x = Arc \sin y$, $\cos x = \sqrt{1 - y^2}$ ist; so erhält man

$$\frac{\partial Arc \sin y}{\partial y} = \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}}, \quad \frac{\partial^2 Arc \sin y}{\partial y^2} = \frac{y}{(1 - y^2)\sqrt{1 - y^2}},$$

wo $\sqrt{1 - y^2}$ offenbar positiv oder negativ zu nehmen ist, jenachdem $\cos x = \cos(Arc \sin y)$ positiv oder negativ ist.

Setzt man nun x für y; so erhält man die Formeln

$$\frac{\partial Arc \sin x}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}, \quad \frac{\partial^2 Arc \sin x}{\partial x^2} = \frac{x}{(1 - x^2)\sqrt{1 - x^2}},$$

in denen $\sqrt{1 - x^2}$ positiv oder negativ zu nehmen ist, jenachdem $\cos(Arc \sin x)$ positiv oder negativ ist. Die erste dieser beiden Formeln ist schon aus §. 68. bekannt, und auch die zweite würde sich mittelst der gewöhnlichen Regeln der Differentiation leicht entwickeln lassen.

Dreizehntes Kapitel.

Einige der wichtigsten Anwendungen der Differentialrechnung auf die Theorie der in einer Ebene liegenden Curven oder der sogenannten Curven von einfacher Krümmung.

A. Tangenten der Curven.

§. 180.

Erklärung. Die gerade Linie, welche unter allen geraden Linien, die sich durch einen beliebigen Punkt einer Curve ziehen lassen, in der Nähe dieses Punktes am genauesten mit der Curve zusammenfällt oder sich am nächsten an die Curve anschliesst, heisst die Tangente der Curve in dem in Rede stehenden Punkte, und dieser Punkt selbst wird der Berührungspunkt der Tangente mit der Curve genannt.

Errichtet man durch einen beliebigen Punkt einer Curve auf die durch denselben gezogene Tangente der Curve ein Perpendikel; so heisst dieses Perpendikel die Normale der Curve in dem in Rede stehenden Punkte.

Wir bemerken hierbei, dass wir, wie auch schon die Ueberschrift dieses Kapitels anzeigt, in demselben bloss in einer Ebene liegende Curven oder sogenannte Curven von einfacher Krümmung betrachten werden, und dass also auch alle Constructionen in der Ebene, in welcher die gegebene Curve liegt, ausgeführt gedacht werden müssen.

§. 181.

Aufgabe. Die Gleichung der Tangente einer gegebenen Curve für einen gegebenen Punkt derselben zu finden.

Auflösung. Die Gleichung der gegebenen Curve in Beziehung auf beliebige recht- oder schiefwinklige Coordinaten sey

$$1.\quad y = f(x);$$

die Coordinaten des in dieser Curve gegebenen Punktes, durch welchen die Tangente gezogen werden soll, wollen wir durch x, y, diesen Punkt selbst also nach einem aus der analytischen Geometrie bekannten Gebrauche durch xy bezeichnen.

Lässt man nun x sich um die beliebige Grösse Δx ändern, so wird y sich um Δy ändern. Die Gleichung der durch die Endpunkte der beiden Ordinaten y und $y + \Delta y$ bestimmten geraden Linie, welche als eine Sehne der gegebenen Curve zu betrach-

ten ist, hat nach Principien der analytischen Gemetrie die allgemeine Form

$$2.\quad u = Az + B.$$

Da diese gerade Linie, welche wir im Folgenden der Kürze wegen durch AB bezeichnen wollen, durch den Punkt xy geht; so ist auch

$$3.\quad y = Ax + B,$$

und folglich, wenn man diese Gleichung von der Gleichung 2. subtrahirt,

$$4.\quad u - y = A(z - x).$$

Weil aber die gerade Linie AB auch durch den durch die Coordinaten $x + \Delta x$, $y + \Delta y$ bestimmten Punkt geht; so ist ferner

$$y + \Delta y - y = A(x + \Delta x - x),$$

d. i.

$$5.\quad \Delta y = A\Delta x,\quad A = \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Folglich ist nach 4.

$$6.\quad u - y = \frac{\Delta y}{\Delta x}(z - x)$$

die Gleichung der geraden Linie AB.

Lässt man nun Δx sich der Null immer mehr und mehr nähern; so wird die Linie AB in der Nähe des Punktes xy offenbar immer genauer und genauer mit der gegebenen Curve zusammenfallen, oder sich immer näher und näher an dieselbe anschliessen, und dabei wird sich zugleich der Bruch $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ dem Differentialquotienten $\frac{\partial y}{\partial x}$ als seiner Gränze immer mehr und mehr und auch, wenn man nur Δx nahe genug bei Null annimmt, bis zu jedem beliebigen Grade nähern. Hieraus ergiebt sich, dass man die Gleichung der geraden Linie, welche unter allen geraden Linien, die sich durch den Punkt xy ziehen lassen, in der Nähe dieses Punktes sich am nächsten an die gegebene Curve anschliesst, d. i. die gesuchte Gleichung der durch den Punkt xy an die gegebene Curve gezogenen Tangente erhalten wird, wenn man in der Gleichung 6. statt des Differenzenquotienten $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ den Differentialquotienten $\frac{\partial y}{\partial x}$ setzt, so dass also

$$7.\quad u - y = \frac{\partial y}{\partial x}(z - x)$$

die gesuchte Gleichung der durch den Punkt xy an die gegebene Curve gezogenen Tangente seyn wird.

Dass die durch die Gleichung 7. characterisirte gerade Linie sich unter allen geraden Linien, die sich durch den Punkt xy ziehen lassen, in der Nähe dieses Punktes am nächsten an die gegebene Curve anschliesst, lässt sich noch strenger wie vorher auf folgende Art beweisen.

Man denke sich durch den Punkt xy noch eine beliebige andere, von der durch die Gleichung 7. characterisirten geraden Linie verschiedene gerade Linie gezogen, deren Gleichung

$$8.\quad u - y = P(z - x)$$

seyn, und die der Kürze wegen im Folgenden durch $A'B''$ bezeichnet werden mag. Die durch die Gleichung 7. characterisirte gerade Linie mag im Folgenden der Kürze wegen auf ähnliche Art durch $A'B'$ bezeichnet werden.

Die der Abscisse $x + \Delta x$ entsprechenden Ordinaten der gegebenen Curve, der geraden Linie $A'B'$ und der geraden Linie $A'B''$ seyen respective y', y'', y'''; so ist wegen der Gleichungen 7., 8. und 1.

$$9.\quad y'' - y = f'(x).\Delta x,\qquad 10.\quad y''' - y = P\Delta x.$$

Ferner ist nach §. 110. II.

$$11.\quad y' - y = f'(x).\Delta x + \tfrac{1}{2}f''(x + \varrho\Delta x).\Delta x^2,$$

wo ϱ einen positiven echten Bruch bezeichnet, und $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$ in dem Intervall $x, x + \Delta x$ stetig seyn müssen. Folglich ist nach 9. und 11., und 10. und 11., wie man durch Subtraction dieser Gleichungen leicht findet,

$$12.\quad y' - y'' = \tfrac{1}{2}f''(x + \varrho\Delta x).\Delta x^2,$$

$$13.\quad y' - y''' = \{f'(x) - P + \tfrac{1}{2}f''(x + \varrho\Delta x).\Delta x\}\Delta x,$$

wo $f'(x) - P$ nicht $= 0$ ist, da $f'(x)$ nicht $= P$ seyn kann, weil wir angenommen haben, dass die Linie $A'B'$ von der Linie $A'B''$ verschieden sey, so dass also auch die Gleichungen 7. und 8. nicht identisch seyn können, welches der Fall seyn würde, wenn $f'(x) = P$ wäre.

Ist nun der absolute Werth von

$$\tfrac{1}{2}f''(x + \varrho\Delta x).\Delta x$$

kleiner als der absolute Werth von

$$f'(x) - P + \tfrac{1}{2}f''(x + \varrho\Delta x).\Delta x;$$

so ist offenbar auch der absolute Werth von $y' - y''$ kleiner als der absolute Werth von $y' - y'''$. Lässt man aber Δx sich der Null nähern; so wird sich, weil ϱ ein positiver echter Bruch ist, die Grösse $f''(x + \varrho\Delta x)$ immer mehr und mehr und bis zu jedem beliebigen Grade dem Differentialquotienten $f''(x)$, die Grösse $f''(x + \varrho\Delta x).\Delta x$ sich also immer mehr und mehr und bis zu jedem beliebigen Grade der Null nähern. Nimmt man nun, was offenbar immer möglich ist, Δx so nahe bei Null, dass für alle der Null noch näher kommende Δx der absolute Werth von

$$f''(x + \varrho\Delta x).\Delta x$$

kleiner als der absolute Werth von

$$f'(x) - P$$

ist; so ist für alle in Rede stehende Δx der absolute Werth von

$$\tfrac{1}{2}f''(x+\varrho\Delta x).\Delta x$$

offenbar kleiner als der absolute Werth von

$$f'(x) - P + \tfrac{1}{2}f''(x+\varrho\Delta x).\Delta x,$$

und nach dem Obigen folglich der absolute Werth von $y'-y''$ kleiner als der absolute Werth von $y'-y'''$, woraus sich unmittelbar ergiebt, dass durch den Punkt xy keine gerade Linie gezogen werden kann, welche in der Nähe dieses Punktes zwischen der gegebenen Curve und der geraden Linie $A'B'$ liegt, so dass also diese durch die Gleichung 7. characterisirte gerade Linie sich offenbar unter allen durch den Punkt xy gehenden geraden Linien in der Nähe dieses Punktes am nächsten an die gegebene Curve anschliesst, und folglich die Tangente dieser Curve in dem gegebenen Punkte xy ist, wie bewiesen werden sollte.

Ueberblickt man die vorhergehenden Schlüsse nochmals im Zusammenhange; so wird man sich auf der Stelle überzeugen, dass denselben als nothwendige Bedingung die Voraussetzung zum Grunde liegt, dass die Grössen $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$ in der Nähe von x, d. i. in der Nähe des Punktes xy, stetig sind, und also auch sämmtlich endliche reelle völlig bestimmte Werthe haben, eine Bedingung, die im Folgenden immer als erfüllt angenommen werden soll.

Anmerkung. Mit Hülfe der bekannten Elementar-Aufgaben der analytischen Geometrie wird es nun auch leicht seyn, die beiden folgenden Aufgaben aufzulösen:

1. Die Gleichung einer geraden Linie zu finden, welche eine gegebene Curve berührt, und durch einen nicht in derselben liegenden gegebenen Punkt geht.

2. Die Gleichung einer geraden Linie zu finden, welche eine gegebene Curve berührt, und einer der Lage nach gegebenen geraden Linie parallel ist.

§. 182.

Zusatz. Bezeichnen wir den Coordinatenwinkel durch α, den von dem auf der positiven Seite der Abscissenaxe liegenden Theile der durch den Punkt xy der gegebenen Curve an dieselbe gezogenen Tangente mit der Richtung der positiven Abscissen eingeschlossenen, zwei rechte Winkel nicht übersteigenden Winkel durch φ; so ist wegen der Gleichung 7. des vorhergehenden Paragraphen nach Principien der analytischen Geometrie

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\sin\varphi}{\sin(\alpha-\varphi)};$$

und folglich, wenn $\alpha = 90^0$ ist, d. i. die Coordinaten rechtwinklige sind,

$$\tang\varphi = \frac{\partial y}{\partial x}.$$

§. 183.

Aufgabe. Unter Voraussetzung rechtwinkliger Coordinaten die Gleichung der Normale einer gegebenen Curve für einen gegebenen Punkt derselben zu finden.

Auflösung. Der Punkt der gegebenen Curve, durch welchen die Normale gezogen werden soll, sey xy. Ist nun

$$1.\quad u = Az + B$$

die gesuchte Gleichung der Normale; so ist, weil dieselbe durch den Punkt xy gehen soll,

$$2.\quad y = Ax + B\,,$$

und folglich, wenn man diese Gleichung von der Gleichung 1. subtrahirt,

$$3.\quad u - y = A(z - x)\,.$$

Nach §. 181. ist

$$u - y = \frac{\partial y}{\partial x}(z - x)$$

die Gleichung der durch den Punkt xy gehenden Tangente der gegebenen Curve. Also ist, weil die Tangente auf der Normale senkrecht ist, nach den Elementen der analytischen Geometrie

$$4.\quad 1 + A\frac{\partial y}{\partial x} = 0\,.$$

Eliminirt man nun A aus den Gleichungen 3. und 4.; so ergiebt sich als Gleichung der Normale die Gleichung

$$5.\quad u - y = -\frac{\partial x}{\partial y}(z - x)\,.$$

§. 184.

Zusatz. Bezeichnen wir den von dem auf der positiven Seite der Abscissenaxe liegenden Theile der Normale mit der Richtung der positiven Abscissen eingeschlossenen, zwei rechte Winkel nicht übersteigenden Winkel durch ψ; so ist nach Principien der analytischen Geometrie wegen der Gleichung 5. im vorigen Paragraphen, weil die Coordinaten rechtwinklig angenommen worden sind,

$$\operatorname{tang}\psi = -\frac{\partial x}{\partial y}\,.$$

§. 185.

Erklärung. Die Abscisse des Fusspunktes der Ordinate y einer gegebenen Curve, in Bezug auf den Durchschnittspunkt der durch den Punkt xy der gegebenen Curve gezogenen Tangente derselben mit der Abscissenaxe als Anfang der Abscissen, heisst die Subtangente der gegebenen Curve für den Punkt xy.

Die Abscisse des Durchschnittspunktes der durch den Punkt xy einer gegebenen Curve gezogenen Normale derselben mit der Abscissenaxe, in Bezug auf den Fusspunkt der Ordinate y als Anfang der Abscissen, heisst die Subnormale der gegebenen Curve für den Punkt xy.

§. 186.

Aufgabe. Die Subtangente und Subnormale einer gegebenen Curve für einen gegebenen Punkt derselben, letztere unter Voraussetzung rechtwinkliger Coordinaten, zu finden.

Auflösung. I. Der gegebene Punkt der gegebenen Curve sey xy; die gesuchte Subtangente sey s. Die Gleichung der Tangente für den Punkt xy ist nach §. 181.

$$u-y=\frac{\partial y}{\partial x}(z-x).$$

Ist also x' die Abscisse des Durchschnittspunktes der Tangente mit der Abscissenaxe; so ist

$$-y=\frac{\partial y}{\partial x}(x'-x),$$

und folglich

$$x'=x-y\frac{\partial x}{\partial y},$$

oder

$$x-x'=\frac{y\partial x}{\partial y}.$$

Nach den einfachsten Grundformeln der Coordinatenverwandlung und nach der allgemeinen Definition der Subtangente in §. 185. ist aber

$$x-x'=s.$$

Also ist

$$s=\frac{y\partial x}{\partial y},$$

wodurch die Subtangente im Allgemeinen bestimmt ist.

II. Der gegebene Punkt der gegebenen Curve sey wieder xy; die gesuchte Subnormale sey s'. Die Gleichung der Normale der gegebenen Curve für den gegebenen Punkt ist nach §. 183. unter Voraussetzung rechtwinkliger Coordinaten

$$u-y=-\frac{\partial x}{\partial y}(z-x).$$

Ist also x' die Abscisse des Durchschnittspunktes der Normale mit der Abscissenaxe; so ist

$$-y=-\frac{\partial x}{\partial y}(x'-x),$$

und folglich

$$x' = x + y\frac{\partial y}{\partial x}$$

oder

$$x' - x = \frac{y\partial y}{\partial x}.$$

Nach den einfachsten Grundformeln der Coordinatenverwandlung und nach der allgemeinen Definition der Subnormale in §. 185. ist aber

$$x' - x = s'.$$

Also ist

$$s' = \frac{y\partial y}{\partial x},$$

wodurch die Subnormale im Allgemeinen bestimmt ist.

§. 187.

Aufgabe. Unter Voraussetzung rechtwinkliger Coordinaten die zwischen dem Punkte xy und der Abscissenaxe liegenden Stücke T und N der durch den Punkt xy gezogenen Tangente und Normale einer gegebenen Curve zu bestimmen.

Auflösung. Bezeichnen wir die Subtangente und Subnormale für den Punkt xy wieder durch s und s'; so ist, weil wir die Coordinaten rechtwinklig annehmen, offenbar

$$T^2 = y^2 + s^2,\quad N^2 = y^2 + s'^2.$$

Nach §. 186. ist aber

$$s = \frac{y\partial x}{\partial y},\quad s' = \frac{y\partial y}{\partial x}.$$

Also ist

$$T^2 = y^2\left\{1 + \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2\right\},\quad N^2 = y^2\left\{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2\right\};$$

folglich

$$T = \pm y\sqrt{1 + \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2},\quad N = \pm y\sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2},$$

wo unter der Voraussetznng, dass man die Quadratwurzeln immer positiv nimmt, die obern oder untern Zeichen zu nehmen sind, jenachdem die Ordinate y positiv oder negativ ist, weil T und N natürlich immer als positiv zu betrachten sind.

§. 188.

Die Gleichung der Parabel ist bekanntlich, wenn p den Parameter bezeichnet und der Scheitel als Anfang der Coordinaten angenommen wird, $y^2 = px$. Also ist

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{p}{2y},\quad \frac{\partial x}{\partial y} = \frac{2y}{p},$$

und folglich nach §. 181. und §. 183.

$$u - y = \frac{p}{2y}(z - x)$$

und

$$u - y = -\frac{2y}{p}(z - x)$$

respective die Gleichung der durch den Punkt xy gezogenen Tangente und Normale der Parabel.

Für die dem Punkte xy entsprechende Subtangente erhält man ferner nach §. 186. I.

$$s = \frac{2y^2}{p} = \frac{2px}{p} = 2x,$$

und eben so nach §. 186. II. für die dem Punkte xy entsprechende Subnormale

$$s' = \frac{py}{2y} = \tfrac{1}{2}p,$$

so dass also die Subnormale der Parabel eine constante Grösse, nämlich für jeden Punkt dem halben Parameter gleich ist.

§. 189.

Bekanntlich ist die Gleichung

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 \pm \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1,$$

wenn man das obere Zeichen nimmt, die Gleichung der Ellipse; wenn man das untere Zeichen nimmt, die Gleichung der Hyperbel. Durch Differentiation dieser Gleichung ergiebt sich

$$\frac{x}{a^2} \pm \frac{y}{b^2} \cdot \frac{\partial y}{\partial x} = 0,$$

und folglich

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \mp \frac{b^2 x}{a^2 y}, \quad \frac{\partial x}{\partial y} = \mp \frac{a^2 y}{b^2 x}.$$

Also ist nach §. 181.

$$u - y = \mp \frac{b^2 x}{a^2 y}(z - x)$$

die Gleichung der durch den Punkt xy gezogenen Tangente, und nach §. 183. ist

$$u - y = \pm \frac{a^2 y}{b^2 x}(z - x)$$

die Gleichung der durch denselben Punkt gezogenen Normale.

Die Gleichung der Tangente bringt man auch leicht auf die Form

$$a^2 yu \pm b^2 xz = a^2 y^2 \pm b^2 x^2;$$

oder, weil

$$a^2y^2 \pm b^2x^2 = \pm a^2b^2$$

ist, auf die Form

$$a^2yu \pm b^2xz = \pm a^2b^2.$$

Für die Subtangente erhält man nach §. 186. I.

$$s = \mp \frac{a^2y^2}{b^2x}.$$

Aber

$$a^2y^2 = \pm a^2b^2 \mp b^2x^2 = \pm b^2(a^2 - x^2),$$

und folglich

$$s = -\frac{a^2 - x^2}{x}.$$

Für die Subnormale erhält man nach §. 186. II.

$$s' = \mp \frac{b^2x}{a^2}.$$

§. 190.

Erklärung. Die gerade Linie AK in *Fig.* 3. werde in dem Punkte A von einem mit dem Halbmesser r beschriebenen Kreise berührt. Lässt man nun diesen Kreis sich auf der Linie AK in der Richtung von A nach K fortwälzen; so wird der Punkt A desselben bei dieser Bewegung eine krumme Linie beschreiben, welche man eine Cycloide nennt.

Der in Rede stehende Kreis heisst der erzeugende Kreis; der Punkt A in demselben, welcher die Cycloide beschreibt, der beschreibende Punkt. Ist B der Punkt, in welchem der erzeugende Kreis, nachdem er eine ganze Umdrehung gemacht, die Linie AK berührt; so heisst die Linie AB die Basis, und ihr Mittelpunkt C der Mittelpunkt oder das Centrum der Cycloide. Das durch den Mittelpunkt C auf die Basis errichtete Perpendikel CS heisst die Axe und deren Endpunkt S der Scheitel der Cycloide. Der Punkt A der Basis heisst auch der Anfang der Cycloide.

Die Cycloide ist eine transcendente Curve, weil, wie wir sogleich in §. 192. sehen werden, ihre Gleichung eine transcendente Grösse enthält, und daher eine transcendente Gleichung ist.

§. 191.

Zusatz. Aus der Entstehung der Cycloide ergiebt sich unmittelbar, dass die Basis AB gleich der Peripherie des erzeugenden Kreises, d. i. $= 2r\pi$; folglich $AC = BC = r\pi$ ist. Eben so leicht erhellet, dass die Axe CS jederzeit gleich dem Durchmesser des erzeugenden Kreises, d. i. $= 2r$ ist.

§. 192.

Aufgabe. Die Gleichung der Cycloide zu finen.

Auflösung. Der Halbmesser des erzeugenden Kreises sey : r. Als Anfang und Axe der Abscissen wollen wir den Anng A (*Fig.* 4.) der Cycloide und die Basis AB derselben anhmen. Die Coordinaten sollen rechtwinklige seyn, und die sitiven Abscissen wollen wir in der Richtung von A nach B hmen.

In unserer Figur ist der erzeugende Kreis in zwei verschienen, jedoch mit denselben Buchstaben bezeichneten Lagen darstellt. Der Durchmesser MN des erzeugenden Kreises ist auf r Basis AB der Cycloide senkrecht; Q ist der beschreibende ankt, und also zugleich der Punkt der Cycloide, welcher jeder r beiden in der Figur dargestellten Lagen des erzeugenden reises entspricht.

Wir wollen uns nun von Q auf AB und MN die Perpenkel PQ und QR gefällt denken, und setzen, dem angenommenen oordinatensysteme gemäss, $AP = x$, $PQ = y$. Den Winkel IOQ am Mittelpunkte O des erzeugenden Kreises nennt man n Wälzungswinkel, wobei aber zu bemerken ist, dass eser Winkel bei jeder Lage des erzeugenden Kreises vom nkte M an im Sinne der Bewegung des erzeugenden Kreises n 0 bis 360° gezählt wird, so dass derselbe im Punkte $A = 0$, Punkte $C = 180°$, im Punkte $B = 360°$ ist. Der den Wälzungswinkel messende Kreisbogen in einem mit der Einheit s Radius beschriebenen Kreise soll im Allgemeinen durch φ zeichnet werden.

Aus der Entstehung der Cycloide folgt unmittelbar, dass die inie AM jederzeit dem, dem Wälzungswinkel entsprechenden reisbogen MQ gleich ist, so dass also, weil dieser Kreisbogen fenbar $= r\varphi$ ist, auch jederzeit $AM = r\varphi$ ist.

Dies vorausgesetzt, ergeben sich nun aus der Figur mittelst ner einfachen trigonometrischen Betrachtung auf der Stelle die iden Gleichungen

$$x = r\varphi - r\sin\varphi, \quad y = r - r\cos\varphi;$$

der

$$1. \quad x = r(\varphi - \sin\varphi), \quad y = r(1 - \cos\varphi).$$

us diesen beiden Gleichungen muss man, um eine Gleichung wischen x und y zu erhalten, den Bogen φ eliminiren. Dazu elangt man auf folgende Art.

Weil

$$\frac{y}{r} = 1 - \cos\varphi = \sin v\,\varphi$$

t; so ist

$$\varphi = Arc\sin v\,\frac{y}{r},$$

wobei man aber zu bemerken hat, dass dieser Arcus zwischen den Gränzen 0, π oder π, 2π genommen werden muss, jenachdem der Punkt der Cycloide, dessen Ordinate y ist, in der Hälfte AS oder in der Hälfte BS der Cycloide liegt.

Ferner ist $\cos\varphi = \frac{r-y}{r}$, und folglich

$$\sin\varphi^2 = 1 - \left(\frac{r-y}{r}\right)^2 = \frac{2ry-y^2}{r^2};$$

also

$$\sin\varphi = \pm \frac{1}{r}\sqrt{(2r-y)y},$$

wo man das obere oder untere Zeichen zu nehmen hat, jenachdem der Punkt xy der Cycloide in der Hälfte AS oder BS dieser Curve liegt.

Nach 1. ergiebt sich also die folgende Gleichung der Cycloide:

$$2. \quad x = r\,Arc\,sin\,v\,\frac{y}{r} \mp \sqrt{(2r-y)y},$$

bei der man aber zu bemerken hat, dass der Arcus zwischen den Gränzen 0, π und das obere Zeichen, oder der Arcus zwischen den Gränzen π, 2π und das untere Zeichen zu nehmen ist, jenachdem der Punkt xy der Cycloide in der Hälfte AS oder BS derselben liegt.

Die Gleichungen 1. werden in der Theorie der Cycloide am meisten gebraucht, und führen in der That auch meistens zu den einfachsten Rechnungen.

§. 193.

Aufgabe. Die Subtangente und Subnormale bei der Cycloide zu bestimmen.

Auflösung. Ist xy der Punkt der Cycloide, für welchen die Subtangente und Subnormale bestimmt werden soll, und φ der Bogen eines mit der Einheit als Radius beschriebenen Kreises, welcher den diesem Punkte der Cycloide entsprechenden Wälzungswinkel misst; so ist nach §. 192. I.

$$x = r(\varphi - \sin\varphi), \quad y = r(1-\cos\varphi).$$

Differentiirt man nun diese Gleichungen in Bezug auf φ als unabhängige veränderliche Grösse; so erhält man

$$\partial x = r(1-\cos\varphi)\,\partial\varphi, \quad \partial y = r\sin\varphi\,\partial\varphi.$$

Also ist, wie man mittelst einiger bekannten trigonometrischen Formeln leicht findet,

$$\frac{\partial x}{\partial y} = \tang\tfrac{1}{2}\varphi, \quad \frac{\partial y}{\partial x} = \cot\tfrac{1}{2}\varphi.$$

Bezeichnen wir nun die Subtangente und Subnormale durch s und s'; so ist nach §. 186.

$$s = r(1-\cos\varphi)\ \tang\tfrac{1}{2}\varphi = 2r\sin\tfrac{1}{2}\varphi^2\ \tang\tfrac{1}{2}\varphi$$

und

$$s' = r(1-\cos\varphi)\ \cot\tfrac{1}{2}\varphi = r\sin\varphi.$$

Hieraus erhellet sehr leicht, dass der Punkt M in allen Fällen der Endpunkt der von P an gerechneten Subnormale ist, und dass man also jederzeit die Normale für den Punkt Q erhält, wenn man die Linie QM zieht. Da ferner die Tangente in dem Punkte Q auf der Normale QM senkrecht, und der Winkel MQN als Winkel im Halbkreise ein rechter Winkel ist; so braucht man, um die Tangente in dem Punkte Q zu erhalten, bloss die Linie NQ zu ziehen, und dieselbe, bis sie die Abscissenaxe in T schneidet, zu verlängern, wodurch sich dann auch zugleich die Subtangente ergiebt.

§. 194.

Erklärung. Eine Curve, deren Gleichung $y = \log x$, oder, wenn b wie gewöhnlich die Basis der durch $\log$ bezeichneten Logarithmen bezeichnet, $x = b^y$ ist, heisst eine logarithmische Linie.

Für $x = 1$ ist $y = 0$, so dass also die Abscissenaxe in dem Endpunkte der, der Einheit gleichen Abscisse von der logarithmischen Linie geschnitten wird. Die den Abscissen, welche grösser als die Einheit sind, entsprechenden Ordinaten sind sämmtlich positiv und wachsen in's Unendliche, wenn die Abscissen in's Unendliche wachsen. Die den positiven Abscissen, welche kleiner als die Einheit sind, entsprechenden Ordinaten sind sämmtlich negativ, und nehmen in's Unendliche ab, wenn die Abscissen sich immer mehr und mehr der Null nähern. Negativen Abscissen entsprechen keine Punkte der logarithmischen Linie, weil, wie wir aus §. 127. wissen, die Logarithmen negativer Grössen imaginär sind.

Die logarithmische Linie hat also, wenn in *Fig.* 5 AB der positive Theil der Abscissenaxe, AC der positive Theil der Ordinatenaxe, AE die Einheit ist, die in der genannten Figur gezeichnete Gestalt. Der Ordinatenaxe nähert sich die logarithmische Linie offenbar immer mehr und mehr, ohne dieselbe jemals wirklich zu erreichen, so dass also die Ordinatenaxe offenbar eine Asymptote der logarithmischen Linie ist.

Die logarithmische Linie ist, weil ihre Gleichung eine transcendente Gleichung ist, so wie die Cycloide, eine transcendente Curve.

§. 195.

Aufgabe. Die Subtangente und Subnormale der logarithmischen Linie zu finden.

Auflösung. Ist $y = log\,x$ die Gleichung der logarithmischen Linie und M der Modulus der durch *log* bezeichneten Logarithmen; so ist nach §. 58. und §. 59.

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{M}{x}.$$

Also ist, wenn wieder s und s' die Subtangente und Subnormale bezeichnen, nach §. 186.

$$s = \frac{xy}{M}, \quad s' = \frac{My}{x}.$$

Die Gleichung der logarithmischen Linie ist aber bekanntlich auch $x = b^y$. Hieraus ergiebt sich nach §. 57. und §. 58.

$$\frac{\partial x}{\partial y} = \frac{b^y}{M} = \frac{x}{M}.$$

Bezeichnen wir nun die Subtangente und Subnormale durch und σ'; so ist nach §. 186.

$$\sigma = M, \quad \sigma' = \frac{x^2}{M}.$$

Jetzt ist also die Subtangente, d. i. die Linie Rt in *Fig.* 5 eine constante Grösse, nämlich dem Modulus der durch *log* bezeichneten Logarithmen gleich, welches eine sehr merkwürdig Eigenschaft der logarithmischen Linie ist.

B. Allgemeine Theorie der Berührunge Krümmungskreis.

§. 196.

Die Gleichungen zweier Curven seien

$$1.\ y = f(x), \qquad 2.\ y = \varphi(x).$$

Diese beiden Curven sollen den Punkt $x_1\ y_1$ mit einander gemein haben, so dass also

$$f(x_1) = \varphi(x_1)$$

ist. Ausserdem soll aber auch

$$f'(x_1) = \varphi'(x_1),\ f''(x_1) = \varphi''(x_1), \ldots f^{(n-1)}(x_1) = \varphi^{(n-1)}(x_1)$$

seyn.

Bezeichnen wir die der Abscisse $x_1 + \Delta$ entsprechenden Ordinaten der beiden Curven durch y' und y''; so is nach §. 110. II., wenn ϱ und θ positive echte Brüche bezeichnen,

$$y' = f(x_1) + f'(x_1) \cdot \frac{\varDelta}{1} + f''(x_1) \cdot \frac{\varDelta^2}{1.2} + \ldots + f^{(n-1)}(x_1) \cdot \frac{\varDelta^{n-1}}{1..(n-1)}$$
$$+ f^{(n)}(x_1 + \varrho\varDelta) \cdot \frac{\varDelta^n}{1 \ldots n},$$

$$y'' = \varphi(x_1) + \varphi'(x_1) \cdot \frac{\varDelta}{1} + \varphi''(x_1) \cdot \frac{\varDelta^2}{1.2} + \ldots + \varphi^{(n-1)}(x_1) \cdot \frac{\varDelta^{n-1}}{1..(n-1)}$$
$$+ \varphi^{(n)}(x_1 + \theta\varDelta) \cdot \frac{\varDelta^n}{1 \ldots n},$$

und folglich nach der Voraussetzung

$$y' - y'' = \{f^{(n)}(x_1 + \varrho\varDelta) - \varphi^{(n)}(x_1 + \theta\varDelta)\} \frac{\varDelta}{1 \ldots n}.$$

Ferner sey

$$3. \quad y = \psi(x)$$

die Gleichung einer dritten Curve und y''' die der Abscisse $x_1 + \varDelta$ entsprechende Ordinate derselben; so ist nach §. 110. II.

$$\begin{aligned} y' - y''' = \; & f(x_1) - \psi(x_1) \\ & + \{f'(x_1) - \psi'(x_1)\} \frac{\varDelta}{1} \\ & + \{f''(x_1) - \psi''(x_1)\} \frac{\varDelta^2}{1.2} \\ & \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \\ & + \{f^{(n-1)}(x_1) - \psi^{(n-1)}(x_1)\} \frac{\varDelta^{n-1}}{1 \ldots (n-1)} \\ & + \{f^{(n)}(x_1 + \varrho\varDelta) - \psi^{(n)}(x_1 + \theta'\varDelta)\} \frac{\varDelta^n}{1 \ldots n}, \end{aligned}$$

wo auch θ' einen positiven echten Bruch bezeichnet.

Wir wollen nun annehmen dass diese dritte Curve den Punkt x_1 y_1 mit der Curve 1. gemein habe, und dass also

$$f(x_1) - \psi(x_1) = 0$$

sey. Zugleich aber wollen wir annehmen, dass die Grössen

$$f'(x_1) - \psi'(x_1), \quad f''(x_1) - \psi''(x_1), \ldots f^{(n-1)}(x_1) - \psi^{(n-1)}(x_1)$$

nicht sämmtlich verschwinden, sondern dass diese Reihe immer einige nicht verschwindende Glieder enthalte, so dass also, wenn wir diese nicht verschwindenden Glieder, wie sie in ihrer natürlichen Ordnung auf einander folgen, im Allgemeinen durch

$$f^{(\varkappa)}(x_1) - \psi^{(\varkappa)}(x_1), \quad f^{(\lambda)}(x_1) - \psi^{(\lambda)}(x_1), \ldots \; f^{(\mu)}(x_1) - \psi^{(\mu)}(x_1)$$

bezeichnen,

$$y'-y'' = \{f^{(\varkappa)}(x_1)-\psi^{(\varkappa)}(x_1)\}\frac{\Delta^\varkappa}{1\ldots\varkappa}$$
$$+\{f^{(\lambda)}(x_1)-\psi^{(\lambda)}(x_1)\}\frac{\Delta^\lambda}{1\ldots\lambda}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$+\{f^{(\mu)}(x_1)-\psi^{(\mu)}(x_1)\}\frac{\Delta^\mu}{1\ldots\mu}$$
$$+\{f^{(n)}(x_1+\varrho\Delta)-\psi^{(n)}(x_1+\theta'\Delta)\}\frac{\Delta^n}{1\ldots n}$$

ist.

Setzen wir aber der Kürze wegen

$$P = \{f^{(n)}(x_1+\varrho\Delta)-\varphi^{(n)}(x_1+\theta\Delta)\}\frac{\Delta^{n-\varkappa}}{1\ldots n}$$

und

$$Q = \{f^{(\varkappa)}(x_1)-\psi^{(\varkappa)}(x_1)\}\frac{1}{1\ldots\varkappa}$$
$$+\{f^{(\lambda)}(x_1)-\psi^{(\lambda)}(x_1)\}\frac{\Delta^{\lambda-\varkappa}}{1\ldots\lambda}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$+\{f^{(\mu)}(x_1)-\psi^{(\mu)}(x_1)\}\frac{\Delta^{\mu-\varkappa}}{1\ldots\mu}$$
$$+\{f^{(n)}(x_1+\varrho\Delta)-\psi^{(n)}(x_1+\theta'\Delta)\}\frac{\Delta^{n-\varkappa}}{1\ldots n};$$

so ist

$$y'-y''=P\Delta^\varkappa,\quad y'-y'''=Q\Delta^\varkappa.$$

Nähert nun Δ sich der Null; so nähern, weil ϱ, θ, θ' positive echte Brüche sind, die Grössen

$$f^{(n)}(x_1+\varrho\Delta)-\varphi^{(n)}(x_1+\theta\Delta)$$

und

$$f^{(n)}(x_1+\varrho\Delta)-\psi^{(n)}(x_1+\theta'\Delta)$$

sich respective immer mehr und mehr und bis zu jedem beliebigen Grade den Grössen

$$f^{(n)}(x_1)-\varphi^{(n)}(x_1) \text{ und } f^{(n)}(x_1)-\psi^{(n)}(x_1),$$

und die Grössen P und Q nähern sich offenbar immer mehr und mehr und bis zu jedem beliebigen Grade respective der Null und der Grösse

$$\frac{f^{(\varkappa)}(x_1)-\psi^{(\varkappa)}(x_1)}{1.2.3\ldots\varkappa},$$

welche nach der Voraussetzung nicht $=0$ ist. Hieraus ist ersichtlich, dass man die Grösse Δ immer wird so nahe bei Null annehmen können, dass für alle der Null noch näher kommende Δ der absolute Werth der Grösse Q grösser als der absolute

erth der Grösse P, also auch der absolute Werth von $Q\Delta^x$ össer als der absolute Werth von $P\Delta^x$, d. i. der absolute 'erth von $y'-y'''$ grösser als der absolute Werth von $y'-y''$., und dass folglich in der Nähe des Punktes $x_1\ y_1$ die Curve nie zwischen den Curven 1. und 2. liegen kann. Stetigkeit r Functionen und ihrer Differentialquotienten bis zu dem $n$ten der Nähe des Punktes $x_1\ y_1$ wird hierbei aber immer vorausesetzt.

§. 197.

Wir wollen nun annehmen, dass die Gleichungen

$$1.\quad y=f(x),\qquad 2.\quad y=\varphi(x)$$

ieder die Gleichungen zweier Curven seyen, und dass die veite Gleichung n willkührliche Constanten $a, b, c, d, \ldots$ ithalte, so wie z. B. die allgemeine Gleichung der geraden nie bekanntlich zwei, die allgemeinste Gleichung des Kreises ei willkührliche Constanten enthält. Bestimmt man nun, wenn y_1 ein beliebiger Punkt der Curve 1. ist, die in der Gleiung 2. enthaltenen n willkührlichen Constanten aus den n leichungen:

$$3.\quad \begin{cases} f(x_1)-\varphi(x_1)=0, \\ f'(x_1)-\varphi'(x_1)=0, \\ f''(x_1)-\varphi''(x_1)=0, \\ \ldots\ldots\ldots \\ f^{(n-1)}(x_1)-\varphi^{(n-1)}(x_1)=0, \end{cases}$$

nd setzt die gefundenen Werthe für die in Rede stehenden Contanten in die Gleichung 2.; so wird die, durch die auf diese Veise erhaltene Gleichung characterisirte Curve den Punkt $x_1\ y_1$ iit der Curve 1. gemein haben, und sich in der Nähe dieses 'unktes enger an die Curve 1. anschliessen als irgend eine anere der durch die allgemeine Gleichung 2. characterisirten Curen. Da nämlich die in Rede stehenden willkührlichen Constann durch die Gleichungen 3. vollständig bestimmt sind, und also ese Gleichungen sämmtlich durch andere Werthe der willihrlichen Constanten nicht erfüllt werden können; so kann ich §. 196. keine andere der durch die allgemeine Gleichung 2. iaracterisirten Curven, welche durch den Punkt $x_1\ y_1$ geht, in r Nähe dieses Punktes zwischen der Curve 1. und der durch e Gleichung 2., wenn man in dieselbe für die in ihr enthalnen n willkührlichen Constanten die nach der obigen Anweiing bestimmten Werthe dieser Constanten setzt, characterisirten irve liegen, so dass sich also die letztere Curve unter allen irch die allgemeine Gleichung 2. characterisirten, durch den inkt x_1, y_1 gehenden Curven, in der Nähe dieses Punktes fenbar am innigsten an die Curve 1. anschliesst, wie oben hauptet wurde.

§. 198.

Die im vorigen Paragraphen angestellten Betrachtungen haben auf den folgenden wichtigen Begriff geführt.

Wenn

$$1.\ y = f(x), \quad 2.\ y = \varphi(x)$$

die Gleichungen zweier Curven sind, und für den Punkt $x_1\ y_1$

$$f(x_1) = \varphi(x_1), f'(x_1) = \varphi'(x_1), \ldots f^{(n-1)}(x_1) = \varphi^{(n-1)}(x_1)$$

ist; so sagt man, dass die beiden Curven in dem Punkte $x_1\ y_1$, welchen sie offenbar mit einander gemein haben werden, eine Berührung oder einen Contact der $(n-1)$sten Ordnung haben.

Zugleich geht aus dem vorigen Paragraphen unmittelbar hervor, dass mit einer beliebigen durch die Gleichung $y = f(x)$ characterisirten Curve eine andere durch die allgemeine, n willkührliche Constanten enthaltende Gleichung $y = \varphi(x)$ characterisirte Curve jederzeit höchstens nur einen Contact der $(n-1)$sten Ordnung haben kann.

Weil also z. B. die allgemeine Gleichung der geraden Linie nur zwei willkührliche Constanten enthält; so kann die gerade Linie mit jeder beliebigen Curve nur einen Contact der ersten Ordnung haben. Die allgemeinste Gleichung des Kreises enthält drei willkührliche Constanten, und der Kreis kann also mit jeder beliebigen Curve höchstens einen Contact der zweiten Ordnung haben.

§. 199.

Der Kreis, welcher mit einer gegebenen Curve in einem gewissen Punkte derselben einen Contact der zweiten Ordnung hat, schliesst sich nach §. 197. unter allen Kreisen, welche sich durch den in Rede stehenden Punkt beschreiben lassen, in der Nähe dieses Punktes am innigsten an die gegebene Curve an, und mittelst dieses Kreises wird sich also die Krümmung der gegebenen Curve in der Nähe des in Rede stehenden Punktes mit der höchsten überhaupt erreichbaren Genauigkeit durch einen Kreisbogen darstellen lassen, welches auf den folgenden in jeder Beziehung höchst wichtigen Begriff geführt hat.

Der Kreis, welcher mit einer Curve in einem gegebenen Punkte derselben einen Contact der zweiten Ordnung hat, heisst der Krümmungskreis, und sein Halbmesser der Krümmungshalbmesser der Curve in dem gegebenen Punkte derselben. Der Mittelpunkt des Krümmungskreises wird auch wohl zuweilen in der Kürze der Krümmungsmittelpunkt genannt.

§. 200.

Aufgabe. Die Gleichung der geraden Linie zu finden, welche mit einer Curve, deren Gleichung

$=f(x)$ ist, in dem Punkte $x_1\, y_1$ dieser Curve einen ontact der ersten Ordnung hat.

Auflösung. Die Gleichung der gesuchten geraden Linie sey

$$y = \varphi(x) = Ax + B.$$

ıch §. 197. hat man zur Bestimmung der willkührlichen Conınten A, B die beiden Gleichungen

$$f(x_1) = \varphi(x_1),\ f'(x_1) = \varphi'(x_1).$$

'eil nach der Annahme der Punkt $x_1\, y_1$ in der gegebenen ırve liegt, so ist $f(x_1) = y_1$. Ferner ist $\varphi(x_1) = Ax_1 + B$, ıd, weil $\varphi'(x) = A$ ist, auch $\varphi'(x_1) = A$. Also sind

$$y_1 = Ax_1 + B,\ f'(x_1) = A$$

ɜ beiden Gleichungen, aus denen die willkührlichen Constanten , B bestimmt werden müssen. Zieht man die erste dieser iden Gleichungen von der Gleichung

$$y = Ax + B$$

; so erhält man die Gleichung

$$y - y_1 = A(x - x_1),$$

welche man nun unmittelbar für A seinen oben gefundenen 'erth setzen kann, wodurch man die Gleichung

$$y - y_1 = f'(x_1).(x - x_1)$$

r gesuchten geraden Linie erhält, welche man übrigens, wenn ın sich nur erinnert, dass der Differentialquotient $\frac{\partial y_1}{\partial x_1}$ immer s der Gleichung der gegebenen Curve entwickelt werden muss, ch unter der Form

$$y - y_1 = \frac{\partial y_1}{\partial x_1}(x - x_1)$$

hreiben kann.

Vergleicht man dies mit §. 181.; so ergiebt sich, dass die rade Linie, welche mit der gegebenen Curve in dem Punkte y_1 derselben einen Contact der ersten Ordnung hat, keine ıdere als die Tangente der gegebenen Curve in dem Punkte y_1 ist, wie sich auch im Voraus erwarten liess.

§. 201.

Aufgabe. Die Gleichung des Krümmungskreises ner gegebenen Curve, deren Gleichung $y = f(x)$ t, für einen gegebenen Punkt $x_1\, y_1$ dieser Curve ı finden.

Auflösung. Die gesuchte Gleichung des Krümmungskreises y im Allgemeinen

$$1.\quad y = \varphi(x);$$

so haben wir zur Bestimmung der drei in derselben enthaltenen willkührlichen Constanten nach §. 197. die drei Gleichungen

$$2.\quad f(x_1) = \varphi(x_1),\quad f'(x_1) = \varphi'(x_1),\quad f''(x_1) = \varphi''(x_1).$$

Nehmen wir aber die Coordinaten rechtwinklig an, und bezeichnen die Coordinaten des Mittelpunkts des Krümmungskreises durch α, β, seinen Halbmesser durch ϱ; so ist die allgemeine Gleichung des Krümmungskreises bekanntlich

$$3.\quad (x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = \varrho^2$$

oder

$$4.\quad (x-\alpha)^2 + \{\varphi(x)-\beta\}^2 = \varrho^2.$$

Durch zweimalige Differentiation dieser Gleichung erhält man

$$5.\quad x-\alpha + \{\varphi(x)-\beta\}\varphi'(x) = 0,$$

$$6.\quad 1 + \{\varphi(x)-\beta\}\varphi''(x) + \{\varphi'(x)\}^2 = 0,$$

und hat also nun nach 2. zur Bestimmung der Constanten α, β, ϱ die drei folgenden Gleichungen:

$$7.\quad \begin{cases} (x_1-\alpha)^2 + \{f(x_1)-\beta\}^2 = \varrho^2, \\ x_1-\alpha + \{f(x_1)-\beta\}f'(x_1) = 0, \\ 1 + \{f(x_1)-\beta\}f''(x_1) + \{f'(x_1)\}^2 = 0; \end{cases}$$

oder, weil nach der Annahme der Punkt $x_1 y_1$ in der gegebenen Curve liegt, und daher $y_1 = f(x_1)$ ist, die drei folgenden Gleichungen:

$$8.\quad \begin{cases} (x_1-\alpha)^2 + (y_1-\beta)^2 = \varrho^2, \\ x_1-\alpha + (y_1-\beta)f'(x_1) = 0, \\ 1 + (y_1-\beta)f''(x_1) + \{f'(x_1)\}^2 = 0. \end{cases}$$

Bestimmt man aus den beiden letzten Gleichungen dieses Systems α und β; so erhält man

$$9.\quad \alpha = x_1 - \frac{1+\{f'(x_1)\}^2}{f''(x_1)}f'(x_1),\quad \beta = y_1 + \frac{1+\{f'(x_1)\}^2}{f''(x_1)}$$

und hieraus ferner mittelst der ersten der Gleichungen 8.

$$10.\quad \varrho = \pm\frac{\left\{1+\{f'(x_1)\}^2\right\}^{\frac{3}{2}}}{f''(x_1)},$$

wo, weil ϱ seiner Natur nach eine positive Grösse ist, das obere oder untere Zeichen zu nehmen ist, jenachdem $f''(x_1)$ eine positive oder eine negative Grösse ist.

Erinnert man sich nur immer, dass alle Differentialquotienten aus der Gleichung $y = f(x)$ der gegebenen Curve zu entwickeln sind; so kann man die obigen Formeln, durch welche

›r Krümmungskreis seiner Lage und Grösse nach vollkommen ›stimmt ist, auch auf folgende Art ausdrücken:

$$11. \quad \alpha = x_1 - \frac{\left\{1 + \left(\frac{\partial y_1}{\partial x_1}\right)^2\right\}\frac{\partial y_1}{\partial x_1}}{\frac{\partial^2 y_1}{\partial x_1^2}}, \quad \beta = y_1 + \frac{1 + \left(\frac{\partial y_1}{\partial x_1}\right)^2}{\frac{\partial^2 y_1}{\partial x_1^2}};$$

$$12. \quad \varrho = \pm \frac{\left\{1 + \left(\frac{\partial y_1}{\partial x_1}\right)^2\right\}^{\frac{3}{2}}}{\frac{\partial^2 y_1}{\partial x_1^2}};$$

obei aber wieder nicht unbemerkt bleiben darf, dass in der tzten Gleichung das obere oder das untere Zeichen genommen erden muss, jenachdem $\frac{\partial^2 y_1}{\partial x_1^2}$ positiv oder negativ ist.

Endlich kann man die obigen Formeln auch noch unter der ›rm

$$13. \quad \alpha = x_1 - \frac{(\partial x_1^2 + \partial y_1^2)\partial y_1}{\partial x_1\, \partial^2 y_1}, \quad \beta = y_1 + \frac{\partial x_1^2 + \partial y_1^2}{\partial^2 y_1},$$

$$\varrho = \pm \frac{(\partial x_1^2 + \partial y_1^2)^{\frac{3}{2}}}{\partial x_1\, \partial^2 y_1}$$

›hreiben, wenn man nur beachtet, dass in der letzten Formel ›s Zeichen immer so zu nehmen ist, dass ϱ positiv wird.

§. 202.

Zusatz. Der Mittelpunkt des Krümmungskreises ›iner Curve in dem Punkte $x_1\, y_1$ derselben liegt ›derzeit auf der durch diesen Punkt gehenden ›ormale der Curve.

Nach der zweiten der Gleichungen 8. in §. 201. ist

$$x_1 - \alpha + (y_1 - \beta) f'(x_1) = 0,$$

›ler

$$\beta - y_1 = -\frac{1}{f'(x_1)}(\alpha - x_1),$$

›ler

$$\beta - y_1 = -\frac{\partial x_1}{\partial y_1}(\alpha - x_1).$$

›eil nun nach §. 183. die Gleichung der durch den Punkt $x_1\, y_1$ ›r gegebenen Curve gehenden Normale derselben

$$y - y_1 = -\frac{\partial x_1}{\partial y_1}(x - x_1)$$

›t; so erhellet die Richtigkeit des zu beweisenden Satzes.

§. 203.

Aufgabe. Den Krümmungskreis für jeden der drei Kegelschnitte zu bestimmen.

Auflösung. I. Die Gleichung der Parabel ist

$$y^2 = px.$$

Also ist

$$2y\frac{\partial y}{\partial x} = p, \quad y\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 = 0;$$

folglich

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{p}{2y}, \quad \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = -\frac{p^2}{4y^3};$$

$$1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 = 1 + \frac{p^2}{4y^2} = \frac{4y^2 + p^2}{4y^2} = \frac{4x + p}{4x};$$

$$\left\{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2\right\}\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{4x + p}{4x}\cdot\frac{p}{2y} = \frac{p(4x + p)}{8xy};$$

$$\frac{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2}{\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}} = -\frac{y(4y^2 + p^2)}{p^2}, \quad \frac{\left\{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2\right\}\frac{\partial y}{\partial x}}{\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}} = -2x - \text{[illegible]}$$

Bezeichnen wir nun der Kürze wegen die Coordinaten des Punktes der Parabel, für welchen der Krümmungskreis bestimmt werden soll, durch x, y selbst; so ist nach §. 201.

$$\alpha = x + 2x + \tfrac{1}{2}p = 3x + \tfrac{1}{2}p,$$

$$\beta = y - \frac{y(4y^2 + p^2)}{p^2} = -\frac{4y^3}{p^2} = -\frac{4x^2}{y}.$$

Weil ferner der absolute Werth der Grösse

$$\frac{\left\{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2\right\}^{\frac{3}{2}}}{\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}} = -\left(\frac{4y^2 + p^2}{4y^2}\right)^{\frac{3}{2}}\cdot\frac{4y^3}{p^2}$$

offenbar

$$\frac{(4y^2 + p^2)^{\frac{3}{2}}}{2p^2}$$

ist; so ist

$$\varrho = \frac{(4y^2 + p^2)^{\frac{3}{2}}}{2p^2}.$$

Bezeichnet man das zwischen dem Punkte xy und der Abscissenaxe liegende Stück der durch den Punkt xy gezogenen Normale der Parabel durch N; so ist nach §. 187.

$$N^2 = y^2\left(1 + \frac{p^2}{4y^2}\right) = \frac{4y^2 + p^2}{4},$$

glich

$$(4y^2+p^2)^{\frac{3}{2}} = 8N^3.$$

t

$$\varrho = \frac{N^3}{(\frac{1}{2}p)^2}.$$

r Formel

$$\varrho = \frac{(4y^2+p^2)^{\frac{3}{2}}}{2p^2}$$

sich, dass im Scheitel der Parabel $\varrho = \frac{1}{2}p$ ist.

. Die Gleichung

$$b^2x^2 \pm a^2y^2 = a^2b^2$$

nachdem man das obere oder das untere Zeichen nimmt, eichung der Ellipse oder der Hyperbel. Durch zweimalige ntiation dieser Gleichung erhält man

$$\pm a^2y\frac{\partial y}{\partial x} = 0, \quad b^2 \pm a^2\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 \pm a^2y\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0;$$

$$^2x + a^2y\frac{\partial y}{\partial x} = 0, \quad \pm b^2 + a^2\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 + a^2y\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0.$$

er ersten dieser beiden Gleichungen folgt

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \mp\frac{b^2x}{a^2y},$$

wenn man diesen Werth des ersten Differentialquotienten in reite Gleichung einführt,

$$a^2y\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \mp b^2 - \frac{b^4x^2}{a^2y^2} = \mp\frac{b^2(a^2y^2 \pm b^2x^2)}{a^2y^2}$$

$$= -\frac{b^2(b^2x^2 \pm a^2y^2)}{a^2y^2} = -\frac{b^4}{y^2};$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = -\frac{b^4}{a^2y^3}.$$

ch ist

$$\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 = \frac{b^4x^2+a^4y^2}{a^4y^2}, \quad \left\{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2\right\}\frac{\partial y}{\partial x} = \mp\frac{b^2(b^4x^2+a^4y^2)x}{a^6y^3};$$

$$\frac{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2}{\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}} = -\frac{(b^4x^2+a^4y^2)y}{a^2b^4},$$

$$\frac{\left\{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2\right\}\frac{\partial y}{\partial x}}{\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}} = \pm\frac{(b^4x^2+a^4y^2)x}{a^4b^2};$$

also

$$\alpha = x \mp \frac{(b^4x^2 + a^4y^2)x}{a^4b^2} = \frac{(a^4b^2 \mp b^4x^2 \mp a^4y^2)x}{a^4b^2},$$

$$\beta = y - \frac{(b^4x^2 + a^4y^2)y}{a^2b^4} = \frac{(a^2b^4 - b^4x^2 - a^4y^2)y}{a^2b^4},$$

wenn wir wieder der Kürze wegen die Coordinaten des Punktes der Ellipse oder Hyperbel, für welchen der Krümmungskreis bestimmt werden soll, durch x, y selbst bezeichnen.

Weil nun aber

$$\pm a^2y^2 = a^2b^2 - b^2x^2, \quad b^2x^2 = a^2b^2 \mp a^2y^2;$$
$$\pm a^4y^2 = a^4b^2 - a^2b^2x^2, \quad b^4x^2 = a^2b^4 \mp a^2b^2y^2$$

ist; so erhält man leicht

$$\alpha = \frac{(a^2 \mp b^2)x^3}{a^4}, \quad \beta = -\frac{(a^2 \mp b^2)y^3}{b^4}.$$

Weil ferner der absolute Werth von

$$\frac{\left\{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2\right\}^{\frac{3}{2}}}{\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}} = -\left(\frac{b^4x^2 + a^4y^2}{a^4y^2}\right)^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{a^2y^3}{b^4}$$

offenbar

$$\frac{(b^4x^2 + a^4y^2)^{\frac{3}{2}}}{a^4b^4}$$

ist; so ist

$$\varrho = \frac{(b^4x^2 + a^4y^2)^{\frac{3}{2}}}{a^4b^4}.$$

Bezeichnen wir wieder den zwischen dem Punkte xy und der Abscissenaxe liegenden Theil der durch den Punkt xy gezogenen Normale der Ellipse oder Hyperbel durch N; so ist nach §. 1[illegible]7.

$$N^2 = y^2\left(1 + \frac{b^4x^2}{a^4y^2}\right) = \frac{b^4x^2 + a^4y^2}{a^4},$$

und folglich

$$(b^4x^2 + a^4y^2)^{\frac{3}{2}} = a^6N^3;$$

also

$$\varrho = \frac{a^2N^3}{b^4}.$$

Bezeichnen wir aber wie gewöhnlich den Parameter der Ellipse oder Hyperbel durch p; so ist nach der Theorie der Kegelschnitte bekanntlich

$$p = \frac{2b^2}{a}, \quad p^2 = \frac{4b^4}{a^2}, \quad \frac{b^4}{a^2} = (\tfrac{1}{2}p)^2,$$

und folglich wieder

$$\varrho = \frac{N^3}{(\frac{1}{2}p)^2}.$$

§. 204.

Zusatz. Der Krümmungshalbmesser eines beliegen Punktes xy jedes Kegelschnitts wird gefunden, enn man den Cubus des zwischen dem Punkte xy ıd der Abscissenaxe liegenden Theils der durch n Punkt xy gezogenen Normale des Kegelschnitts ırch das Quadrat des halben Parameters dividirt.

Dies ist also eine allgemeine Eigenschaft aller Kegelschnitte.

§. 205.

Betrachtet man die Erde als ein elliptisches Sphäroid; so rsteht man unter der Breite eines beliebigen Punktes auf ihr n spitzigen Winkel, unter welchem die durch diesen Punkt zogene Normale des durch denselben gelegten Meridians gen die grosse Axe dieses Meridians geneigt ist.

Bezeichnen wir nun die grosse und kleine Halbaxe des Erdhäroids respective durch a und b, die Breite eines beliebigen ınktes auf der Erdoberfläche durch φ, die rechtwinkligen Codinaten dieses Punktes durch x, y, seinen Krümmungshalbesser durch ϱ; so ist zunächst, wie aus §. 183. und §. 203. sich leicht ergiebt,

$$u - y = \frac{a^2 y}{b^2 x}(z - x)$$

e Gleichung der durch den Punkt xy gezogenen Normale des eridians dieses Punktes, Alles in der Ebene dieses Meridians dacht. Also ist nach Principien der analytischen Geometrie

$$1.\quad tang\,\varphi = \frac{a^2 y}{b^2 x}.$$

ntwickelt man, die Gleichung der Ellipse zu Hülfe nehmend, ıs dieser Gleichung umgekehrt x und y; so erhält man

$$2.\quad \begin{cases} x = \dfrac{a^2}{\sqrt{a^2 + b^2\,tang\,\varphi^2}} = \dfrac{a^2 \cos\varphi}{\sqrt{a^2\cos\varphi^2 + b^2\sin\varphi^2}}, \\ y = \dfrac{b^2}{\sqrt{b^2 + a^2\cot\varphi^2}} = \dfrac{b^2\sin\varphi}{\sqrt{a^2\cos\varphi^2 + b^2\sin\varphi^2}}. \end{cases}$$

ieraus ergiebt sich leicht

$$b^4 x^2 + a^4 y^2 = \frac{a^4 b^4}{a^2\cos\varphi^2 + b^2\sin\varphi^2},$$

ıd folglich nach §. 203.

$$3.\quad \varrho = \frac{a^2 b^2}{(a^2\cos\varphi^2 + b^2\sin\varphi^2)^{\frac{3}{2}}},$$

ler

$$4.\quad \varrho = \frac{a^2 b^2}{\{a^2 - (a^2 - b^2)\sin\varphi^2\}^{\frac{3}{2}}},$$

ıd folglich, wenn man

$$5.\quad \frac{a^2-b^2}{a^2}=e^2$$

setzt,

$$6.\quad \varrho = a(1-e^2)(1-e^2 \sin\varphi^2)^{-\frac{3}{2}}.$$

§. 206.

Unter einem Meridiangrad oder einem Grad schlechthin versteht man in der Geographie einen Bogen eines Meridians von solcher Länge, dass die durch seine beiden Endpunkte gezogenen Normalen des Meridians einen Winkel von 1^0 mit einander einschliessen. Bezeichnen wir die Breiten der beiden Endpunkte eines Meridiangrades durch φ und φ'; so erhellet leicht, dass immer $\varphi'-\varphi=1^0$ ist, und dass man also einen Grad auch als einen Bogen eines Meridians definiren kann, welcher zwischen zwei Punkten dieses Meridians liegt, deren Breiten um einen Grad von einander verschieden sind.

Aus zwei unter verschiedenen Breiten gemessenen Graden lässt sich das Verhältniss der beiden Axen des Erdsphäroids, oder die sogenannte Abplattung, und auch die beiden Axen selbst bestimmen, woraus sich der Zweck der sogenannten Gradmessungen erklärt, durch welche bekanntlich die Gestalt und Grösse des Erdkörpers zuerst genauer bestimmt worden ist.

Um dies zu zeigen, seyen G und G' zwei unter den Breiten φ und φ' gemessene Grade, und ϱ, ϱ' die denselben Breiten entsprechenden Krümmungshalbmesser; so ist klar, dass man, wenigstens mit jedem hier nöthigen Grade der Genauigkeit,

$$G:G'=\varrho:\varrho'$$

setzen kann. Weil nun aber nach §. 205.

$$\varrho:\varrho'=(1-e^2\sin\varphi^2)^{-\frac{3}{2}}:(1-e^2\sin\varphi'^2)^{-\frac{3}{2}}$$

ist; so ist auch

$$G:G'=(1-e^2\sin\varphi^2)^{-\frac{3}{2}}:(1-e^2\sin\varphi'^2)^{-\frac{3}{2}},$$

$$G^{\frac{2}{3}}:G'^{\frac{2}{3}}=1-e^2\sin\varphi'^2:1-e^2\sin\varphi^2,$$

und folglich

$$e^2=\frac{G^{\frac{2}{3}}-G'^{\frac{2}{3}}}{G^{\frac{2}{3}}\sin\varphi^2-G'^{\frac{2}{3}}\sin\varphi'^2}=\frac{1-\left(\frac{G'}{G}\right)^{\frac{2}{3}}}{\left\{1-\left(\frac{\sin\varphi'}{\sin\varphi}\right)^2\left(\frac{G'}{G}\right)^{\frac{2}{3}}\right\}\sin\varphi^2}.$$

Berechnet man die Hülfswinkel θ und θ' aus den Formeln

$$\left(\frac{G'}{G}\right)^{\frac{1}{3}}=\cos\theta,\quad \left(\frac{G'}{G}\right)^{\frac{1}{3}}\cdot\frac{\sin\varphi'}{\sin\varphi}=\cos\theta';$$

so kann man e mit grosser Leichtigkeit mittelst der Formel

$$e = \frac{\sin\theta}{\sin\theta' \sin\varphi}$$

berechnen.

Hat man e, so findet man, weil

$$\frac{b}{a} = \sqrt{(1-e)(1+e)}$$

ist, auch leicht $\frac{b}{a}$, und hieraus ferner die sogenannte Abplattung $\frac{a-b}{a} = 1 - \frac{b}{a}$.

Uebrigens kann man nun aber auch leicht a und b selbst finden. Es ist nämlich offenbar

$$\frac{\pi}{180} : G = 1 : \varrho, \quad \varrho = \frac{180\,G}{\pi}.$$

Folglich ist nach §. 205.

$$\frac{180\,G}{\pi} = a(1-e^2)(1-e^2 \sin\varphi^2)^{-\frac{3}{2}},$$

und hieraus

$$a = \frac{180\,G(1-e^2\sin\varphi^2)^{\frac{3}{2}}}{\pi(1-e^2)}.$$

Hat man aber mittelst dieser Formel a gefunden; so kann man auch leicht b finden, da man das Verhältniss $\frac{b}{a}$ kennt.

§. 207.

Aufgabe. Den Krümmungshalbmesser der Cycloide zu finden.

Auflösung. Nach §. 193. ist

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \cot\tfrac{1}{2}\varphi,$$

und folglich

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\partial \cot\frac{1}{2}\varphi}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial x} = -\frac{1}{2\sin\frac{1}{2}\varphi^2}\cdot\frac{1}{r(1-\cos\varphi)} \text{ (§. 193.)};$$

also

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = -\frac{1}{4r\sin\frac{1}{2}\varphi^4}.$$

Ohne Schwierigkeit erhält man hieraus

$$\varrho = 4r\sin\tfrac{1}{2}\varphi.$$

Die Sehne QM (*Fig.* 4.) des erzeugenden Kreises ist, wie leicht erhellet, $= 2r\sin\frac{1}{2}\varphi$. Also ist der Krümmungshalbmesser doppelt so gross wie diese Sehne.

Bestimmt man noch die Ordinate β des Mittelpunktes des Krümmungskreises; so erhält man

$$\beta = y - 4r\sin\tfrac{1}{2}\varphi^2,$$

d. i. nach §. 192.

$$\beta = r(1-\cos\varphi) - 4r\sin\tfrac{1}{2}\varphi^2 = -2r\sin\tfrac{1}{2}\varphi^2.$$

Da diese Ordinate stets negativ ist, und nach §. 202. der Mittelpunkt des Krümmungskreises immer auf der Normale des Punktes der Curve, für welchen man den Krümmungskreis bestimmt hat, liegt; so findet man den Mittelpunkt des Krümmungskreises für einen beliebigen Punkt Q(*Fig.* 4.) der Cycloide leicht, wenn man die Sehne QM des erzeugenden Kreises über den Punkt M hinaus verlängert, und die Verlängerung $= QM$ macht, wo dann der Endpunkt der auf diese Weise erhaltenen Linie jederzeit der gesuchte Mittelpunkt des Krümmungskreises seyn wird, so dass man also auch den Krümmungskreis der Cycloide selbst für jeden ihrer Punkte leicht beschreiben kann.

C. Concavität und Convexität der Curven. Wendungspunkte und Spitzen. Nachtrag zur Lehre vom Krümmungskreise.

§. 208.

Wir denken uns wieder einen gewissen bestimmten Punkt xy einer Curve, deren Gleichung $y=f(x)$ ist, und nehmen im Folgenden, wenn nicht ausdrücklich etwas anderes bemerkt wird, immer an, dass $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$ in der Nähe von x stetig sind, so dass diese Grössen nicht bloss selbst endliche reelle völlig bestimmte Werthe haben, sondern auch endliche reelle völlig bestimmte Werthe behalten, wenn man x um eine unendlich kleine positive Grösse zu- oder abnehmen lässt.

Die Curve liegt, weil $f(x)$ nach der Voraussetzung einen endlichen reellen völlig bestimmten Werth hat, und auch einen endlichen reellen völlig bestimmten Werth behält, wenn man x um eine unendlich kleine positive Grösse zu- oder abnehmen lässt, in der Nähe des Punktes xy auf beiden Seiten dieses Punktes. Denkt man sich nun durch denselben eine Tangente an die Curve gezogen; so können zwei Fälle eintreten, jenachdem die Curve nämlich auf den beiden Seiten des Punktes xy auf **einer** Seite der durch denselben an sie gezogenen Tangente, oder auf verschiedenen Seiten dieser Tangente liegt, immer nur in der Nähe des Punktes xy.

Im ersten Falle (*Fig.* 6.) sagt man, dass die Curve in dem Punkte xy, von der Tangente an gerechnet, nach **der** Seite der Tangente hin, auf welcher sie in der Nähe des Punktes xy liegt, **concav**, nach der entgegengesetzten Seite hin dagegen **convex** sey. Im zweiten Falle (*Fig.* 7.) nennt man den Punkt xy einen **Wendungspunkt**. Der Punkt xy ist in beiden Figuren durch P bezeichnet worden.

§. 209.

Lehrsatz. Wenn $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$ in der Nähe von x stetig sind, so dass diese Grössen nicht bloss selbst endliche reelle völlig bestimmte Werthe haben, sondern auch endliche reelle völlig bestimmte Werthe behalten, wenn man x um eine unendlich kleine positive Grösse zu- oder abnehmen lässt, und $f''(x)$ nicht $=0$ ist; so liegt die Curve in der Nähe des Punktes xy auf beiden Seiten dieses Punktes auf *einer* Seite der durch denselben an die Curve gezogenen Tangente, und ist also, von der Tangente an gerechnet, nach *der* Seite der Tangente hin, auf welcher sie in der Nähe des Punktes xy liegt, concav, nach der andern Seite hin dagegen convex.

Beweis. Die Gleichung der durch den Punkt xy an die Curve gezogenen Tangente ist nach §. 181.

$$1. \quad u-f(x)=f'(x).(z-x)$$

Man lasse sich nun x um $\pm\Delta x$ verändern, und bezeichne die den Abscissen $x-\Delta x$ und $x+\Delta x$ entsprechenden Ordinaten der Curve durch y' und Y', die denselben Abscissen entsprechenden Ordinaten der durch den Punkt xy gezogenen Tangente dagegen durch y'' und Y''; so ist nach §. 110. II.

$$2. \begin{cases} y'=f(x)-f'(x).\Delta x+\frac{1}{2}f''(x-\varrho\Delta x).\Delta x^2, \\ Y'=f(x)+f'(x).\Delta x+\frac{1}{2}f''(x+\theta\Delta x).\Delta x^2; \end{cases}$$

wo ϱ und θ positive echte Brüche bezeichnen; und nach 1. ist

$$3. \begin{cases} y''=f(x)-f'(x).\Delta x, \\ Y''=f(x)+f'(x).\Delta x; \end{cases}$$

also

$$4. \begin{cases} y'=y''+\frac{1}{2}f''(x-\varrho\Delta x).\Delta x^2, \\ Y'=Y''+\frac{1}{2}f''(x+\theta\Delta x).\Delta x^2. \end{cases}$$

Weil nun nach der Voraussetzung $f''(x)$ nicht $=0$ und in der Nähe von x stetig ist; so kann man Δx offenbar so nahe bei Null annehmen, dass

$$f''(x-\varrho\Delta x) \text{ und } f''(x+\theta\Delta x)$$

für den in Rede stehenden Werth von Δx und für der Null noch näher kommende Δx beide immer >0 oder beide immer <0 sind, jenachdem $f''(x)>0$ oder <0 ist; und für die in Rede stehenden Werthe von Δx, d. h. in der Nähe des Punktes xy nach beiden Seiten hin, ist also mit Beziehung der obern und untern Zeichen auf einander immer

$$y' \gtrless y'', \quad Y' \gtrless Y'';$$

d. h. die Curve liegt in der Nähe des Punktes xy auf beiden Seiten desselben auf *einer* Seite der durch diesen Punkt an die Curve gezogenen Tangente, und ist also immer, von der Tan-

gente an gerechnet, nach der Seite der Tangente hin, auf welcher sie in der Nähe des Punktes xy liegt, concav, nach der andern Seite hin dagegen convex, wie bewiesen werden sollte.

§. 210.

Lehrsatz. Wenn $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$, $f'''(x)$ in der Nähe von x stetig sind, so dass diese Grössen nicht bloss selbst endliche reelle völlig bestimmte Werthe haben, sondern auch endliche reelle völlig bestimmte Werthe behalten, wenn man x um eine unendlich kleine positive Grösse zu- oder abnehmen lässt, und $f''(x) = 0$, aber $f'''(x)$ nicht $= 0$ ist; so ist der Punkt xy ein Wendungspunkt.

Beweis. Unter Beibehaltung der in §. 209. gebrauchten Zeichen und der Voraussetzung, dass $f''(x) = 0$ ist, erhält man leicht ganz auf ähnliche Art wie dort

$$y' = y'' - \tfrac{1}{6}f'''(x-\varrho\Delta x).\Delta x^3, \quad Y' = Y'' + \tfrac{1}{6}f'''(x+\theta\Delta x).\Delta x^3.$$

Weil nun $f'''(x)$ nicht $=0$ ist; so ist für der Null unendlich nahe kommende Δx mit Beziehung der obern und untern Zeichen auf einander

$$f'''(x-\varrho\Delta x) \lessgtr 0, \quad f'''(x+\theta\Delta x) \lessgtr 0,$$

folglich

$$y' \gtrless y'', \quad Y' \lessgtr Y'',$$

also der Punkt xy offenbar ein Wendungspunkt, wie bewiesen werden sollte.

Anmerkung. Auf ganz ähnliche Art würde man allgemeiner beweisen können, dass, wenn der zweite und eine gerade Anzahl nächstfolgender Differentialquotienten für den Werth x der veränderlichen Grösse verschwinden, der erste nicht verschwindende Differentialquotient aber von ungerader Ordnung ist, der Punkt xy' ein Wendungspunkt ist.

§. 211.

Wir wollen jetzt annehmen, dass $f(x)$ und $f'(x)$ in der Nähe von x stetig sind, dass aber $f''(x) = \pm\infty$, jedoch in der Nähe von $x \mp i$, wo i eine unendlich kleine positive Grösse bezeichnet, ebenfalls stetig ist.

Setzen wir nun $x - i = \xi$, $x + i = \xi'$; bezeichnen die den Abscissen ξ, ξ' entsprechenden Ordinaten der Curve durch v, v'; die den Abscissen $\xi - \Delta x$, $\xi' + \Delta x$ entsprechenden Ordinaten der Curve durch y', Y'; die denselben Abscissen entsprechenden Ordinaten der durch die Punkte ξv und $\xi' v'$ an die Curve gezogenen Tangente durch y'', Y''; so ist ganz wie in §. 209.

$$y' = y'' + \tfrac{1}{2}f''(\xi - \varrho\Delta x).\Delta x^2, \quad Y' = Y'' + \tfrac{1}{2}f''(\xi' + \theta\Delta x).\Delta x^2.$$

Weil aber nach der Voraussetzung $f''(x) = \pm\infty$ ist; so muss *diese Grösse* die Form

$$f''(x) = \frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$$

haben, und $\psi(x) = 0$, $\varphi(x) \gtrless 0$ seyn. Also ist für der Null unendlich nahe kommende Δx mit Beziehung der obern und untern Zeichen auf einander

$$\varphi(\xi - \varrho\Delta x) \gtrless 0, \quad \varphi(\xi' + \theta\Delta x) \gtrless 0.$$

Ist dann die Function $\psi(x)$ so beschaffen, dass sie, indem sie für den Werth x der veränderlichen Grösse verschwindet, bei diesem Durchgange durch Null zugleich ihr Zeichen ändert, so ist für der Null unendlich nahe kommende Δx

$$\psi(\xi - \varrho\Delta x) \gtrless 0, \quad \psi(\xi' + \theta\Delta x) \lessgtr 0;$$

folglich offenbar mit Beziehung der obern und untern Zeichen auf einander

$$\frac{\varphi(\xi - \varrho\Delta x)}{\psi(\xi - \varrho\Delta x)} \gtrless 0, \quad \frac{\varphi(\xi' + \theta\Delta x)}{\psi(\xi' + \theta\Delta x)} \lessgtr 0;$$

d. i. nach dem Obigen

$$f''(\xi - \varrho\Delta x) \gtrless 0, \quad f''(\xi' + \theta\Delta x) \lessgtr 0;$$

also

$$y' \gtrless y'', \quad Y' \lessgtr Y''.$$

Ueberlegt man nun, dass, wenn i sich der Null nähert, die Punkte ξv und $\xi' v'$ einander und dem Punkte xy immer näher rücken, und auch die durch die Punkte ξv und $\xi' v'$ an die Curve gezogenen Tangenten immer genauer mit einander und der durch den Punkt xy an die Curve gezogenen Tangente zusammenfallen, und, wenn man nur i klein genug nimmt, mit jedem beliebigen Grade der Genauigkeit mit der durch den Punkt xy an die Curve gezogenen Tangente zusammenfallend gemacht werden können; so wird man sich mittelst des Vorhergehenden auf der Stelle überzeugen, dass der Punkt xy ein Wendungspunkt ist. Hieraus ergiebt sich der folgende Satz:

Wenn $f(x)$ und $f'(x)$ in der Nähe von x stetig sind; wenn ferner

$$f''(x) = \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \pm\infty,$$

aber in der Nähe von $x \mp i$, wo i eine unendlich kleine positive Grösse bezeichnet, stetig ist, und die Function $\psi(x)$, wenn man $x - i$ und $x + i$ für x setzt, entgegengesetzte Vorzeichen erhält; so ist der Punkt xy ein Wendungspunkt.

§. 212.

Um also die Wendungspunkte einer Curve, deren Gleichung $y = f(x)$ ist, aufzufinden, wird man die reellen Wurzeln der Gleichungen

$$f''(x)=0,\quad f''(x)=\pm\infty$$

aufsuchen, wofern nämlich diese Gleichungen überhaupt reelle Wurzeln haben. Ist nun a eine reelle Wurzel einer dieser beiden Gleichungen; so wird man ferner untersuchen, ob die Functionen $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$, $f'''(x)$, jenachdem a eine reelle Wurzel der ersten oder der zweiten der beiden obigen Gleichungen ist, für $x=a$ auch den sämmtlichen in §. 210. und §. 211. ausgesprochenen Bedingungen genügen. Nur nachdem man sich hiervon vollständig versichert hat, wird man sicher schliessen können, dass der, der Abscisse $x=a$ entsprechende Punkt der gegebenen Curve ein Wendungspunkt ist.

Für die Curve, deren Gleichung

$$y=f(x)=\frac{ax^2}{a^2+x^2}$$

ist, ist

$$f'(x)=\frac{2a^3x}{(a^2+x^2)^2},\quad f''(x)=\frac{2a^5-6a^3x^2}{(a^2+x^2)^3}.$$

Die Gleichung $f''(x)=\pm\infty$ giebt die Gleichung $a^2+x^2=0$, welche offenbar keine reelle Wurzel hat. Die Gleichung $f''(x)=0$ giebt die Gleichung

$$2a^5-6a^3x^2=0,\quad a^2-3x^2=0,$$

welche die beiden reellen Wurzeln $x=\pm\frac{a}{\sqrt{3}}$ hat. Für beide Werthe von x genügen $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$, wie sogleich erhellet, den in §. 210. ausgesprochenen Bedingungen vollständig, und die den Abscissen $\pm\frac{a}{\sqrt{3}}$ entsprechenden beiden Punkte der gegebenen Curve sind also Wendungspunkte, weil der dritte Differentialquotient für die in Rede stehenden Werthe von x nicht verschwindet, wie man findet, wenn man denselben entwickelt.

§. 213.

Wir nehmen jetzt wieder an, dass $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$ in der Nähe von x stetig sind, so dass diese Grössen nicht bloss selbst endliche reelle völlig bestimmte Werthe haben, sondern auch endliche reelle völlig bestimmte Werthe behalten, wenn man x um eine unendlich kleine positive Grösse zu- oder abnehmen lässt, und wollen nun unter der Voraussetzung, dass $f''(x)$ nicht $=0$ ist, Regeln aufzufinden suchen, mittelst welcher man beurtheilen kann, nach welcher Seite hin die Curve in dem Punkte xy concav und convex ist.

Zu dem Ende denken wir uns durch den Punkt xy wieder eine Tangente, deren Gleichung

$$u-f(x)=f'(x).(z-x)$$

ist, an die Curve gezogen.

Die den Abscissen $x - \Delta x$ und $x + \Delta x$ entsprechenden Ordinaten der Curve seyen y' und Y'; die denselben Abscissen entsprechenden Ordinaten der Tangente seyen y'' und Y''; so ist

$$y'' = f(x) - f'(x).\Delta x, \quad Y'' = f(x) + f'(x).\Delta x,$$

und ganz wie in §. 209.

$$y' = y'' + \tfrac{1}{2}f''(x - \varrho\Delta x).\Delta x^2,$$
$$Y' = Y'' + \tfrac{1}{2}f''(x + \theta\Delta x).\Delta x^2.$$

Wir unterscheiden nun zwei Hauptfälle, jenachdem $f(x) \gtrless 0$ oder $f(x) = 0$ ist.

Sey also

$$\text{I. } f(x) \gtrless 0.$$

In diesem ersten Hauptfalle sind, weil nach der Voraussetzung $f''(x)$ nicht $= 0$ ist, wieder vier besondere Fälle zu unterscheiden, die wir nach der Reihe durchgehen wollen.

$$1. \quad f(x) > 0, \quad f''(x) > 0.$$

Weil $f''(x) > 0$ ist, so ist für der Null unendlich nahe kommende Δx auch

$$f''(x - \varrho\Delta x) > 0, \quad f''(x + \theta\Delta x) > 0,$$

und folglich

$$y' > y'', \quad Y' > Y''.$$

Diesem Falle entspricht *Fig.* 8, und man sieht also, dass in demselben die Curve in dem Punkte xy gegen die Abscissenaxe convex ist.

$$2. \quad f(x) > 0, \quad f''(x) < 0.$$

Weil $f''(x) < 0$ ist, so ist für der Null unendlich nahe kommende Δx auch

$$f''(x - \varrho\Delta x) < 0, \quad f''(x + \theta\Delta x) < 0,$$

und folglich

$$y' < y'', \quad Y' < Y''.$$

Diesem Falle entspricht *Fig.* 9, und man sieht also, dass in demselben die Curve in dem Punkte xy gegen die Abscissenaxe concav ist.

$$3. \quad f(x) < 0, \quad f''(x) > 0.$$

Weil $f''(x) > 0$ ist, so ist für der Null unendlich nahe kommende Δx auch

$$f''(x - \varrho\Delta x) > 0, \quad f''(x + \theta\Delta x) > 0,$$

und folglich

$$y' > y'', \quad Y' > Y''.$$

Diesem Falle entspricht *Fig.* 10, und man sieht also, dass in demselben die Curve in dem Punkte xy gegen die Acscissenaxe concav ist.

$$4. \quad f(x) < 0, \quad f''(x) < 0.$$

Weil $f''(x) < 0$ ist, so ist für der Null unendlich nahe kommende Δx auch

$$f''(x-\varrho\Delta x) < 0, \quad f''(x+\theta\Delta x) < 0,$$

und folglich

$$y' < y'', \quad Y' < Y'.$$

Diesem Falle entspricht *Fig.* 11., und man sieht also, dass in demselben die Curve in dem Punkte xy gegen die Abscissenaxe convex ist.

Fasst man das Vorhergehende zusammen; so ergiebt sich folgender Lehrsatz:

Wenn $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$ in der Nähe von x stetig sind, und weder $f(x)$, noch $f''(x) = 0$ ist; so ist die Curve in dem Punkte xy gegen die Absissenaxe jederzeit concav oder convex, jenachdem $f(x)$ und $f''(x)$ ungleiche oder gleiche Vorzeichen haben.

II. $f(x) = 0$.

In diesem Falle ist

$$y' = -f'(x).\Delta x, \quad Y'' = +f'(x).\Delta x,$$

und wir haben jetzt wieder zunächst zwei Fälle zu unterscheiden, jenachdem $f'(x) \gtrless 0$ oder $f'(x) = 0$ ist.

Sey also

$$a.f'(x) \gtrless 0.$$

Im Allgemeinen bemerken wir zuvörderst, dass in den Figuren, welche wir in diesem Falle zur Veranschaulichung der analytischen Betrachtungen zeichnen werden, die positiven Abscissen immer als von der linken nach der rechten Seite hin, die positiven Ordinaten als von unten nach oben hin genommen gedacht werden müssen, und unterscheiden nun wieder die folgenden vier Fälle.

1. $f'(x) > 0, \quad f''(x) > 0.$

Weil $f''(x) > 0$ ist, so ist für der Null unendlich nahe kommende Δx auch

$$f''(x-\varrho\Delta x) > 0, \quad f''(x+\theta\Delta x) > 0,$$

und folglich

$$y' > y'', \quad Y' > Y''.$$

Weil nun ferner $f'(x) > 0$ und

$$y' = -f'(x).\Delta x, \quad Y'' = +f'(x).\Delta x$$

ist; so entspricht diesem Falle Falle offenbar *Fig.* 12, und man sieht also, dass in demselben die Curve in dem Punkte xy nach der Seite der positiven Abscissen hin convex ist.

2. $f'(x) > 0, \quad f''(x) < 0.$

Weil $f''(x) < 0$ ist, so ist für der Null unendlich nahe kommende Δx auch

$$f''(x-\varrho\Delta x) < 0, \quad f''(x+\theta\Delta x) < 0,$$

und folglich

$$y' < y'', \quad Y' < Y''.$$

Weil nun ferner $f'(x) > 0$ und

$$y'' = -f'(x).\Delta x, \quad Y'' = +f'(x).\Delta x$$

ist; so entspricht diesem Falle offenbar *Fig.* 13, und man sieht also, dass in demselben die Curve in dem Punkte xy nach der Seite der positiven Abscissen hin concav ist.

3. $f'(x) < 0, \; f''(x) > 0.$

Weil $f''(x) > 0$ ist, so ist für der Null unendlich nahe kommende Δx auch

$$f''(x-\varrho\Delta x) > 0, \quad f''(x+\theta\Delta x) > 0,$$

und folglich

$$y' > y'', \quad Y' > Y''.$$

Weil nun ferner $f'(x) < 0$ und

$$y'' = -f'(x).\Delta x, \quad Y'' = +f'(x).\Delta x$$

ist; so entspricht diesem Falle offenbar *Fig.* 14, und man sieht also, dass in demselben die Curve in dem Punkte xy nach der Seite der positiven Abscissen hin concav ist.

4. $f'(x) < 0, \; f''(x) < 0.$

Weil $f''(x) < 0$ ist, so ist für der Null unendlich nahe kommende Δx auch

$$f''(x-\varrho\Delta x) < 0, \quad f''(x+\theta\Delta x) < 0,$$

und folglich

$$y' < y'', \quad Y' < Y''.$$

Weil nun ferner $f'(x) < 0$ und

$$y'' = -f'(x).\Delta x, \quad Y'' = +f'(x).\Delta x$$

ist; so entspricht diesem Falle offenbar *Fig.* 15, und man sieht also, dass in demselben die Curve in dem Punkte xy nach der Seite der positiven Abscissen hin convex ist.

Fasst man nun das Vorhergehende zusammen; so ergiebt sich folgender Lehrsatz:

Wenn $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$ in der Nähe von x stetig sind, und $f(x) = 0$, aber weder $f'(x)$, noch $f''(x) = 0$ ist; so ist die Curve in dem Punkt xy nach der Seite der positiven Abscissen hin concav oder convex, jenachdem $f'(x)$ und $f''(x)$ ungleiche oder gleiche Vorzeichen haben.

b. $f'(x) = 0.$

Ueberlegt man, dass in diesem Falle die Gleichung der durch den Punkt xy an die Curve gezogenen Tangente $u = 0$ ist, so dass also diese Tangente die Abscissenaxe ist; so wird man sich, wenn man hierzu noch nimmt, dass jetzt

$$y' = \tfrac{1}{2}f''(x - \varrho\Delta x).\Delta x^2,\quad Y' = \tfrac{1}{2}f''(x + \theta\Delta x).\Delta x^2$$

ist, sehr leicht von der Richtigkeit des folgenden Satzes überzeugen:

Wenn $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$ stetig sind, und sowohl $f(x)$, als auch $f'(x) = 0$, aber $f''(x)$ nicht $= 0$ ist; so ist die Curve in dem Punkte xy nach der Seite der positiven Ordinaten hin concav oder convex, jenachdem $f''(x)$ positiv oder negativ ist.

§. 214.

I. Wir wollen jetzt die Curve, deren Gleichung

$$y = f(x) = x + \sqrt{(x-a)^3}$$

ist, wo a eine positive Grösse bezeichnen soll, etwas näher betrachten.

Jeder Abscisse, welche grösser als a ist, entsprechen, weil die Quadratwurzel positiv und negativ genommen werden kann, zwei reelle Ordinaten. Für $x = a$ werden diese beiden Ordinaten $= a$, und fallen daher in eine zusammen. Für alle Abscissen, die kleiner als a sind, sind die Ordinaten imaginär.

Hieraus sieht man, dass unsere Curve aus zwei in dem, durch die Coordinaten $x = a$, $y = a$ bestimmten Punkte, welchen wir der Kürze wegen durch P bezeichnen wollen, zusammenstossenden, ganz auf einer Seite dieses Punktes liegenden Zweigen besteht.

Durch Differentiation findet man

$$f'(x) = 1 + \tfrac{3}{2}\sqrt{x-a},$$

und schliesst hieraus leicht, dass die beiden Zweige unserer Curve in dem Punkte P eine gemeinschaftliche Tangente haben, deren Gleichung $u - a = z - a$ oder $u = z$ ist, und die also offenbar durch den Anfang der Coordinaten geht, und gegen die Abscissenaxe unter einem Winkel von 45° geneigt ist, wenn nämlich die Coordinaten rechtwinklige sind.

Durch fernere Differentiation ergiebt sich

$$f''(x) = \frac{3}{4\sqrt{x-a}}.$$

Bezeichnet also i eine unendlich kleine positive Grösse; so ist

$$f''(a+i) = \frac{3}{4\sqrt{i}},$$

und der dem einen Zweige der Curve entsprechende Werth von $f''(a+i)$ ist folglich positiv, der dem andern Zweige entsprechende Werth dagegen negativ. Also ist nach §. 213. in dem Punkte P, oder wenigstens in dessen Nähe, der eine Zweig der Curve gegen die Abscissenaxe convex, der andere dagegen ge-

gen die Abscissenaxe concav, und die Curve wird daher in der Nähe des Punktes P offenbar die in *Fig.* 16. dargestellte Gestalt haben.

Einen solchen Punkt, wie vorher der Punkt P war, in welchem zwei ganz auf einer Seite desselben liegende Zweige einer Curve, die in dem Punkte P eine gemeinschaftliche Tangente haben und in der Nähe des Punktes P ihre convexen Seiten gegen einander kehren, zusammenstossen, nennt man eine Spitze oder einen Rückkehrpunkt der ersten Art.

II. Wir wollen ferner auch die Curve, deren Gleichung

$$y = f(x) = x^2 + \sqrt{(x-a)^5}$$

ist, etwas näher betrachten.

Auch diese Curve besteht, wie sogleich erhellet, aus zwei in dem durch die Coordinaten $x = a$, $y = a^2$ bestimmten Punkte, welcher im Folgenden der Kürze wegen durch Q bezeichnet werden mag, zusammenstossenden, ganz auf einer Seite des Punktes Q liegenden Zweigen.

Durch Differentiation ergiebt sich

$$f'(x) = 2x + \tfrac{5}{2}\sqrt{(x-a)^3},$$

und man sieht also, dass die beiden Zweige der Curve in dem Punkte Q eine gemeinschaftliche Tangente haben, deren Gleichung

$$u = a\,(2z - a)$$

ist.

Durch fernere Differentiation erhält man

$$f''(x) = 2 + \tfrac{15}{4}\sqrt{x-a},$$

und folglich, wenn i eine unendlich kleine positive Grösse bezeichnet,

$$f''(a+i) = 2 + \tfrac{15}{4}\sqrt{i},$$

so dass also $f''(a+i)$ für beide Zweige der Curve positiv ist, und daher, weil die Ordinate des Punktes Q auch positiv, nämlich $= a^2$ ist, nach §. 213. in der Nähe des Punktes Q beide Zweige der Curve gegen die Abscissenaxe convex sind, woraus sich also ergiebt, dass die Curve in der Nähe des Punktes Q die in *Fig.* 17. dargestellte Gestalt hat.

Einen solchen Punkt, wie vorher der Punkt Q war, in welchem zwei ganz auf einer Seite desselben liegende Zweige einer Curve, die in dem Punkte Q eine gemeinschaftliche Tangente haben und beide nach derselben Seite hin concav und convex sind, zusammenstossen, nennt man eine Spitze oder einen Rückkehrpunkt der zweiten Art.

§. 215.

Lehrsatz. xy soll ein beliebiger, aber bestimmter Punkt einer durch die Gleichung $y = f(x)$ zwi-

schen rechtwinkligen Coordinaten characterisirten Curve, und die Grössen $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$ sollen in der Nähe von x stetig seyn, so dass diese Grössen nicht bloss selbst endliche reelle völlig bestimmte Werthe haben, sondern auch endliche reelle völlig bestimmte Werthe behalten, wenn man x um eine unendlich kleine positive Grösse zu- oder abnehmen lässt; auch soll $f''(x)$ nicht $= 0$ seyn. Unter diesen Voraussetzungen kann man behaupten, dass der dem Punkte xy entsprechende Krümmungskreis der in Rede stehenden Curve immer auf der concaven Seite dieser Curve liegt.

Beweis. Wir unterscheiden bei dem Beweise dieses Satzes wie in §. 213. wieder die folgenden Fälle.

$$\text{I. } f(x) \gtrless 0.$$

Bezeichnen α, β die Coordinaten des Mittelpunkts des Krümmungskreises; so ist nach §. 201. 11.

$$\alpha = x - \frac{1 + \{f'(x)\}^2}{f''(x)} f'(x), \quad \beta = y + \frac{1 + \{f'(x)\}^2}{f''(x)},$$

und wir haben nun ferner die folgenden Fälle zu unterscheiden.

$$1. \; f(x) > 0, \; f''(x) > 0.$$

Nach §. 213. entspricht diesem Falle *Fig.* 18. Nach der obigen Formel für β ist aber $\beta > y$. Also liegt in diesem Falle der Krümmungskreis in dem Punkte xy offenbar auf der concaven Seite der Curve.

$$2. \; f(x) > 0, \; f''(x) < 0.$$

Nach §. 213. entspricht diesem Falle *Fig.* 19. Nach der obigen Formel für β ist aber $\beta < y$. Also liegt in diesem Falle der Krümmungskreis in dem Punkte xy wieder offenbar auf der concaven Seite der Curve.

$$3. \; f(x) < 0, \; f''(x) > 0.$$

Nach §. 213. entspricht diesem Falle *Fig.* 20. Nach der obigen Formel für β ist aber $\beta > y$. Also liegt in diesem Falle der Krümmungskreis in dem Punkte xy wieder auf der concaven Seite der Curve, wovon man sich auf der Stelle überzeugen wird, wenn man nur überlegt, dass $y = f(x)$ in diesem Falle negativ ist.

$$4. \; f(x) < 0, \; f''(x) < 0.$$

Nach §. 213. entspricht diesem Falle *Fig.* 21. Nach der obigen Formel für β ist aber $\beta < y$. Also liegt in diesem Falle, wo $y = f(x)$ negativ ist, der Krümmungskreis in dem Punkte xy wieder offenbar auf der concaven Seite der Curve.

In jeder der Figuren, auf welche wir uns vorher bezogen haben, ist absichtlich auch die Normale des Punktes xy oder P

gezeichnet worden, weil die Deutlichkeit des Beweises sehr erhöhet wird, wenn man sich erinnert, dass nach §. 202. der Mittelpunkt des dem Punkte xy entsprechenden Krümmungskreises jederzeit auf der durch den Punkt xy gezogenen Normale der Curve liegt.

II. $f(x) = 0$.

In diesem Falle sind wieder die beiden folgenden besondern Fälle zu unterscheiden.

a. $f'(x) \gtrless 0$.

Weil $y = f(x) = 0$ ist; so ist in diesem Falle

$$\alpha = x - \frac{1+\{f'(x)\}^2}{f''(x)} f'(x), \quad \beta = \frac{1+\{f'(x)\}^2}{f''(x)}.$$

Sey nun ferner

1. $f'(x) > 0, \; f''(x) > 0$.

Nach §. 213. entspricht diesem Falle, wenn immer die positiven Abscissen von der linken nach der rechten Seite hin, die positiven Ordinaten von unten nach oben hin genommen werden, *Fig.* 22. Nach den obigen Formeln für α und β ist aber $\alpha < x$, $\beta > 0$. Also liegt der Krümmungskreis in diesem Falle offenbar auf der concaven Seite der Curve.

2. $f'(x) > 0, \; f''(x) < 0$.

Nach §. 213. entspricht diesem Falle *Fig.* 23. Nach den obigen Formeln für α und β ist $\alpha > x$, $\beta < 0$. Folglich liegt der Krümmungskreis in diesem Falle wieder offenbar auf der concaven Seite der Curve.

3. $f'(x) < 0, \; f''(x) > 0$.

Nach §. 213. entspricht diesem Falle *Fig.* 24. Ferner ist $\alpha > x$, $\beta > 0$. Also liegt der Krümmungskreis offenbar wieder auf der concaven Seite der Curve.

4. $f'(x) < 0, \; f''(x) < 0$.

Nach §. 213. entspricht diesem Falle *Fig.* 25. Ferner ist $\alpha < x$, $\beta < 0$. Also liegt der Krümmungskreis offenbar wieder auf der concaven Seite der Curve.

b. $f'(x) = 0$.

In diesem Falle ist

$$\alpha = x, \quad \beta = \frac{1}{f''(x)}.$$

Sey nun ferner

1. $f''(x) > 0$.

Nach §. 213. entspricht diesem Falle *Fig.* 26. Ferner ist $\alpha = x$, $\beta > 0$. Also liegt der Krümmungskreis offenbar auf der concaven Seite der Curve.

2. $f''(x) < 0$.

Nach §. 213. entspricht diesem Falle *Fig.* 27. Ferner ist $\alpha = x$, $\beta < 0$. Also liegt der Krümmungskreis auf der concaven Seite der Curve.

Man sieht also, dass der Krümmungskreis in allen Fällen auf der concaven Seite der Curve liegt, so dass durch das Vorhergehende unser Satz vollständig bewiesen ist.

§. 216.

Durch den im vorigen Paragraphen bewiesenen Satz wird die Bestimmung des einem gewissen Punkte xy einer Curve entsprechenden Krümmungskreises erleichtert. Man braucht nämlich bloss die Grösse des Krümmungshalbmessers zu berechnen, die Normale des Punktes xy zu ziehen, und auf derselben von dem Punkte xy an auf der concaven Seite der Curve ein dem Krümmungshalbmesser gleiches Stück abzuschneiden; so ist der Endpunkt dieses Stücks der Mittelpunkt des Krümmungskreises, der sich nun leicht beschreiben lässt.

Die Formel für den Krümmungshalbmesser des Punktes xy ist nach §. 201.

$$\varrho = \pm \frac{\left\{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2\right\}^{\frac{3}{2}}}{\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}},$$

und man muss in dieser Formel, weil der Krümmungshalbmesser seiner Natur nach nur positiv seyn kann, das obere oder untere Zeichen nehmen, jenachdem der zweite Differentialquotient positiv oder negativ ist. Oefters, namentlich in älteren Schriften, findet man indess für dem Krümmungshalbmesser die Formel

$$\varrho = - \frac{\left\{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2\right\}^{\frac{3}{2}}}{\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}}.$$

Der Grund dieser übrigens, wie es uns scheint, durchaus nicht der Natur der Sache gemässen Einrichtung der Formel für den Krümmungshalbmesser ist folgender.

Wenn y positiv und $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ negativ ist; so ist nach §. 213. die Curve in dem Punkte xy gegen die Abscissenaxe concav. Damit nun für solche Punkte, deren Ordinate positiv, und in denen die Curve gegen die Abscissenaxe concav ist, der Krümmungshalbmesser positiv werde, hat man der Formel für denselben die obige Gestalt gegeben. Seiner Natur nach ist aber, wie schon mehrmals erinnert worden ist, der Krümmungshalbmesser immer positiv, oder es kommt überhaupt in allen Fällen bloss auf den absoluten Werth desselben an, und wir haben diese Bemerkung hier auch bloss deshalb eingeschaltet, weil sich

die Formel für den Krümmungshalbmesser, wie schon erwähnt worden ist, in vielen ältern wichtigen Schriften unter der in Rede stehenden Gestalt findet.

Aus §. 210. und §. 211., und aus der Formel für den Krümmungshalbmesser erhellet, dass in einem Wendungspunkte der Krümmungshalbmesser unendlich oder null ist.

D. Evolution oder Abwickelung der Curven.

§. 217.

Um die convexe Seite der Curve AB (*Fig.* 28.) denke man sich einen völlig biegsamen Faden gelegt, und in B nach der durch diesen Punkt gehenden Tangente der Curve ausgespannt. Wird nun dieser Faden, indem man ihn immer gespannt erhält, nach und nach von der Curve AB abgewickelt; so wird sein Endpunkt C eine Curve CD beschreiben, welche man die durch Abwickelung der Curve AB Erzeugte oder die *Evolvente* von AB nennt. Umgekehrt heisst AB die *Evolute* von CD, d. i. die Curve, durch deren Abwickelung die Curve CD entsteht.

§. 218.

Die Evolute wird von der Richtung des Fadens stets berührt. Ist nun P ein beliebiger Punkt der Evolute und PP' die Richtung des Fadens in diesem Punkte, P' der Endpunkt des Fadens, also P' ein Punkt der Evolvente; so sollen P und P' zusammengehörende oder einander entsprechende Punkte der Evolute und Evolvente genannt werden.

Dass immer $PP' = BC + BP$, d. i., wenn wir die constante Linie $BC = a$, den Bogen $BP = s$ setzen, $PP' = a + s$ ist, folgt aus der Natur der Evolution von selbst.

Der allgemeinen Theorie der Evolution muss zuerst die folgende Betrachtung vorausgeschickt werden.

§. 219.

Es sey xy ein beliebiger Punkt einer durch die Gleichung $y = f(x)$ zwischen rechtwinkligen Coordinaten characterisirten Curve.

Denkt man sich nun einen beliebigen, aber bestimmten Punkt dieser Curve als Anfangspunkt aller Bogen derselben, und bezeichnet den bei diesem gemeinschaftlichen Anfangspunkte anfangenden, bei dem Punkte xy sich endigenden, immer als positiv zu betrachtenden Bogen durch s; so ist kein Zweifel, dass s eine Function der Abscisse x ist, und man wird nun offenbar auch nach dem Differential oder dem Differentialquotienten dieses als Function von x betrachteten Bogens in Bezug auf x als unabhängige veränderliche Grösse fragen können.

Um für das Differential des Bogens s einen allgemeinen Ausdruck zu finden, lasse man x sich um Δx verändern; so wird sich y um Δy, s um Δs verändern. Die Sehne der gegebenen Curve, welche die Endpunkte der Ordinaten y und $y+\Delta y$ mit einander verbindet, sey σ; so ist nach Principien der analytischen Geometrie

$$\sigma^2 = (x+\Delta x - x)^2 + (y+\Delta y - y)^2,$$

d. i.

$$\sigma^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2$$

oder

$$\left(\frac{\sigma}{\Delta x}\right)^2 = 1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2.$$

Nach §. 110. II. ist aber, wenn ϱ einen positiven echten Bruch bezeichnet,

$$\Delta y = f'(x).\Delta x + \tfrac{1}{2}f''(x+\varrho\Delta x).\Delta x^2$$

oder

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \tfrac{1}{2}f''(x+\varrho\Delta x).\Delta x;$$

folglich

$$\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2 = \{f'(x)\}^2 + f'(x).f''(x+\varrho\Delta x).\Delta x + \tfrac{1}{4}\{f''(x+\varrho\Delta x)\}^2.\Delta x^2;$$

also nach dem Obigen

$$\left(\frac{\sigma}{\Delta x}\right)^2 = 1 + \{f'(x)\}^2 + f'(x).f''(x+\varrho\Delta x).\Delta x + \tfrac{1}{4}\{f''(x+\varrho\Delta x)\}^2.\Delta x^2,$$

wobei wir annehmen, dass $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$ in der Nähe von x stetig sind.

Weil nun $f''(x+\varrho\Delta x)$ sich, wenn Δx sich der Null nähert, immer mehr und mehr und bis zu jedem beliebigen Grade der Grösse $f''(x)$ nähert; so nähert sich offenbar $\left(\frac{\sigma}{\Delta x}\right)^2$, wenn Δx sich der Null nähert, immer mehr und mehr und bis zu jedem beliebigen Grade der Grösse $1 + \{f'(x)\}^2$, und es ist also

$$Lim\left\{\left(\frac{\sigma}{\Delta x}\right)^2\right\} = 1 + \{f'(x)\}^2.$$

Da nun aber, wenn Δx sich der Null nähert, σ und der absolute Werth von Δs sich immer mehr und mehr und bis jedem beliebigen Grade nähern; so muss sich natürlich $\left(\frac{\Delta s}{\Delta x}\right)^2$, wenn Δx sich der Null nähert, derselben Gränze wie $\left(\frac{\sigma}{\Delta x}\right)^2$ nähern, und es ist also

$$Lim\left\{\left(\frac{\Delta s}{\Delta x}\right)^2\right\} = 1 + \{f'(x)\}^2.$$

Weil nun aber nach dem allgemeinen Begriffe des Differentialquotienten

$$Lim\frac{\Delta s}{\Delta x}=\frac{\partial s}{\partial x},$$

und folglich offenbar

$$Lim\left\{\left(\frac{\Delta s}{\Delta x}\right)^2\right\}=\left(\frac{\partial s}{\partial x}\right)^2$$

ist; so ist

$$\left(\frac{\partial s}{\partial x}\right)^2=1+\{f'(x)\}^2,$$

oder

$$\left(\frac{\partial s}{\partial x}\right)^2=1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2,$$

oder

$$\partial s^2=\partial x^2+\partial y^2.$$

Weitere Betrachtungen über diese wichtige Gleichung gehören jetzt nicht hierher; wir werden aber späterhin (in der Integralrechnung) auf dieselbe zurückkommen.

§. 220.

Die ganze Theorie der Evolution kommt auf einige Hauptgleichungen zurück, welche wir jetzt entwickeln wollen.

Die Coordinaten zweier zusammengehörenden Punkte P und P' der Evolute und Evolvente, welche wir jetzt immer rechtwinklig annehmen, seyen x, y und x', y'. Die Linie PP' sey $=\theta$, die constante Linie BC sey $=a$, der Bogen BP sey $=s$, wobei es kaum noch einer besondern Erwähnung bedarf, dass a, θ, s stets positive Grössen sind.

Die Gleichung der Linie PP', welche die Evolute in dem Punkte xy berührt, ist nach §. 181.

$$1.\quad u-y=\frac{\partial y}{\partial x}(z-x).$$

Hieraus ergiebt sich, weil die Linie PP' durch den Punkt $x'y'$ geht, ferner unmittelbar die Gleichung

$$2.\quad y'-y=\frac{\partial y}{\partial x}(x'-x).$$

Nach §. 218. ist

$$3.\quad \theta=a+s,\quad \partial\theta=\partial s,$$

und folglich nach §. 219.

$$4.\quad \partial\theta^2=\partial x^2+\partial y^2;$$

also

$$5.\quad \left(\frac{\partial\theta}{\partial x}\right)^2=1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2,\quad \left(\frac{\partial\theta}{\partial y}\right)^2=1+\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2.$$

Nach Principien der analytischen Geometrie ist nun, weil xy und $x'y'$ die Endpunkte der Linie θ sind,

$$6.\quad (x'-x)^2 + (y'-y)^2 = \theta^2.$$

Folglich ist nach 2.

$$7.\quad \begin{cases} (x'-x)^2\left\{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2\right\} = \theta^2, \\ (y'-y)^2\left\{1+\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2\right\} = \theta^2; \end{cases}$$

d. i. nach 5.

$$8.\quad (x'-x)^2\left(\frac{\partial \theta}{\partial x}\right)^2 = \theta^2,\quad (y'-y)^2\left(\frac{\partial \theta}{\partial y}\right)^2 = \theta^2;$$

oder

$$9.\quad (x'-x)^2 = \left(\frac{\theta \partial x}{\partial \theta}\right)^2,\quad (y'-y)^2 = \left(\frac{\theta \partial y}{\partial \theta}\right)^2.$$

Weil aber nach 2.

$$\frac{y'-y}{x'-x} = \frac{\partial y}{\partial x}$$

ist; so ist mit Beziehung der obern und untern Zeichen auf einander

$$10.\quad x'-x = \pm\frac{\theta \partial x}{\partial \theta},\quad y'-y = \pm\frac{\theta \partial y}{\partial \theta},$$

wo sich nun noch fragt, ob in diesen Gleichungen die obern oder untern Zeichen zu nehmen sind.

Diese Frage lässt sich auf folgende Art beantworten.

Man denke sich durch den Punkt P als Anfangspunkt zwei den primitiven parallele neue Coordinatenaxen gelegt; so ist nach den bekannten allgemeinen Formeln der Coordinatenverwandlung $x'-x$ die Abscisse des Punktes P' in Bezug auf dieses neue Coordinatensystem.

Bezeichnet nun φ den von der Linie θ mit dem positiven Theile der neuen Abscissenaxe eingeschlossenen Winkel, indem man diesen Winkel von dem positiven Theile der neuen Abscissenaxe an nach dem positiven Theile der neuen Ordinatenaxe hin von 0 bis 360° zählt; so ist offenbar

$$11.\quad x'-x = \theta \cos\varphi.$$

Bezeichnen wir ferner den Winkel, welchen das der Null unendlich nahe kommende Differential ∂s des Bogens s mit dem positiven Theile der neuen Abscissenaxe einschliesst, indem dieser Winkel wieder von dem positiven Theile der neuen Abscissenaxe an nach dem positiven Theile der neuen Ordinatenaxe hin von 0 bis 360° gezählt wird, durch ψ, den absoluten Werth des Differentials ∂s aber durch σ; so ist offenbar

$$12.\quad \partial x = \sigma \cos\psi.$$

Ist nun zuerst ∂s negativ; so ist, wie aus der Natur der Evolution unmittelbar folgt, $\psi = \varphi$ und also $\cos\psi = \cos\varphi$. Weil aber in diesem Falle $\sigma = -\partial s$ ist; so ist nach 12.

$$\partial x = -\cos\varphi . \partial s.$$

Ist ferner ∂s positiv, so ist offenbar entweder $\psi - \varphi = 180°$, oder $\varphi - \psi = 180°$; d. i. entweder $\psi = \varphi + 180°$, oder $\psi = \varphi - 180°$; also immer $\cos\psi = -\cos\varphi$. Weil nun in diesem Falle $\sigma = \partial s$ ist; so ist wieder nach 12.

$$\partial x = -\cos\varphi . \partial s.$$

Also ist allgemein

$$13.\quad \partial x = -\cos\varphi . \partial s.$$

Aus den Gleichungen 11. und 13. ergiebt sich, wenn man $\cos\varphi$ eliminirt, sehr leicht

$$x' - x = -\frac{\theta\partial x}{\partial s},$$

oder, weil $\partial s = \partial\theta$ ist,

$$x' - x = -\frac{\theta\partial x}{\partial\theta}.$$

Hieraus sieht man, dass man in den Gleichungen 10. die untern Zeichen nehmen muss, und dass also

$$14.\quad x' - x = -\frac{\theta\partial x}{\partial\theta},\ y' - y = -\frac{\theta\partial y}{\partial\theta}.$$

zu setzen ist.

Aus 6. folgt durch Differentiation

$$(x' - x)(\partial x' - \partial x) + (y' - y)(\partial y' - \partial y) = \theta\partial\theta;$$

also nach 14.

$$-(\partial x' - \partial x)\partial x - (\partial y' - \partial y)\partial y = \partial\theta^2,$$

d. i. nach 4.

$$-(\partial x' - \partial x)\partial x - (\partial y' - \partial y)\partial y = \partial x^2 + \partial y^2,$$

und folglich, wenn man aufhebt, was sich aufheben lässt;

$$15.\quad \partial x\partial x' + \partial y\partial y' = 0$$

oder

$$16.\quad \frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{\partial x'}{\partial y'}.$$

Durch Differentiation der ersten der beiden Gleichungen 14. ergiebt sich, wenn man nach x differentiirt, und also ∂x als constant betrachtet,

$$\partial x' - \partial x = \frac{\theta\partial x\,\partial^2\theta}{\partial\theta^2} - \partial x,$$

d. i.

$$17.\quad \frac{\partial x'}{\partial x} = \frac{\theta\partial^2\theta}{\partial\theta^2},\quad \frac{\partial x}{\partial x'} = \frac{\partial\theta^2}{\theta\partial^2\theta}.$$

Mittelst der hier entwickelten Formeln lassen sich nun leicht die beiden folgenden Sätze beweisen.

§. 221.

Lehrsatz. Die Linie PP' (*Fig.* 28.) ist jederzeit die Normale der Evolvente in dem Punkte P'.

Beweis. Die Gleichung der Linie PP' ist, wenn wieder x, y und x', y' die rechtwinkligen Coordinaten der Punkte P und P' sind, nach §. 220. 1.

$$u-y=\frac{\partial y}{\partial x}(z-x).$$

Weil aber diese Linie durch den Punkt $x'y'$ geht; so ist

$$y'-y=\frac{\partial y}{\partial x}(x'-x),$$

und folglich durch Subtraction der beiden vorhergehenden Gleichungen

$$u-y'=\frac{\partial y}{\partial x}(z-x').$$

Nach §. 220. 16. ist aber

$$\frac{\partial y}{\partial x}=-\frac{\partial x'}{\partial y'}.$$

Also ist

$$u-y'=-\frac{\partial x'}{\partial y'}(z-x')$$

die Gleichung der Linie PP', und diese Linie ist folglich nach §. 183. offenbar die Normale der Evolvente in dem Punkte $x'y'$ oder P', wie bewiesen werden sollte.

§. 222.

Lehrsatz. Die Linie PP' (*Fig.* 28.) ist jederzeit dem Krümmungshalbmesser der Evolvente in dem Punkte P' gleich.

Beweis. Die rechtwinkligen Coordinaten der Punkte P und P' seyen wieder x, y und x', y'; die Linie PP' sey $=\theta$; der Krümmungshalbmesser der Evolvente in dem Punkte $x'y'$ sey $=\varrho$; so ist, wenn wir der Kürze wegen

$$p=\frac{\partial y'}{\partial x'},\ p'=\frac{\partial^2 y'}{\partial x'^2}$$

setzen, nach §. 201.

$$1.\quad \varrho=\frac{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}{p'},$$

wenn wir bloss den absoluten Werth der Grösse auf der rechten *Seite* des Gleichheitszeichens berücksichtigen.

Weil nun nach §. 220. 16.

$$p = \frac{\partial y'}{\partial x'} = -\frac{\partial x}{\partial y}$$

ist; so ist

$$2. \quad 1 + p^2 = \frac{\partial x^2 + \partial y^2}{\partial y^2} = \frac{\partial \theta^2}{\partial y^2}.$$

Ferner ist

$$\partial p = -\partial\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right) = \frac{\partial x \partial^2 y}{\partial y^2}, \quad \frac{\partial p}{\partial x'} = p' = \frac{\partial x \partial^2 y}{\partial x' \partial y^2},$$

und folglich, weil nach §. 220. 17.

$$\frac{\partial x}{\partial x'} = \frac{\partial \theta^2}{\theta \partial^2 \theta}$$

ist,

$$3. \quad p' = \frac{\partial \theta^2 \partial^2 y}{\theta \partial^2 \theta \partial y^2}.$$

Also ist nach 1., 2. und 3.

$$4. \quad \varrho = \theta \frac{\partial \theta \partial^2 \theta}{\partial y \partial^2 y}.$$

Durch Differentiation der Gleichung

$$\partial \theta^2 = \partial x^2 + \partial y^2$$

ergiebt sich aber, weil ∂x constant ist,

$$5. \quad \partial \theta \partial^2 \theta = \partial y \partial^2 y.$$

Also ist nach 4.

$$\varrho = \theta,$$

wie bewiesen werden sollte.

§. 223.

Weil nach §. 202. der Mittelpunkt des Krümmungskreises einer Curve in einem gewissen Punkte derselben immer auf der durch diesen Punkt gehenden Normale der Curve, und nach §. 215. immer auf der concaven Seite der Curve liegt; so ergiebt sich aus §. 221. und §. 222. unmittelbar der folgende wichtige Satz:

Die Evolute ist jederzeit der geometrische Ort der Mittelpunkte der Krümmungskreise aller Punkte der Evolvente.

Mit Hülfe dieses Satzes lässt sich die folgende Aufgabe auflösen.

§. 224.

Aufgabe. Aus der Gleichung der Evolvente die Gleichung der Evolute zu finden.

Auflösung. Die Gleichung der Evolvente zwischen rechtwinkligen Coordinaten, welche als gegeben angesehen wird, sey

$$1.\quad \varphi(x',y') = 0.$$

Ist nun xy der dem Punkte $x'y'$ der Evolvente entsprechende Punkt der Evolute; so ist nach §. 201., weil nach §. 223. die Evolute der geometrische Ort der Mittelpunkte der Krümmungskreise der Evolvente ist,

$$2.\quad x = x' - \frac{\left\{1+\left(\frac{\partial y'}{\partial x'}\right)^2\right\}\frac{\partial y'}{\partial x'}}{\frac{\partial^2 y'}{\partial x'^2}},\quad y = y' + \frac{1+\left(\frac{\partial y'}{\partial x'}\right)^2}{\frac{\partial^2 y'}{\partial x'^2}}.$$

Eliminirt man aus diesen beiden Gleichungen und der Gleichung 1. die Grössen x', y'; so erhält man eine Gleichung zwischen x und y, welche die gesuchte Gleichung der Evolute ist.

§. 225.

Wir wollen z. B. die Evolute der Cycloide zu bestimmen suchen.

Die Gleichungen der Cycloide sind nach §. 192.

$$x' = r(\varphi - \sin\varphi),\quad y' = r(1-\cos\varphi).$$

Also ist

$$\partial x' = r(1-\cos\varphi)\partial\varphi,\quad \partial y' = r\sin\varphi\,\partial\varphi;$$

folglich

$$\frac{\partial y'}{\partial x'} = \frac{\sin\varphi}{1-\cos\varphi},\quad 1+\left(\frac{\partial y'}{\partial x'}\right)^2 = \frac{2}{1-\cos\varphi}.$$

Ferner ist nach §. 207.

$$\frac{\partial^2 y'}{\partial x'^2} = -\frac{1}{4r\sin\tfrac{1}{2}\varphi^4} = -\frac{1}{r(1-\cos\varphi)^2}.$$

Folglich sind nach §. 224., wie man hieraus leicht findet, die gesuchten Gleichungen der Evolute

$$x = r(\varphi+\sin\varphi),\quad y = -r(1-\cos\varphi).$$

Ist nun in *Fig.* 29. ASB die gegebene Cycloide; so verlängere man die Axe SC über C hinaus, mache $CA' = CS = 2r$, ziehe durch A' eine Parallele mit der Basis AB, nehme diese Parallele als Axe, A' als Anfang der Abscissen an, und nehme die positiven Abscissen von A' an nach der linken Seite hin, die positiven Ordinaten in dem neuen Systeme aber wie in dem primitiven in der Richtung von unten nach oben. Bezeichnen nun x'', y'' die Coordinaten in dem neuen Systeme; so ist offenbar

$$x = r\pi - x'',\quad y = y'' - 2r,$$

und folglich sind

$$r\pi - x'' = r(\varphi+\sin\varphi),\quad y''-2r = -r(1-\cos\varphi);$$

oder

$$x'' = r(\pi - \varphi - \sin\varphi),\quad y'' = r(1 + \cos\varphi);$$

oder

$$x'' = r\{\pi - \varphi - \sin(\pi - \varphi)\},\quad y'' = r\{1 - \cos(\pi - \varphi)\};$$

oder, wenn wir $\pi - \varphi = \psi$ setzen,

$$x'' = r(\psi - \sin\psi),\quad y'' = r(1 - \cos\psi)$$

die Gleichungen der Evolute in Bezug auf das secundäre System.

Vergleicht man diese Gleichungen nun mit den gegebenen Gleichungen der Cycloide; so wird leicht erhellen, dass die Evolute der halben Cycloide AS eine ihr gleiche halbe Cycloide $A'A$ in umgekehrter Lage ist.

Die Gleichung der Evolute der Ellipse und Hyperbel ist, indem sich immer die obern Zeichen auf die Ellipse, die untern auf die Hyperbel beziehen,

$$(ax)^{\frac{2}{3}} \pm (by)^{\frac{2}{3}} = (a^2 \mp b^2)^{\frac{2}{3}},$$

oder

$$\left(\frac{x}{b}\right)^{\frac{2}{3}} \pm \left(\frac{y}{a}\right)^{\frac{2}{3}} = \left(\frac{a}{b} \mp \frac{b}{a}\right)^{\frac{2}{3}}.$$

Für die Evolute der Parabel findet man, wenn p der Parameter ist, die Gleichung

$$y^2 = \frac{16}{27} \cdot \frac{(x - \frac{1}{2}p)^3}{p},$$

oder, wenn man $x - \frac{1}{2}p = u$ setzt, die Gleichung

$$y^2 = \frac{16u^3}{27p}.$$

§. 226.

Aufgabe. Aus der Gleichung der Evolute die Gleichung der Evolvente zu finden.

Auflösung. Es ist

$$\frac{\partial x'^2 + \partial y'^2}{\partial^2 y'} = \frac{(\partial x'^2 + \partial y'^2)^{\frac{3}{2}}}{\partial x' \partial^2 y'} \cdot \frac{\partial x'}{\sqrt{\partial x'^2 + \partial y'^2}},$$

d. i. in der in §. 222. eingeführten Bezeichnung

$$\frac{\partial x'^2 + \partial y'^2}{\partial^2 y'} = \frac{(1 + p^2)^{\frac{3}{2}}}{p'} \cdot \frac{\partial x'}{\sqrt{\partial x'^2 + \partial y'^2}};$$

und folglich, weil nach §. 222.

$$\frac{(1 + p^2)^{\frac{3}{2}}}{p'} = \theta$$

ist,

$$\frac{\partial x'^2 + \partial y'^2}{\partial^2 y'} = \frac{\theta \partial x'}{\sqrt{\partial x'^2 + \partial y'^2}}.$$

Aber nach §. 220. 16.

$$\frac{\partial x'^2+\partial y'^2}{\partial x'^2}=\frac{\partial x^2+\partial y^2}{\partial y^2}.$$

Folglich

$$\frac{\partial x'}{\sqrt{\partial x'^2+\partial y'^2}}=\frac{\partial y}{\sqrt{\partial x^2+\partial y^2}},$$

und daher nach dem Vorhergehenden

$$\frac{\partial x'^2+\partial y'^2}{\partial^2 y'}=\frac{\theta\partial y}{\sqrt{\partial x^2+\partial y^2}};$$

also nach §. 220. 16.

$$\frac{\partial x'^2+\partial y'^2}{\partial^2 y'}.\frac{\partial y'}{\partial x'}=-\frac{\theta\partial y}{\sqrt{\partial x^2+\partial y^2}}.\frac{\partial x}{\partial y}=-\frac{\theta\partial x}{\sqrt{\partial x^2+\partial y^2}}.$$

Weil nun nach §. 224.

$$x'=x+\frac{\left\{1+\left(\frac{\partial y'}{\partial x'}\right)^2\right\}\frac{\partial y'}{\partial x'}}{\frac{\partial^2 y'}{\partial x'^2}},\quad y'=y-\frac{1+\left(\frac{\partial y'}{\partial x'}\right)^2}{\frac{\partial^2 y'}{\partial x'^2}},$$

oder

$$x'=x+\frac{\partial x'^2+\partial y'^2}{\partial^2 y'}.\frac{\partial y'}{\partial x'},\quad y'=y-\frac{\partial x'^2+\partial y'^2}{\partial^2 y'}$$

ist; so ist nach dem Vorhergehenden

$$x'=x-\frac{\theta\partial x}{\sqrt{\partial x^2+\partial y^2}},\quad y'=y-\frac{\theta\partial y}{\sqrt{\partial x^2+\partial y^2}};$$

oder auch, wie leicht erhellen wird,

$$x'=x-(a+s)\frac{\partial x}{\partial s},\quad y'=y-(a+s)\frac{\partial y}{\partial s}.$$

Aus diesen beiden Gleichungen und der gegebenen Gleichung der Evolute, die $\psi(x, y)=0$ seyn mag, müsste man x, y eliminiren, um die Gleichung der Evolvente zwischen x', y' zu finden.

Vierzehntes Kapitel.

Differentialformeln für ebene und sphärische Dreiecke.

§. 227.

Die zur Bestimmung eines ebenen oder sphärischen Dreiecks gemessenen Stücke sind wegen der Unvollkommenheit der bei der Messung gebrauchten Instrumente und unserer Sinne nie ganz

on Fehlern frei; daher ist es namentlich für Geodäsie und stronomie von grosser Wichtigkeit, den Einfluss beurtheilen zu önnen, welchen die Fehler in den gemessenen Stücken eines enen oder sphärischen Dreiecks auf die aus denselben nach rincipien der Trigonometrie berechneten Stücke dieses Dreiecks ısüben.

§. 228.

Wir wollen vier beliebige Stücke eines ebenen oder sphäschen Dreiecks überhaupt durch x, y, z und u bezeichnen, und ollen annehmen, dass zwischen diesen vier Stücken die Gleiıung

$$u = f(x, y, z)$$

tatt finde. Sind dann x', y', z' die durch Messung gefundenen Verthe der drei Stücke x, y, z; so ist, wenn u' den aus diesen Verthen berechneten Werth des Stücks u bezeichnet,

$$u' = f(x', y', z').$$

ezeichnen wir nun ferner die bei der Messung der Stücke , y, z begangenen Fehler respective durch Δx, Δy, Δz, den ıs denselben resultirenden Fehler des vierten berechneten Stücks ırch Δu; so ist, wenn wir Δx, Δy, Δz, Δu als positiv oder s negativ annehmen, jenachdem die Grössen x', y', z', u', össer oder kleiner als die Grössen x, y, z, u sind,

$$x' = x + \Delta x,\quad y' = y + \Delta y,\quad z' = z + \Delta z;$$
$$u' = u + \Delta u$$

ıd

$$x = x' - \Delta x,\quad y = y' - \Delta y,\quad z = z' - \Delta z,$$
$$u = u' - \Delta u;$$

lglich nach dem Obigen

$$u + \Delta u = f(x + \Delta x,\quad y + \Delta y,\quad z + \Delta z)$$

ıd

$$u' - \Delta u = f(x' - \Delta x,\quad y' - \Delta y,\quad z' - \Delta z);$$

so

$$\Delta u = f(x + \Delta x,\quad y + \Delta y,\quad z + \Delta z) - f(x, y, z)$$

ıd, wenn wir

$$-\Delta x = \Delta x',\ -\Delta y = \Delta y',\ -\Delta z = \Delta z',\ -\Delta u = \Delta u'$$

tzen,

$$\Delta u' = f(x' + \Delta x',\quad y' + \Delta y',\quad z' + \Delta z') - f(x', y', z').$$

Hieraus geht hervor, dass, wenn Δx, Δy, Δz und Δu die hler in den gemessenen und dem berechneten Stücke, übrigens , y, z, u die richtigen oder fehlerhaften Stücke des Dreiecks zeichnen, immer

$$\Delta u = f(x + \Delta x,\quad y + \Delta y,\quad z + \Delta z) - f(x, y, z)$$

ist, wenn man nur wegen der Vorzeichen der Grössen $\varDelta x$, $\varDelta y$, $\varDelta z$, $\varDelta u$ die folgende Regel beobachtet.

Wenn x, y, z, u die richtigen Stücke des Dreiecks bezeichnen, so sind die Grössen $\varDelta x$, $\varDelta y$, $\varDelta z$, $\varDelta u$ positiv oder negativ, jenachdem die fehlerhaften Stücke grösser oder kleiner als die richtigen Stücke sind; wenn dagegen x, y, z, u die fehlerhaften Stücke des Dreiecks bezeichnen, so sind die Grössen $\varDelta x$, $\varDelta y$, $\varDelta z$, $\varDelta u$ positiv oder negativ, jenachdem die fehlerhaften Stücke kleiner oder grösser als die richtigen Stücke sind. Bezeichnen also x, y, z, u die richtigen Stücke, so werden die fehlerhaften erhalten, wenn man die Grössen $\varDelta x$, $\varDelta y$, $\varDelta z$, $\varDelta u$ zu den richtigen Stücken addirt; bezeichnen dagegen x, y, z, u die fehlerhaften Stücke, so werden die richtigen Stücke erhalten, wenn man die Grössen $\varDelta x$, $\varDelta y$, $\varDelta z$, $\varDelta u$ zu den fehlerhaften addirt.

$\varDelta u$ wird nach dem Vorhergehenden in allen Fällen erhalten, wenn man, die Grössen x, y, z als von einander völlig unabhängige veränderliche Grössen betrachtend, die Differenz der Function $f(x, y, z)$ nach Principien der Differenzenrechnung entwickelt. Indess ist die Sache noch einer andern Ansicht fähig, welche wir im folgenden Paragraphen entwickeln wollen.

§. 229.

Wenn u eine Function der einen veränderlichen Grösse x ist; so ist der Differentialquotient $\frac{\partial u}{\partial x}$ bekanntlich die Gränze, welcher $\frac{\varDelta u}{\varDelta x}$ sich nähert, wenn $\varDelta x$ sich der Null nähert, und es ist folglich offenbar mit desto grösserer Genauigkeit, je näher $\varDelta x$ der Null kommt,

$$\frac{\varDelta u}{\varDelta x} = \frac{\partial u}{\partial x}$$

oder

$$\varDelta u = \frac{\partial u}{\partial x}\varDelta x = \frac{\partial u}{\partial x}\partial x,$$

d. i. $\varDelta u = \partial u$.

Wenn ferner $u = f(x, y, z, \ldots)$ eine Function der von einander unabhängigen veränderlichen Grössen x, y, z, ... ist, so ist, wenn wir

$$F(\alpha) = f(x+\alpha\partial x,\ \ y+\alpha\partial y,\ \ z+\alpha\partial z, \ldots),$$

wo ∂x, ∂y, ∂z, ..., wie immer, mit $\varDelta x$, $\varDelta y$, $\varDelta z$, ... völlig einerlei sind, setzen, nach §. 109.

$$F(\alpha) = F(0) + \alpha F'(\varrho\alpha),$$

wo ϱ einen positiven echten Bruch bezeichnet, oder

$$f(x+\alpha\partial x,\ \ y+\alpha\partial y,\ \ z+\alpha\partial z,\ldots) = f(x, y, z,\ldots) + \alpha F'(\varrho\alpha);$$

folglich ist

$$f(x+\alpha\partial x,\ \ y+\alpha\partial y,\ \ z+\alpha\partial z,\ldots) - f(x, y, z,\ldots) = \alpha F'(\varrho\alpha),$$

und für $\alpha = 1$

$$\Delta u = F'(\varrho).$$

Setzen wir der Kürze wegen

$$x + \alpha\partial x = x_1, \quad y + \alpha\partial y = y_1, \quad z + \alpha\partial z = z_1, \ldots;$$

so ist

$$F(\alpha) = f(x_1, y_1, z_1, \ldots).$$

Betrachten wir nun $x_1, y_1, z_1, \ldots$ als Functionen von α; so ist

$$\partial x_1 = \partial\alpha\partial x, \quad \partial y_1 = \partial\alpha\partial y, \quad \partial z_1 = \partial\alpha\partial z, \ldots$$

Nach §. 137. ist aber, wenn immer bloss α als unabhängige veränderliche Grösse betrachtet wird,

$$\partial F(\alpha) = \frac{\partial F(\alpha)}{\partial x_1}\partial x_1 + \frac{\partial F(\alpha)}{\partial y_1}\partial y_1 + \frac{\partial F(\alpha)}{\partial z_1}\partial z_1 + \ldots,$$

wo

$$\frac{\partial F(\alpha)}{\partial x_1}, \frac{\partial F(\alpha)}{\partial y_1}, \frac{\partial F(\alpha)}{\partial z_1}, \ldots$$

die partiellen Differentialquotienten von $F(\alpha)$ in Bezug auf x_1, y_1, z_1, ... als veränderliche Grösse sind. Also ist nach dem Obigen

$$\partial F(\alpha) = \frac{\partial F(\alpha)}{\partial x_1}\partial x\partial\alpha + \frac{\partial F(\alpha)}{\partial y_1}\partial y\partial\alpha + \frac{\partial F(\alpha)}{\partial z_1}\partial z\partial\alpha + \ldots$$

und folglich

$$\frac{\partial F(\alpha)}{\partial\alpha} = \frac{\partial F(\alpha)}{\partial x_1}\partial x + \frac{\partial F(\alpha)}{\partial y_1}\partial y + \frac{\partial F(\alpha)}{\partial z_1}\partial z + \ldots$$

oder

$$F'(\alpha) = \frac{\partial F(\alpha)}{\partial x_1}\partial x + \frac{\partial F(\alpha)}{\partial y_1}\partial y + \frac{\partial F(\alpha)}{\partial z_1}\partial z + \ldots$$

Ueberlegt man nun, dass

$$\partial u = \frac{\partial u}{\partial x}\partial x + \frac{\partial u}{\partial y}\partial y + \frac{\partial u}{\partial z}\partial z + \ldots$$

ist, und dass $F(\alpha)$ aus u entsteht, wenn man für $x, y, z, \ldots$ respective $x_1, y_1, z_1, \ldots$ setzt; so erhellet auf der Stelle, dass auch $F'(\alpha)$ aus ∂u entsteht, wenn man für $x, y, z, \ldots$ respective $x_1, y_1, z_1, \ldots$, d. i. $x+\alpha\partial x$, $y+\alpha\partial y$, $z+\alpha\partial z, \ldots$ setzt.

Folglich entsteht $F'(\varrho)$ aus ∂u, wenn man für $x, y, z, \ldots$ respective $x + \varrho\partial x$, $y + \varrho\partial y$, $z + \varrho\partial z$, ... setzt, und man sieht nun hieraus, dass $F'(\varrho)$, weil ϱ eine positiver echter Bruch ist, dem Differential ∂u desto näher kommt, je näher ∂x, ∂y, ∂z, ... der Null kommen. Also ist wegen der Gleichung $\Delta u = F'(\varrho)$ auch in diesem Falle mit desto grösserer Genauigkeit

$$\Delta u = \partial u,$$

je näher ∂x, ∂y, ∂z, . . . der Null kommen, ein Satz, welcher für alle Anwendungen der Differentialrechnung auf Gegenstände der Praxis von der grössten Wichtigkeit ist.

Da nun bei allen Messungen, welche mit guten Instrumenten und aller nur möglichen Sorgfalt von Seiten des Beobachters angestellt sind, die Fehler in den gemessenen Stücken der Null immer sehr nahe kommen werden; so wird man offenbar die Gleichung zwischen den Fehlern in den gemessenen und dem berechneten Stücke, statt durch die Differenzenrechnung, wie es eigentlich, wenn völlige Schärfe verlangt würde, erforderlich wäre, mit einem hier hinreichenden Grade der Annäherung durch die Differentialrechnung entwickeln können. Man wird also, um den Fehler des berechneten Stücks zu erhalten, nicht Δu, sondern vielmehr ∂u durch Differentiation der Function $f(x, y, z)$ entwickeln, wobei wieder x, y, z als von einander ganz unabhängige veränderliche Grössen zu betrachten sind. Diese Entwickelung, welche eine vortreffliche Uebung in der Rechnung mit partiellen Differentialen gewährt, und zugleich von grosser praktischer Wichtigkeit ist, in allen Fällen auszuführen, ist der Zweck des gegenwärtigen Kapitels.

Die richtigen oder fehlerhaften Seiten und Winkel des ebenen oder sphärischen Dreiecks werden wir nach einer aus der Trigonometrie hinreichend bekannten Bezeichnungsart im Folgenden immer respective durch a, b, c und A, B, C bezeichnen.

A. Differentialformeln für ebene Dreiecke.

§. 230.

Zunächst kommt es darauf an, die allgemeinen Fundamentalformeln der Fehlerrechnung der ebenen Trigonometrie zu finden.

Zu dem Ende differentiire man die aus der ebenen Trigonometrie bekannte Gleichung

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A.$$

Dadurch erhält man

$$a\partial a = (b - c\cos A)\partial b + (c - b\cos A)\partial c + bc\sin A\partial A,$$

oder, weil bekanntlich

$$a\cos C + c\cos A = b,$$
$$b\cos A + a\cos B = c$$

ist,

$$a\partial a = a\cos C\partial b + a\cos B\partial c + bc\sin A\partial A.$$

Differentiirt man ferner die ebenfalls aus der ebenen Trigonometrie bekannte Gleichung

$$a\sin B = b\sin A,$$

erhält man

$$\sin B\,\partial a + a\cos B\,\partial B = b\cos A\,\partial A + \sin A\,\partial b$$

er

$$\sin B\,\partial a - \sin A\,\partial b = b\cos A\,\partial A - a\cos B\,\partial B.$$

ırch gehörige Vertauschung der Buchstaben in den beiden gendenen Gleichungen erhält man nun überhaupt die folgenden eichungen:

$$1.\quad\begin{cases} a\partial a = a\cos C\,\partial b + a\cos B\,\partial c + bc\sin A\,\partial A \\ b\partial b = b\cos A\,\partial c + b\cos C\,\partial a + ac\sin B\,\partial B \\ c\partial c = c\cos B\,\partial a + c\cos A\,\partial b + ab\sin C\,\partial C \end{cases}$$

$$2.\quad\begin{cases} \sin B\,\partial a - \sin A\,\partial b = b\cos A\,\partial A - a\cos B\,\partial B \\ \sin C\,\partial b - \sin B\,\partial c = c\cos B\,\partial B - b\cos C\,\partial C \\ \sin A\,\partial c - \sin C\,\partial a = a\cos C\,\partial C - c\cos A\,\partial A. \end{cases}$$

ımmt man zu diesen Gleichungen die aus der Gleichung

$$A + B + C = \pi$$

ch unmittelbar ergebende Gleichung

$$3.\quad \partial A + \partial B + \partial C = 0;$$

hat man die Fundamentalformeln der Fehlerrechnung der enen Trigonometrie, die wir nun auf alle Fälle, welche vorımmen können, anwenden wollen.

§. 231.

Gegeben a, B, C. Gesucht A, b, c.

Aus 3. und 2. erhält man

$$4.\quad \partial A = -\partial B - \partial C,$$

$$5.\quad \partial b = \frac{\sin B\,\partial a - b\cos A\,\partial A + a\cos B\,\partial B}{\sin A},$$

$$6.\quad \partial c = \frac{\sin C\,\partial a - c\cos A\,\partial A + a\cos C\,\partial C}{\sin A}.$$

ıch diesen Formeln berechnet man zuerst ∂A, und dann ∂b ıd ∂c.

Uebrigens lassen sich die zweite und dritte Formel auch ıter der Form

$$\partial b = \frac{\sin B\,\partial a + (b\cos A + a\cos B)\,\partial B + b\cos A\,\partial C}{\sin A},$$

$$\partial c = \frac{\sin C\,\partial a + (c\cos A + a\cos C)\,\partial C + c\cos A\,\partial B}{\sin A};$$

ler, weil bekanntlich

$$b\cos A + a\cos B = c,$$

$$c\cos A + a\cos C = b$$

ist, unter der Form

$$7.\quad \partial b = \frac{\sin B\partial a + c\partial B + b\cos A\partial C}{\sin A},$$

$$8.\quad \partial c = \frac{\sin C\partial a + b\partial C + c\cos A\partial B}{\sin A}$$

darstellen.

Die Verhältnisse der Fehler ∂b, ∂c zu den Seiten b, c lassen sich auf die folgende bequeme Art darstellen.

Weil

$$\frac{\sin B}{\sin A} = \frac{b}{a},\quad \frac{\sin C}{\sin A} = \frac{c}{a}$$

ist; so ist

$$\partial b = \frac{b\partial a}{a} + \frac{c\partial B}{\sin A} + b\cot A\partial C,$$

$$\partial c = \frac{c\partial a}{a} + \frac{b\partial C}{\sin A} + c\cot A\partial B,$$

und folglich, weil

$$c = \frac{b\sin C}{\sin B},\quad b = \frac{c\sin B}{\sin C}$$

ist,

$$\frac{\partial b}{b} = \frac{\partial a}{a} + \frac{\sin C\partial B}{\sin A\sin B} + \cot A\partial C,$$

$$\frac{\partial c}{c} = \frac{\partial a}{a} + \frac{\sin B\partial C}{\sin A\sin C} + \cot A\partial B,$$

oder

$$9.\quad \frac{\partial b}{b} = \frac{\partial a}{a} + \frac{\sin C\partial B}{\sin B\sin(B+C)} - \cot(B+C)\partial C,$$

$$10.\quad \frac{\partial c}{c} = \frac{\partial a}{a} + \frac{\sin B\partial C}{\sin C\sin(B+C)} - \cot(B+C)\partial B.$$

Setzt man also der Kürze wegen

$$\frac{\sin C}{\sin B\sin(B+C)} = M,\quad \frac{\sin B}{\sin C\sin(B+C)} = M',\quad \cot(B+C) = N;$$

so ist

$$11.\quad \frac{\partial b}{b} = \frac{\partial a}{a} + M\partial B - N\partial C,$$

$$12.\quad \frac{\partial c}{c} = \frac{\partial a}{a} + M'\partial C - N\partial B.$$

Zu bemerken ist hierbei noch, dass in allen vorhergehenden Formeln ∂B und ∂C als in Theilen des Radius, d. i. der Einheit, ausgedrückt gedacht werden müssen. Sind dagegen ∂B und ∂C *in Secunden* ausgedrückt; so muss man in die vorigen Formeln

statt ∂B und ∂C respective die Grössen $\sin 1'' \partial B$ und $\sin 1'' \partial C$ einführen, wodurch dieselben folgende Gestalt erhalten:

13. $$\frac{\partial b}{b} = \frac{\partial a}{a} + M \sin 1'' \partial B - N \sin 1'' \partial C,$$

14. $$\frac{\partial c}{c} = \frac{\partial a}{a} + M' \sin 1'' \partial C - N \sin 1'' \partial B.$$

§. 232.

Um den Gebrauch der vorhergehenden Formeln an einem Beispiele zu erläutern, wollen wir annehmen, dass man durch Messung die Seite a und die beiden an derselben liegenden Winkel B, C eines Dreiecks respective 100 Ruthen und $30^\circ 6'$, $140^\circ 8'$ gefunden habe, dass man aber aus der Natur der gebrauchten Instrumente, aus der auf die Messung gewandten Sorgfalt, überhaupt aus den Verhältnissen und Umständen, unter denen die Messung angestellt wurde, zu schliessen berechtigt sey, dass die Seite a wohl um 2 Fuss, der Winkel B um $5'$, der Winkel C um $4'$ fehlerhaft gemessen seyn könne, und wollen nun den Einfluss zu beurtheilen suchen, welchen diese Fehler auf die Bestimmung der Seite b ausüben.

Setzen wir $a = 1000'$, $B = 30^\circ 6'$, $C = 140^\circ 8'$ und nehmen an, dass alle gemessenen Stücke zu klein sind; so müssen wir nach §. 228.

$$\partial a = 2', \quad \partial B = 300'', \quad \partial C = 240''$$

setzen. Folglich ist

$$\frac{\partial a}{a} = 0{,}002.$$

Ferner ist

$$\begin{aligned}
\log \sin C &= 0{,}8068602 - 1 \\
\log \partial B &= 2{,}4771213 \\
\log \sin 1'' &= \underline{0{,}6855749 - 6} \\
& \quad 0{,}9695564 - 4 \\[1ex]
\log \sin B &= 0{,}7002802 - 1 \\
\log \sin(B+C) &= \underline{0{,}2295185 - 1} \\
& \quad 0{,}9297987 - 2 \\
\log . M \sin 1'' \partial B &= 0{,}0397577 - 2 \\
M \sin 1'' \partial B &= 0{,}0109587 \\[1ex]
\log \{-\cot(B+C)\} &= 0{,}7641411 \\
\log \partial C &= 2{,}3802112 \\
\log \sin 1'' &= \underline{0{,}6855749 - 6} \\
\log(-N \sin 1'' \partial C) &= 0{,}8299272 - 3 \\
N \sin 1'' \partial C &= -\ 0{,}0067597.
\end{aligned}$$

Folglich

$$\frac{\partial b}{b} = 0{,}002 + 0{,}0109587 + 0{,}0067597,$$

d. i.

$$\frac{\partial b}{b} = 0{,}0197184$$

oder nahe $= 0{,}02$. Auf 50 Ruthen würde also der Fehler schon eine ganze Ruthe betragen.

Will man ∂b selbst finden; so muss man zuerst aus a, B, C — die Seite b berechnen, und muss dann den Bruch $\frac{\partial b}{b}$ mit b multipliciren. Die hierzu nöthige einfache Rechnung führt man auf folgende Art.

$$\begin{aligned}
\log a &= 3{,}0000000 \\
\log \sin B &= \underline{0{,}7002802 - 1} \\
& 2{,}7002802 \\
\log \sin (B + C) &= \underline{0{,}2295185 - 1} \\
\log b &= 3{,}4707617 \\
\log \frac{\partial b}{b} &= \underline{0{,}2948717 - 2} \\
\log \partial b &= 1{,}7656334 \\
\partial b &= 58',295 = 5^{\circ},8295
\end{aligned}$$

Der Fehler in der Seite b ist also unter den gemachten Voraussetzungen sehr beträchtlich.

Wäre a um 2 Fuss zu gross, B um $5'$, C um $4'$ zu klein gemessen worden; so hätte man

$$\partial a = -2', \; \partial B = 300'', \; \partial C = 240''$$

setzen müssen, und würde dann

$$\frac{\partial b}{b} = -0{,}002 + 0{,}0109587 + 0{,}0067597$$

d. i.

$$\frac{\partial b}{b} = 0{,}0157184$$

gefunden haben.

Wäre auch B zu gross gemessen worden; so hätte man

$$\partial a = -2', \; \partial B = -300'', \; \partial C = 240''$$

setzen müssen, und würde dann

$$\frac{\partial b}{b} = -0{,}002 - 0{,}0109587 + 0{,}0067597$$

d. i.

$$\frac{\partial b}{b} = -0{,}0061990$$

gefunden haben.

Wären alle drei Stücke zu gross gemessen worden; so hätte man

$$\partial a = -2', \quad \partial B = -300'', \quad \partial C = -240''$$

setzen müssen, und würde dann

$$\frac{\partial b}{b} = -0{,}002 - 0{,}0109587 - 0{,}0067597$$

d. i.

$$\frac{\partial b}{b} = -0{,}0197184$$

gefunden haben.

§. 233.

Gegeben b, c, A. Gesucht B, C, a.

Aus den Formeln 1. erhält man

$$15. \quad \partial a = \frac{a\cos C\partial b + a\cos B\partial c + bc\sin A\partial A}{a},$$

oder nach bekannten trigonometrischen Sätzen

$$16. \quad \partial a = \frac{(b - c\cos A)\partial b + (c - b\cos A)\partial c + bc\sin A\partial A}{\sqrt{b^2 + c^2 - 2bc\cos A}}.$$

Ferner ist nach den Gleichungen 1.

$$17. \quad \partial B = \frac{b\partial b - b\cos A\partial c - b\cos C\partial a}{ac\sin B},$$

$$18. \quad \partial C = \frac{c\partial c - c\cos B\partial a - c\cos A\partial b}{ab\sin C}.$$

Aus der Formel 15. erhält man auch

$$\frac{\partial a}{a} = \frac{b}{a}\cos C.\frac{\partial b}{b} + \frac{c}{a}\cos B.\frac{\partial c}{c} + \frac{bc}{a^2}\sin A\partial A$$

$$= \frac{\sin B\cos C}{\sin A}.\frac{\partial b}{b} + \frac{\sin C\cos B}{\sin A}.\frac{\partial c}{c} + \frac{\sin B\sin C}{\sin A}\partial A,$$

d. i., wenn wir

$$P = \frac{\sin B\cos C}{\sin A}, \quad Q = \frac{\sin C\cos B}{\sin A}, \quad R = \frac{\sin B\sin C}{\sin A}$$

setzen,

$$19. \quad \frac{\partial a}{a} = P\frac{\partial b}{b} + Q\frac{\partial c}{c} + R\partial A.$$

§. 234.

Gegeben b, c, B. Gesucht A, C, a.

Aus den Gleichungen 1. und 2. ergiebt sich auf der Stelle:

$$20. \quad \partial a = \frac{b\partial b - b\cos A\partial c - ac\sin B\partial B}{b\cos C},$$

$$21.\quad \partial A = \frac{\sin B \partial a - \sin A \partial b + a \cos B \partial B}{b \cos A},$$

$$22.\quad \partial C = \frac{\sin B \partial c - \sin C \partial b + c \cos B \partial B}{b \cos C}.$$

Durch Substitution des Werths von ∂a aus 20. in 21. würde man einen von ∂a unabhängigen Ausdruck von ∂A erhalten können.

§. 235.

Gegeben a, b, c. Gesucht A, B, C.

Nach den Gleichungen 1. ist

$$\partial A = \frac{a\partial a - a \cos C \partial b - a \cos B \partial c}{bc \sin A}.$$

Substituirt man hierin die aus der Trigonometrie bekannten Ausdrücke für $\sin A$, $\cos B$, $\cos C$ durch die drei Seiten, für $s = \frac{1}{2}(a+b+c)$, und vertauscht dann die Buchstaben gehörig; so erhält man

$$23.\quad \partial A = \frac{2abc\partial a - (a^2 + b^2 - c^2) c\partial b - (a^2 + c^2 - b^2) b\partial c}{4bc\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}},$$

$$24.\quad \partial B = \frac{2abc\partial b - (a^2 + b^2 - c^2) c\partial a - (b^2 + c^2 - a^2) a\partial c}{4ac\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}},$$

$$25.\quad \partial C = \frac{2abc\partial c - (a^2 + c^2 - b^2) b\partial a - (b^2 + c^2 - a^2) a\partial b}{4ab\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}.$$

§. 236.

Wichtig sind auch die Gleichungen, welche man aus den Fundamentalformeln 1. und 2. erhält, wenn man zwei Stücke des Dreiecks als richtig bestimmt annimmt. Man kann aber als richtig bestimmt annehmen:

1. Eine Seite und einen anliegenden Winkel.
2. Eine Seite und ihren Gegenwinkel.
3. Zwei Seiten.
4. Zwei Winkel.

Diese vier Fälle wollen wir nun nach der Reihe durchgehen.

§. 237.

Richtig bestimmt a, B.

Nach der Annahme ist $\partial a = \partial B = 0$. Weil nun nach 3.

$$\partial A + \partial B + \partial C = 0$$

ist; so ist in diesem Falle

$$\partial A + \partial C = 0, \quad \partial A = -\partial C.$$

us den Gleichungen 1. und 2. erhält man ferner für $\partial a = B = 0$

$$b\partial b = b\cos A\,\partial c,$$

$$-\sin A\,\partial b = b\cos A\,\partial A.$$

olglich hat man zwischen ∂b, ∂c, ∂A, ∂C die drei Gleichungen

$$26.\quad \begin{cases} \partial A = -\partial C \\ \partial b = \cos A\,\partial c \\ b\partial A = -\tang A\,\partial b \end{cases}$$

ittelst welcher, wenn irgend eine der vier Grössen ∂b, ∂c, A, ∂C bekannt ist, jederzeit die drei übrigen leicht gefunden erden können.

§. 238.

Richtig bestimmt a, A.

In diesem Falle ist $\partial a = \partial A = 0$. Weil nun nach 3.

$$\partial A + \partial B + \partial C = 0$$

t; so ist in diesem Falle

$$\partial B + \partial C = 0,\quad \partial B = -\partial C.$$

us den Gleichungen 1. und 2. erhält man für $\partial a = \partial A = 0$

$$0 = a\cos C\,\partial b + a\cos B\,\partial c,$$

$$-\sin A\,\partial b = -a\cos B\,\partial B.$$

olglich hat man zwischen ∂b, ∂c, ∂B, ∂C die drei folgenden leichungen:

$$27.\quad \begin{cases} \partial B = -\partial C \\ \cos B\,\partial c = -\cos C\,\partial b \\ a\cos B\,\partial B = \sin A\,\partial b, \end{cases}$$

ittelst welcher, wenn eine der vier genannten Grössen gegeben t, die drei andern jederzeit gefunden werden können.

Die letzte dieser vier Gleichungen lässt sich, weil

$$\sin A = \frac{a}{b}\sin B$$

t, auch unter folgender Form darstellen:

$$28.\quad b\partial B = \tang B\,\partial b.$$

§. 239.

Richtig bestimmt a, b.

In diesem Falle ist $\partial a = \partial b = 0$. Also ist nacl
und 3.

$$\partial A + \partial B + \partial C = 0,$$
$$0 = a\cos B\,\partial c + bc\sin A\,\partial A,$$
$$0 = b\cos A\,\partial c + ac\sin B\,\partial B,$$
$$c\partial c = ab\sin C\,\partial C,$$
$$0 = b\cos A\,\partial A - a\cos B\,\partial B;$$

oder

$$-bc\sin A\,\partial A = a\cos B\,\partial c,$$
$$-ac\sin B\,\partial B = b\cos A\,\partial c,$$
$$c\partial c = ab\sin C\,\partial C,$$
$$a\cos B\,\partial B = b\cos A\,\partial A.$$

Diese Gleichungen lassen sich aber abkürzen. Es ist ı
wenn man in der ersten Gleichung auf beiden Seiten m
multiplicirt, und dann mit $\cos B$ dividirt,

$$-bc\sin A\,\mathrm{tang}B\,\partial A = a\sin B\,\partial c.$$

Aber bekanntlich

$$b\sin A = a\sin B.$$

Also durch Division

$$-c\,\mathrm{tang}B\,\partial A = \partial c,$$

und ganz eben so

$$-c\,\mathrm{tang}A\,\partial B = \partial c.$$

Ferner ist aus der dritten der vier obigen Gleichungen

$$\partial c = a.\frac{b\sin C}{c}\partial C = b.\frac{a\sin C}{c}\partial C = a\sin B\,\partial C = b\sin A\,\partial$$

und endlich aus der vierten Gleichung

$$a\sin A\sin B\cos B\,\partial B = b\sin A\sin B\cos A\,\partial A,$$
$$a\sin B\,\mathrm{tang}A\,\partial B = b\sin A\,\mathrm{tang}B\,\partial A,$$
$$\mathrm{tang}A\,\partial B = \mathrm{tang}B\,\partial A.$$

Also hat man jetzt folgende Gleichungen:

$$29.\quad \left\{\begin{aligned} &\partial A + \partial B + \partial C = 0,\\ &-c\,\mathrm{tang}B\,\partial A = \partial c,\\ &-c\,\mathrm{tang}A\,\partial B = \partial c,\\ &\partial c = a\sin B\,\partial C = b\sin A\,\partial C,\\ &\mathrm{tang}A\,\partial B = \mathrm{tang}B\,\partial A.\end{aligned}\right.$$

§. 240.

Richtig bestimmt A, B.

In diesem Falle ist $\partial A = \partial B = 0$, folglich wegen der Gleichung 3. auch $\partial C = 0$, und daher nach 1. und 2.

$$30. \begin{cases} \partial a = \cos C\partial b + \cos B\partial c, \\ \partial b = \cos A\partial c + \cos C\partial a, \\ \partial c = \cos B\partial a + \cos A\partial b; \end{cases}$$

$$\sin B\partial a - \sin A\partial b = 0,$$
$$\sin C\partial b - \sin B\partial c = 0,$$
$$\sin A\partial c - \sin C\partial a = 0;$$

$$\frac{\partial a}{\partial b} = \frac{\sin A}{\sin B} = \frac{a}{b},$$
$$\frac{\partial b}{\partial c} = \frac{\sin B}{\sin C} = \frac{b}{c},$$
$$\frac{\partial c}{\partial a} = \frac{\sin C}{\sin A} = \frac{c}{a};$$

$$31. \quad b\partial a = a\partial b, \quad c\partial b = b\partial c, \quad a\partial c = c\partial a.$$

B. Differentialformeln für sphärische Dreiecke.

§. 241.

Zunächst kommt es hier wieder auf die Differentiation der Fundamentalformeln der sphärischen Trigonometrie:

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A,$$
$$\sin A \sin b = \sin B \sin a,$$
$$\cos A = -\cos B \cos C + \sin B \sin C \cos a$$

an.

Die erste giebt durch partielle Differentiation

$$\sin a\partial a = (\sin b \cos c - \cos b \sin c \cos A)\partial b$$
$$+ (\cos b \sin c - \sin b \cos c \cos A)\partial c$$
$$+ \sin b \sin c \sin A\partial A.$$

Da aber

$$\cos A = \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c}$$

ist; so ist der in ∂b multiplicirte Factor

$$= \frac{\sin b^2 \cos c - \cos a \cos b + \cos b^2 \cos c}{\sin b}$$

$$= \frac{\cos c - \cos a \cos b}{\sin b} = \sin a \cos C$$

und ganz eben so ist der in ∂c multiplicirte Factor $= \sin a \cos B$.

Da nun auch

$$\frac{\sin b \sin A}{\sin a} = \sin B$$

ist; so erhält man, wenn man zugleich die Buchstaben gehörig vertauscht:

$$1. \begin{cases} \partial a = \cos C \partial b + \cos B \partial c + \sin c \sin B \partial A, \\ \partial b = \cos A \partial c + \cos C \partial a + \sin a \sin C \partial B, \\ \partial c = \cos B \partial a + \cos A \partial b + \sin b \sin A \partial C. \end{cases}$$

Aus der zweiten Fundamentalgleichung der sphärischen Trigonometrie erhält man augenblicklich durch Differentiation:

$$2. \begin{cases} \sin A \cos b \partial b + \cos A \sin b \partial A = \sin B \cos a \partial a + \cos B \sin a \partial B, \\ \sin B \cos c \partial c + \cos B \sin c \partial B = \sin C \cos b \partial b + \cos C \sin b \partial C, \\ \sin C \cos a \partial a + \cos C \sin a \partial C = \sin A \cos c \partial c + \cos A \sin c \partial A. \end{cases}$$

Aus der dritten Fundamentalgleichung der sphärischen Trigonometrie ergiebt sich durch Differentiation

$$\begin{aligned} -\sin A \partial A = & (\cos a \cos B \sin C + \sin B \cos C) \partial B \\ & + (\cos a \sin B \cos C + \cos B \sin C) \partial C \\ & - \sin a \sin B \sin C \partial a, \end{aligned}$$

woraus, wegen

$$\cos a = \frac{\cos A + \cos B \cos C}{\sin B \sin C}, \quad \frac{\sin a \sin B}{\sin A} = \sin b,$$

ganz wie oben erhalten wird:

$$3. \begin{cases} -\partial A = \cos c \partial B + \cos b \partial C - \sin b \sin C \partial a, \\ -\partial B = \cos a \partial C + \cos c \partial A - \sin c \sin A \partial b, \\ -\partial C = \cos b \partial A + \cos a \partial B - \sin a \sin B \partial c. \end{cases}$$

§. 242.

Gegeben a, b, c. Gesucht A, B, C.

Nimmt man an, dass A, B, C aus a, b, c berechnet sind; so ist nach 1.

$$4. \begin{cases} \partial A = \dfrac{\partial a - \cos C \partial b - \cos B \partial c}{\sin c \sin B}, \\ \partial B = \dfrac{\partial b - \cos A \partial c - \cos C \partial a}{\sin a \sin C}, \\ \partial C = \dfrac{\partial c - \cos B \partial a - \cos A \partial b}{\sin b \sin A}. \end{cases}$$

tzt man nun statt der trigonometrischen Functionen der Winkel re aus der sphärischen Trigonometrie bekannten Ausdrücke rch die Seiten; so erhält man für

$$(\cos a - \cos b \cos c) \sin a = \mathfrak{A},$$
$$(\cos b - \cos c \cos a) \sin b = \mathfrak{B},$$
$$(\cos c - \cos a \cos b) \sin c = \mathfrak{C}$$

nd $\frac{1}{2}(a+b+c) = s$ leicht

$$5.\left\{\begin{aligned} \partial A &= \frac{\sin a \sin b \sin c \partial a - \mathfrak{C}\partial b - \mathfrak{B}\partial c}{2 \sin b \sin c \sqrt{\sin s \sin(s-a) \sin(s-b) \sin(s-c)}} \\ \partial B &= \frac{\sin a \sin b \sin c \partial b - \mathfrak{A}\partial c - \mathfrak{C}\partial a}{2 \sin a \sin c \sqrt{\sin s \sin(s-a) \sin(s-b) \sin(s-c)}}, \\ \partial C &= \frac{\sin a \sin b \sin c \partial c - \mathfrak{B}\partial a - \mathfrak{A}\partial b}{2 \sin a \sin b \sqrt{\sin s \sin(s-a) \sin(s-b) \sin(s-c)}}. \end{aligned}\right.$$

§. 243.

Gegeben b, c, A. Gesucht B, C, a.

Nach 1. ist

$$6.\quad \partial a = \cos C \partial b + \cos B \partial c + \sin c \sin B \partial A.$$

erner ist nach 1.

$$\partial B = \frac{\partial b - \cos A \partial c - \cos C \partial a}{\sin a \sin C}$$
$$= \frac{\partial b - \cos A \partial c - \cos C \partial a}{\sin c \sin A}.$$

etzt man hierin für ∂a seinen Werth aus 6. und vertauscht nn die Buchstaben gehörig; so erhält man

$$7.\left\{\begin{aligned} \partial B &= \frac{\sin C^2 \partial b - \cos a \sin B \sin C \partial c - \sin c \sin B \cos C \partial A}{\sin c \sin A}, \\ \partial C &= \frac{\sin B^2 \partial c - \cos a \sin B \sin C \partial b - \sin b \cos B \sin C \partial A}{\sin b \sin A}. \end{aligned}\right.$$

§. 244.

Gegeben a, B, C. Gesucht A, b, c.

Nach 3. ist

$$8.\quad \partial A = \sin b \sin C \partial a - \cos c \partial B - \cos b \partial C.$$

erner ist nach 3.

$$\partial b = \frac{\partial B + \cos a \partial C + \cos c \partial A}{\sin c \sin A}$$
$$= \frac{\partial B + \cos a \partial C + \cos c \partial A}{\sin a \sin C}.$$

20*

Folglich erhält man nach einem ganz ähnlichen Verfahren wie im vorigen Paragraphen

$$9.\quad \begin{cases} \partial b = \dfrac{\sin c^2 \partial B + \sin b \sin c \cos A \partial C + \sin b \cos c \sin C \partial a}{\sin a \sin C}, \\ \partial c = \dfrac{\sin b^2 \partial C + \sin b \sin c \cos A \partial B + \cos b \sin c \sin B \partial a}{\sin a \sin B}. \end{cases}$$

§. 245.

Gegeben A, B, C. Gesucht a, b, c.

Nach 3. ist

$$10.\quad \begin{cases} \partial a = \dfrac{\partial A + \cos c \partial B + \cos b \partial C}{\sin b \sin C}, \\ \partial b = \dfrac{\partial B + \cos a \partial C + \cos c \partial A}{\sin c \sin A}, \\ \partial c = \dfrac{\partial C + \cos b \partial A + \cos a \partial B}{\sin a \sin B}. \end{cases}$$

Setzt man nun für die trigonometrischen Functionen der Seiten ihre bekannten Ausdrücke durch die Winkel; so erhält man für

$$(\cos A + \cos B \cos C) \sin A = \mathfrak{A}',$$
$$(\cos B + \cos C \cos A) \sin B = \mathfrak{B}',$$
$$(\cos C + \cos A \cos B) \sin C = \mathfrak{C}'$$

und $\frac{1}{2}(A + B + C) = S$ leicht:

$$11.\quad \begin{cases} \partial a = \dfrac{\sin A \sin B \sin C \partial A + \mathfrak{C}' \partial B + \mathfrak{B}' \partial C}{2 \sin B \sin C \sqrt{-\cos S \cos(S-A) \cos(S-B) \cos(S-C)}}, \\ \partial b = \dfrac{\sin A \sin B \sin C \partial B + \mathfrak{A}' \partial C + \mathfrak{C}' \partial A}{2 \sin A \sin C \sqrt{-\cos S \cos(S-A) \cos(S-B) \cos(S-C)}}, \\ \partial c = \dfrac{\sin A \sin B \sin C \partial C + \mathfrak{B}' \partial A + \mathfrak{A}' \partial B}{2 \sin A \sin B \sqrt{-\cos S \cos(S-A) \cos(S-B) \cos(S-C)}}. \end{cases}$$

§. 246.

Gegeben a, b, A. Gesucht B, c, C.

Nach 2. und 1. ist

$$12.\quad \begin{cases} \partial B = \dfrac{\sin A \cos b \partial b + \cos A \sin b \partial A - \sin B \cos a \partial a}{\cos B \sin a}, \\ \partial c = \dfrac{\partial a - \cos C \partial b - \sin c \sin B \partial A}{\cos B}, \\ \partial C = \dfrac{\partial c - \cos B \partial a - \cos A \partial b}{\sin b \sin A}. \end{cases}$$

§. 247.

Gegeben a, A, B. Gesucht b, C, c.

Nach 2. und 3. ist

$$13.\quad \begin{cases} \partial b = \dfrac{\sin B \cos a\, \partial a + \cos B \sin a\, \partial B - \cos A \sin b\, \partial A}{\sin A \cos b}, \\ \partial C = \dfrac{-\partial A - \cos c\, \partial B + \sin b \sin C\, \partial a}{\cos b}, \\ \partial c = \dfrac{\partial C + \cos b\, \partial A + \cos a\, \partial B}{\sin a \sin B}. \end{cases}$$

§. 248.

Richtig bestimmt a, B.

Für $\partial a = \partial B = 0$ geben die Fundamentalgleichungen

$$\partial b = \cos A\, \partial c,$$

$$\sin A \cos b\, \partial b + \cos A \sin b\, \partial A = 0,$$

$$-\partial A = \cos b\, \partial C.$$

ividirt man die zweite dieser drei Gleichungen durch $\cos A \cos b$; erhält man

$$14.\quad \begin{cases} \partial b = \cos A\, \partial c, \\ \tang A\, \partial b = -\tang b\, \partial A, \\ -\partial A = \cos b\, \partial C \end{cases}$$

ittelst dieser Gleichungen lassen sich, wenn eine der drei rössen ∂b, ∂c, ∂A, ∂C gegeben ist, jederzeit die drei andern ıden.

§. 249.

Richtig bestimmt a, A.

Für $\partial a = \partial A = 0$ geben die Fundamentalgleichungen

$$0 = \cos C\, \partial b + \cos B\, \partial c,$$

$$\sin A \cos b\, \partial b = \cos B \sin a\, \partial B,$$

$$0 = \cos c\, \partial B + \cos b\, \partial C.$$

a die zweite sich auch unter der Form

$$\cos b\, \partial b = \frac{\cos B \sin a}{\sin A} \partial B = \frac{\cos B \sin b}{\sin B} \partial B$$

:hrciben lässt; so werden diese Gleichungen

$$15.\quad \begin{cases} \cos B\, \partial c = -\cos C\, \partial b, \\ \tang B\, \partial b = \tang b\, \partial B, \\ \cos c\, \partial B = -\cos b\, \partial C. \end{cases}$$

§. 250.

Richtig bestimmt *a*, *b*.

Für $\partial a = \partial b = 0$ geben die Fundamentalgleichungen 1. und 2.

$$0 = \cos B\,\partial c + \sin c \sin B\,\partial A,$$
$$0 = \cos A\,\partial c + \sin a \sin C\,\partial B,$$
$$\partial c = \sin b \sin A\,\partial C,$$
$$\cos A \sin b\,\partial A = \cos B \sin a\,\partial B;$$

oder

$$0 = \partial c + \sin c \,\mathrm{tang}\, B\,\partial A,$$
$$0 = \partial c + \sin c \,\mathrm{tang}\, A\,\partial B,$$
$$\partial c = \sin b \sin A\,\partial C,$$
$$\cos A\,\partial A = \cos B \frac{\sin a}{\sin b}\,\partial B = \sin A \cot B\,\partial B;$$

also

$$16. \left\{\begin{array}{l} \partial c = -\sin c \,\mathrm{tang}\, B\,\partial A, \\ \partial c = -\sin c \,\mathrm{tang}\, A\,\partial B, \\ \partial c = \sin b \sin A\,\partial C, \\ \cot A\,\partial A = \cot B\,\partial B. \end{array}\right.$$

§. 251.

Richtig bestimmt *A*, *B*.

Für $\partial A = \partial B = 0$ geben die Fundamentalgleichungen 2. und 3.

$$\sin A \cos b\,\partial b = \sin B \cos a\,\partial a,$$
$$0 = \cos b\,\partial C - \sin b \sin C\,\partial a,$$
$$0 = \cos a\,\partial C - \sin c \sin A\,\partial b,$$
$$\partial C = \sin a \sin B\,\partial c;$$

oder

$$\frac{\sin A}{\sin B} \cos b\,\partial b = \frac{\sin a}{\sin b} \cos b\,\partial b = \cos a\,\partial a$$
$$0 = \partial C - \mathrm{tang}\, b \sin C\,\partial a,$$
$$0 = \partial C - \frac{\sin c \sin A}{\cos a}\,\partial b = \partial C - \frac{\sin a \sin C}{\cos a}\,\partial b,$$
$$\partial C = \sin a \sin B\,\partial c;$$

also

$$17. \left\{\begin{array}{l} \cot a\,\partial a = \cot b\,\partial b, \\ \partial C = \mathrm{tang}\, b \sin C\,\partial a, \\ \partial C = \mathrm{tang}\, a \sin C\,\partial b, \\ \partial C = \sin a \sin B\,\partial c. \end{array}\right.$$

Elemente
der
Differential-
und
ntegralrechnung
zum
3ebrauche bei Vorlesungen

von

Johann August Grunert

or der Philosophie und ordentlichem Professor der Mathematik an der
ersität zu Greifswald, Ehrenmitgliede der Königl. Preuss. Akademie der
Wissenschaften zu Erfurt und der Gesellschaft zur Verbreitung der
mathematischen Wissenschaften zu Hamburg.

Zweiter Theil.
Integralrechnung.

Mit einer Figurentafel.

Leipzig, 1837.
Bei E. B. Schwickert.

Elemente

der

Differential-

und

Integralrechnung

zum

Gebrauche bei Vorlesungen

Johann August Grunert.

Inhalt des zweiten Theils.

Integralrechnung.

Seite

Anhang.

In den Citaten in diesem Theile bedeutet der Buchstabe D; Differentialrechnung und weiset also auf den ersten Theil zurück.

Integralrechnung.

Erstes Kapitel.

Allgemeine Begriffe und Sätze.

§. 1.

Es sey X eine beliebige Function der **einen** unabhängigen veränderlichen Grösse x. So wie man nach dem Differentialquotienten dieser Function fragen kann; so kann man auch umgekehrt eine Function von x zu finden verlangen, deren Differentialquotient die gegebene Function X, oder was dasselbe ist, deren Differential die Grösse $X\partial x$ ist.

Jede Function, deren Differential die Grösse $X\partial x$ ist, durch deren Differentiation man also diese Grösse erhält, heisst ein **Integral** von $X\partial x$, und wird im Allgemeinen dadurch bezeichnet, dass man der Grösse $X\partial x$ das Zeichen $\int$, welches in dieser Beziehung das **Integralzeichen** genannt wird, vorschreibt, so dass also $\int X\partial x$ eine Function, deren Differential $X\partial x$ ist, d. h. eine Function von solcher Beschaffenheit, dass

$$\partial\int X\partial x = X\partial x$$

ist, bezeichnet.

Aus vorstehender Gleichung sieht man auch, dass das Differential- und Integralzeichen, wenn das erstere vor dem letztern steht, sich jederzeit gegenseitig aufheben.

Es würde leicht seyn, den vorhergehenden Begriff des Integrals auf Functionen mit mehr als einer veränderlichen Grösse zu erweitern. Für jetzt wollen wir aber, so lange nicht etwas Anderes besonders bemerkt wird, immer bloss Functionen mit **einer** veränderlichen Grösse betrachten.

Die Wissenschaft, welche sich mit der Entwickelung der Integrale, d. i mit der sogenannten Integration aller Arten von Differentialen beschäftigt, ist die **Integralrechnung**.

§. 2.

Die Integrale sind nicht wie die Differentiale völlig bestimmte Grössen. Ist nämlich $f(x)$ ein Integral von $X\partial x$, so dass also $\partial f(x) = X\partial x$ ist; so ist, weil, wenn C eine ganz beliebige constante Grösse bezeichnet, nach D. §. 38.

$$\partial\{f(x) + C\} = \partial f(x) = X\partial x$$

ist, auch $f(x) + C$ ein Integral von $X\partial x$, und es folgt also hieraus, dass, wenn man auf irgend einem Wege ein Integral eines Differentials entwickelt hat, zu diesem Integrale immer noch eine constante, von x also unabhängige Grösse, die aber übrigens an sich ganz willkührlich ist, und der daher jeder beliebige Werth beigelegt werden kann, addirt werden muss.

Ist Y eine beliebige Function von x und also ∂Y deren Differential; so ist nach dem Vorhergehenden immer

$$\int \partial Y = Y + C,$$

und man sieht also hieraus, dass auch dann das Differential- und Integralzeichen sich immer gegenseitig aufheben, wenn das letztere vor dem erstern steht, nur dass man in diesem Falle zu der nach gegenseitiger Aufhebung der beiden Zeichen erhaltenen Function immer noch eine willkührliche Constante addiren muss.

§. 3.

Wenn überhaupt

$$\int X\partial x = f(x) + C$$

ist; so heisst die Differenz

$$\{f(b) + C\} - \{f(a) + C\}$$

zwischen den beiden Werthen, welche unser Integral für $x = a$ und $x = b$ erhält, das zwischen den Gränzen a und b, oder das von $x = a$ bis $x = b$ genommene Integral von $X\partial x$, und wird durch $\int_a^b X\partial x$ bezeichnet.

Da aber offenbar

$$\{f(b) + C\} - \{f(a) + C\} = f(b) - f(a)$$

ist; so ist auch

$$\int_a^b X\partial x = f(b) - f(a),$$

und man sieht also hieraus, dass aus jedem zwischen bestimmten Gränzen genommenen Integrale die willkührliche Constante ganz verschwindet, und dass also ein solches Integral jederzeit eine völlig bestimmte Grösse ist. Man nennt daher auch jedes zwischen bestimmten Gränzen genommene Integral ein **bestimmtes** Integral.

Weil

$$\int_b^a X\partial x = f(a) - f(b)$$

ist; so ist offenbar immer

$$\int_a^b X\partial x = -\int_b^a X\partial x.$$

Weil ferner

$$\int_a^b X\partial x = f(b) - f(a),$$

$$\int_b^c X\partial x = f(c) - f(b),$$

$$\int_c^d X\partial x = f(d) - f(c),$$

u. s. w.

$$\int_p^q X\partial x = f(q) - f(p),$$

$$\int_q^A X\partial x = f(A) - f(q)$$

ist; so ist, wie man durch Addition dieser Gleichungen leicht findet,

$$f(A) - f(a)$$

$$= \int_a^b X\partial x + \int_b^c X\partial x + \int_c^d X\partial x + \ldots + \int_p^q X\partial x + \int_q^A X\partial x,$$

d. i. immer

$$\int_a^b X\partial x + \int_b^c X\partial x + \int_c^d X\partial x + \ldots + \int_p^q X\partial x + \int_q^A X\partial x = \int_a^A X\partial x.$$

Bemerkt zu werden verdient, dass man, um das Integral

$$\int X\partial x = f(x) + C$$

zwischen den bestimmten Gränzen a und b zu nehmen, noch auf eine andere Art wie vorher verfahren kann.

Man bestimme nämlich mittelst der Gleichung

$$f(a) + C = 0$$

die willkührliche Constante C so, dass das gegebene Integral für $x = a$ verschwindet; so erhält man $C = -f(a)$, und

$$f(x) - f(a)$$

ist also, wie auch auf der Stelle in die Augen fällt, der für $x = a$ verschwindende Werth unsers Integrals. Setzt man nun in dem Ausdrucke

$$f(x) - f(a)$$

$x = b$; so erhält man die Differenz

$$f(b) - f(a),$$

d. h. das zwischen den Gränzen a und b genommene Integral von $X\partial x$ oder $\int_a^b X\partial x$. Man sieht also hieraus, dass man das Integral $\int X\partial x$ auch so zwischen den Gränzen a und b nehmen kann, dass man zuerst die willkührliche Constante so

bestimmt, dass das Integral für $x = a$ verschwindet, und in dem auf diese Weise erhaltenen Werthe des Integrals dann $x = b$ setzt.

Der für $x = a$ verschwindende Werth

$$f(x) - f(a)$$

des Integrals von $X\partial x$ ist nach dem Vorhergehenden offenbar nichts anders als das zwischen den Gränzen a und x genommene Integral von $X\partial x$, und kann also durch $\int_a^x X\partial x$ bezeichnet werden. Den für $x = 0$ verschwindenden Werth des Integrals von $X\partial x$ kann man folglich durch $\int_0^x X\partial x$ bezeichnen.

§. 4.

Lehrsatz. Wenn X eine Function von x, a eine constante Grösse bezeichnet; so ist immer

$$\int aX\partial x = a\int X\partial x + C.$$

Beweis. Weil nach bekannten Sätzen der Differentialrechnung

$$\partial\{a\int X\partial x + C\} = a\partial\int X\partial x = aX\partial x$$

ist; so erhellet die Richtigkeit des Satzes.

§. 5.

Zusatz. Unter denselben Voraussetzungen wie vorher ist

$$\int_a^b aX\partial x = a\int_a^b X\partial x.$$

Der Beweis dieses Satzes hat nicht die mindeste Schwierigkeit.

§. 6.

Lehrsatz. Wenn X, X_1, X_2, ... X_n Functionen von x, dagegen α_1, α_2, ... α_n constante Grössen bezeichnen, und

$$X = \alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \alpha_3 X_3 + \ldots + \alpha_n X_n$$

ist; so ist

$$\int X\partial x = \alpha_1\int X_1\partial x + \alpha_2\int X_2\partial x + \alpha_3\int X_3\partial x + \ldots + \alpha_n\int X_n\partial x + C.$$

Beweis. Weil, wie man nach bekannten Sätzen der Differentialrechnung leicht findet, das Differential der Grösse auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens in der zu beweisenden Gleichung

$$\alpha_1 X_1\partial x + \alpha_2 X_2\partial x + \alpha_3 X_3\partial x + \ldots + \alpha_n X_n\partial x,$$

d. i. $X\partial x$ ist; so erhellet die Richtigkeit des Satzes.

§. 7.

Zusatz. Unter denselben Voraussetzungen wie vorher ist

$$\int_a^b X\partial x =$$

$$\alpha_1\int_a^b X_1\partial x + \alpha_2\int_a^b X_2\partial x + \alpha_3\int_a^b X_3\partial x + \ldots + \alpha_n\int_a^b X_n\partial x.$$

Der Beweis dieses Satzes hat nicht die mindeste Schwierigkeit.

§. 8.

Lehrsatz. Wenn die Grössen

$$u_0, u_1, u_2, u_3, u_4, \ldots\ldots$$

Functionen von x sind, und eine für jedes x von $x = a$ bis $x = b$ convergirende Reihe bilden, deren Summe s ist; so bilden auch die Integrale

$$\int_a^x u_0\partial x, \int_a^x u_1\partial x, \int_a^x u_2\partial x, \int_a^x u_3\partial x, \int_a^x u_4\partial x, \ldots\ldots$$

für jedes x von $x = a$ bis $x = b$ eine convergirende Reihe, und die Summe dieser Reihe ist $\int_a^x s\partial x$; oder wenn, indem wir uns der in D. §. 112. eingeführten Bezeichnung bedienen,

$$s = u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + \ldots\ldots$$
$$\{a = x = b\}$$

ist; so ist immer

$$\int_a^x s\partial x = \int_a^x u_0\partial x + \int_a^x u_1\partial x + \int_a^x u_2\partial x + \int_a^x u_3\partial x + \ldots$$
$$\{a = x = b\}.$$

Beweis. Sey

$$s = u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_{n-1} + \varphi_n(x);$$

so ist nach §. 7.

$$\int_a^x s\partial x =$$

$$\int_a^x u_0\partial x + \int_a^x u_1\partial x + \int_a^x u_2\partial x + \ldots + \int_a^x u_{n-1}\partial x + \int_a^x \varphi_n(x)\partial x.$$

Setzen wir nun überhaupt

$$\int \varphi_n(x)\partial x = f_n(x) + C;$$

so ist

$$\int_a^x \varphi_n(x)\partial x = f_n(x) - f_n(a).$$

Nach D. §. 110. I. ist aber

$$f_n(x) = f_n(a) + (x-a)\, f'_n(a+\varrho(x-a)),$$

oder, weil $f'_n(x) = \varphi_n(x)$ ist,

$$f_n(x) - f_n(a) = (x-a)\, \varphi_n(a+\varrho(x-a)),$$

wo ϱ einen positiven echten Bruch bezeichnet.

Also ist

$$\int_a^x \varphi_n(x)\partial x = (x-a)\, \varphi_n(a+\varrho(x-a)),$$

und folglich

$$\int_a^x s\,\partial x = \int_a^x u_0\partial x + \int_a^x u_1\partial x + \int_a^x u_2\,\partial x + \ldots$$

$$\ldots + \int_a^x u_{n-1}\partial x + (x-a)\varphi_n(a+\varrho(x-a)).$$

Weil nun nach der Voraussetzung die Reihe u_0, u_1, u_2, u_3, u_4, ... für jedes x von $x = a$ bis $x = b$ convergirt; so nähert sich, für jedes x von $x = a$ bis $x = b$, die Grösse $\varphi_n(x)$, wenn n wächst, der Null, und kann derselben beliebig nahe gebracht werden, wenn man nur n gross genug nimmt. Die Grösse $a + \varrho(x-a)$ ist, weil ϱ ein positiver echter Bruch ist, für jedes x von $x = a$ bis $x = b$, wie leicht erhellen wird, immer zwischen a und b enthalten, d. h. immer grösser wie die kleinere, kleiner wie die grössere dieser beiden Grössen. Also nähert sich, wenn n wächst, für jedes x von $x = a$ bis $x = b$, auch $\varphi_n(a + \varrho(x - a))$, und folglich offenbar auch $(x - a)\varphi_n(a + \varrho(x - a))$, der Null, und kann derselben beliebig nahe gebracht werden, wenn man nur n gross genug nimmt. Daher ist

$$\int_a^x s\,\partial x = \int_a^x u_0\partial x + \int_a^x u_1\partial x + \int_a^x u_2\partial x + \int_a^x u_3\partial x + \ldots,$$

$$\{a = x = b\}$$

wie bewiesen werden sollte.

§. 9.

Zusatz. Wenn

$$s = u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + \ldots.$$

$$\left\{ a \overset{=}{\underset{<}{>}} x \overset{\leqq}{<} b \right\}$$

ist; so ist auch

$$\int_a^x s\,\partial x = \int_a^x u_0\partial x + \int_a^x u_1\partial x + \int_a^x u_2\partial x + \int_a^x u_3\partial x + \ldots.$$

$$\left\{ a \overset{=}{\underset{<}{>}} x \overset{\leqq}{<} b \right\}$$

Dieser Satz ist eine unmittelbare Folge aus dem in §. 8. bewiesenen Satze.

§. 10.

Der Begriff des Integrals lässt sich auf folgende Art noch weitern.

Man versteht nämlich, wenn wieder X eine Function von bezeichnet, überhaupt unter dem Integral von $X\partial x^n$ eine Funon von x, deren $n$tes Differential $X\partial x^n$ ist, und bezeichnet, ie hier wenigstens geschehen soll, ein solches Integral durch $\overset{n}{\int} X\partial x^n$, so dass also für jede durch dieses Symbol bezeichnete inction

$$\partial^n \overset{n}{\int} X\partial x^n = X\partial x^n$$

:.

Man kann übrigens das Integral $\overset{n}{\int} X\partial x^n$ immer bloss durch wöhnliche Integrale ausdrücken, indem sich nämlich leicht igen lässt, dass immer

$$\overset{n}{\int} X\partial x^n = \int\partial x \int\partial x \int\partial x \int\partial x \ldots \int\partial x \int X\partial x,$$

o die Anzahl der Integralzeichen auf der rechten Seite des eichheitszeichens $= n$ ist, d. h.

$$\overset{2}{\int} X\partial x^2 = \int\partial x \int X\partial x,$$

$$\overset{3}{\int} X\partial x^3 = \int\partial x \int\partial x \int X\partial x,$$

$$\overset{4}{\int} X\partial x^4 = \int\partial x \int\partial x \int\partial x \int X\partial x,$$

$$\overset{5}{\int} X\partial x^5 = \int\partial x \int\partial x \int\partial x \int\partial x \int X\partial x,$$

u. s. w.

setzt werden kann.

Um dies zu beweisen, wird es hinreichend seyn, bloss die rösse

$$\int\partial x \int\partial x \int\partial x \int X\partial x$$

i betrachten.

Durch successive Differentiation erhält man leicht

$$\partial \int\partial x \int\partial x \int\partial x \int X\partial x = \partial x \int\partial x \int\partial x \int X\partial x,$$

$$\partial^2 \int\partial x \int\partial x \int\partial x \int X\partial x = \partial x . \partial \int\partial x \int\partial x \int X\partial x = \partial x^2 \int\partial x \int X\partial x,$$

$$\partial^3 \int\partial x \int\partial x \int\partial x \int X\partial x = \partial x^2 . \partial \int\partial x \int X\partial x = \partial x^3 \int X\partial x,$$

$$\partial^4 \int\partial x \int\partial x \int\partial x \int X\partial x = \partial x^3 . \partial \int X\partial x = X\partial x^4.$$

lso ist

$$\int\partial x \int\partial x \int\partial x \int X\partial x$$

wirklich eine Function, deren viertes Differential $X\partial x^4$ ist, und man kann folglich

$$\int^4 X\partial x^4 = \int\partial x \int\partial x \int\partial x \int X\partial x$$

setzen, wie bewiesen werden sollte.

Bei jeder der n auf einander folgenden Integrationen, durch welche hiernach das Integral $\int^n X\partial x^n$ erhalten wird, muss immer eine willkührliche Constante eingeführt werden, so dass also dieses Integral jederzeit im Allgemeinen n willkührliche Constanten enthalten wird.

Zweites Kapitel.

Von der Zerlegung der gebrochenen rationalen algebraischen Functionen in Partialbrüche.

§. 11.

Die Zerlegung der gebrochenen rationalen algebraischen Functionen in sogenannte Partial- oder einfache Brüche ist zwar nur eine Hülfsoperation der Integralrechnung, für diese Wissenschaft aber von so grosser Wichtigkeit, dass wir in derselben, ohne die in Rede stehende wichtige Operation vollständig kennen gelernt zu haben, keinen Schritt weiter gehen können.

Im Allgemeinen bemerken wir, dass wir im Folgenden bloss sogenannte echte gebrochene rationale algebraische Functionen, d. h. solche gebrochene rationale algebraische Functionen betrachten werden, deren Zähler eine ganze rationale algebraische Function von einem niedrigern Grade wie der Nenner ist. Dass dadurch die Allgemeinheit der Untersuchung nicht im Mindesten beeinträchtigt wird, erhellet auf der Stelle, weil jede unechte gebrochene rationale algebraische Function, deren Zähler eine ganze rationale algebraische Function von einem höhern oder von demselben Grade wie der Nenner ist, mittelst gemeiner algebraischer Division in eine ganze und in eine echte gebrochene rationale algebraische Function zerlegt werden kann.

§. 12.

Lehrsatz. Wenn die ganze rationale algebraische Function

$$X = Ax^n + A_1 x^{n-1} + A_2 x^{n-2} + \ldots + A_{n-1}x + A_n$$

des $n$ten Grades für $x = a$ verschwindet; so ist dieselbe jederzeit durch $x - a$ ohne Rest theilbar,

und der Quotient ist eine ganze algebraische Function des (n—1)sten Grades.

Beweis. Nach der Voraussetzung ist

$$X = Ax^n + A_1x^{n-1} + A_2x^{n-2} + \ldots + A_{n-1}x + A_n$$

und

$$0 = Aa^n + A_1a^{n-1} + A_2a^{n-2} + \ldots + A_{n-1}a + A_n.$$

Subtrahirt man nun die zweite Gleichung von der ersten; so erhält man

$$X = A(x^n - a^n) + A_1(x^{n-1} - a^{n-1}) + \ldots + A_{n-2}(x^2 - a^2) + A_{n-1}(x-a)$$

und folglich

$$\frac{X}{x-a}$$

$$= A\frac{x^n - a^n}{x-a} + A_1\frac{x^{n-1} - a^{n-1}}{x-a} + \ldots + A_{n-2}\frac{x^2-a^2}{x-a} + A_{n-1}.$$

Also ist, wie leicht erhellen wird,

$$\begin{aligned}\frac{X}{x-a} = {} & A(x^{n-1} + x^{n-2}a + x^{n-3}a^2 + \ldots + xa^{n-2} + a^{n-1}) \\ & + A_1(x^{n-2} + x^{n-3}a + \ldots + xa^{n-3} + a^{n-2}) \\ & + A_2(x^{n-3} + \ldots + xa^{n-4} + a^{n-3}) \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + A_{n-2}(x+a) \\ & + A_{n-1}\end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned}\frac{X}{x-a} = {} & Ax^{n-1} \\ & + (Aa + A_1)x^{n-2} \\ & + (Aa^2 + A_1a + A_2)x^{n-3} \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + (Aa^{n-2} + A_1a^{n-3} + A_2a^{n-4} + \ldots + A_{n-2})x \\ & + Aa^{n-1} + A_1a^{n-2} + A_2a^{n-3} + \ldots + A_{n-2}a + A_{n-1},\end{aligned}$$

woraus der zu beweisende Satz unmittelbar erhellet.

§. 13.

Lehrsatz. **Wenn die ganze rationale algebraische Function**

$$X = Ax^n + A_1x^{n-1} + A_2x^{n-2} + \ldots + A_{n-1}x + A_n$$

des $n$ten Grades für

$$x = a,\ a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots\ a_{n-1}$$

verschwindet; so ist unter der Voraussetzung, dass die n Grössen a, a_1, a_2, a_3, ... a_{n-1} sämmtlich unter einander ungleich sind, immer

$$X = A(x-a)(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_{n-1}).$$

Beweis. Weil X für $x = a$ verschwindet; so ist nach §. 12.

$$X = (x-a)X_1,$$

wo X_1 eine ganze rationale algebraische Function des $(n-1)$sten Grades ist.

Weil nun ferner X, also auch $(x-a)X_1$ für $x=a_1$ verschwindet, aber a nicht $= a_1$ ist; so muss offenbar X_1 für $x = a_1$ verschwinden, und es ist folglich nach §. 12.

$$X_1 = (x-a_1)X_2,$$

wo X_2 eine ganze rationale algebraische Function des $(n-2)$ten Grades bezeichnet.

Also ist nach dem Obigen

$$X = (x-a)(x-a_1)X_2.$$

Nach der Voraussetzung verschwindet aber X, und folglich auch $(x-a)(x-a_1)X_2$, für $x = a_2$. Also muss, weil a_2 keiner der beiden Grössen a und a_1 gleich ist, offenbar X_2 für $x = a_2$ verschwinden, und es ist folglich nach §. 12.

$$X_2 = (x-a_2)X_3,$$

wo X_3 eine ganze rationale algebraische Function des $(n-3)$ten Grades bezeichnet.

Also ist nach dem Obigen

$$X = (x-a)(x-a_1)(x-a_2)X_3.$$

Wie man auf diese Art weiter gehen kann, erhellet nun schon.

Endlich wird man offenbar auf

$$X = (x-a)(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_{n-1})X_n,$$

wo X_n eine ganze rationale algebraische Function des $(n-n)$ten oder nullten Grades, d. i. eine constante Grösse, die wir durch C bezeichnen wollen, kommen, und folglich immer

$$X = C(x-a)(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_{n-1})$$

ist.

Die constante Grösse C lässt sich auf folgende Art bestimmen.

Man setze $x = \frac{1}{y}$; so erhält man, wenn der Kürze wegen

$$A + A_1 y + A_2 y^2 + \ldots + A_{n-1} y^{n-1} + A_n y^n = Y$$

gesetzt wird,

$$x^n Y = C\left(\frac{1}{y} - a\right)\left(\frac{1}{y} - a_1\right)\left(\frac{1}{y} - a_2\right)\ldots\left(\frac{1}{y} - a_{n-1}\right)$$

oder

$$x^n y^n Y = C(1-ay)(1-a_1 y)(1-a_2 y)\ldots(1-a_{n-1}y),$$

und folglich, weil $x^n y^n = 1$ ist,

$$Y = C(1-ay)(1-a_1 y)(1-a_2 y)\ldots(1-a_{n-1}y),$$

eine für jedes y geltende Gleichung, die für $y = 0$ auf der Stelle zu der Gleichung $C = A$ führt, wodurch also die Constante C bestimmt ist.

Folglich ist nach dem Obigen

$$X = A(x-a)(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)\ldots(x-a_{n-1}),$$

wie bewiesen werden sollte.

§. 14.

Lehrsatz. Wenn $f(x)$ und $\varphi_1(x)$ ganze rationale algebraische Functionen sind, und $f(x)$ von keinem höhern Grade wie $\varphi_1(x)$, also

$$\frac{f(x)}{(x-a)\varphi_1(x)}$$

eine echte gebrochene rationale algebraische Function ist; so kann man unter der Voraussetzung, dass $\varphi_1(x)$ für $x = a$ *nicht* verschwindet, jederzeit

$$\frac{f(x)}{(x-a)\varphi_1(x)} = \frac{A}{x-a} + \frac{f_1(x)}{\varphi_1(x)}$$

setzen, wo A eine völlig bestimmte constante Grösse, und $f_1(x)$ eine völlig bestimmte ganze rationale algebraische Function von einem niedrigern Grade wie $\varphi_1(x)$, also $\dfrac{\varphi_1(x)}{f_1(x)}$ eine echte gebrochene rationale algebraische Function ist.

Beweis. Um dies zu beweisen, muss man zeigen, dass unter den gemachten Voraussetzungen für jedes x sowohl der Gleichung

$$\frac{f(x)}{(x-a)\varphi_1(x)} = \frac{A}{x-a} + \frac{f_1(x)}{\varphi_1(x)},$$

als auch allen übrigen Bedingungen unsers Satzes vollständig genügt werden kann.

Aus der zu erfüllenden Gleichung folgt

$$f(x) = A\varphi_1(x) + (x-a)f_1(x),$$

und es wird offenbar, wenn diese Gleichung erfüllt ist, auch die erstere Gleichung erfüllt seyn.

Da aber die vorstehende Gleichung für jedes x gelten soll; so muss dieselbe auch für $x=a$ gelten, und es muss also nothwendig $f(a) = A\varphi_1(a)$, d. i.

$$A = \frac{f(a)}{\varphi_1(a)}$$

seyn, wodurch die constante Grösse A, weil nach der Voraussetzung $\varphi_1(a)$ nicht $= 0$ ist, vollständig bestimmt ist.

Hat man nun auf diese Weise A bestimmt; so wird die obige Gleichung für jedes x erfüllt werden, wenn man

$$f_1(x) = \frac{f(x) - A\varphi_1(x)}{x - a}$$

setzt, weil sich dieselbe, wenn man diesen Ausdruck von $f_1(x)$ in sie einführt, offenbar auf die identische Gleichung $f(x) = f(x)$ reducirt, und es wird sich also bloss noch fragen, ob die auf diese Weise bestimmte Function $f_1(x)$ allen in unserm Satze ausgesprochenen Bedingungen genügt, d. h. eine ganze rationale algebraische Function von einem niedrigern Grade wie $\varphi_1(x)$ ist.

Weil nach dem Vorhergehenden

$$A = \frac{f(a)}{\varphi_1(a)}$$

ist; so ist

$$f(a) - \frac{f(a)}{\varphi_1(a)}\varphi_1(a) = 0$$

der Werth, welchen die Function

$$f(x) - A\varphi_1(x)$$

erhält, wenn man $x = a$ setzt, und nach §. 12. geht also $x - a$ in dieser Function auf, oder $f_1(x)$ ist eine ganze rationale algebraische Function. Da aber nach der Voraussetzung $f(x)$ von keinem höhern Grade wie $\varphi_1(x)$ ist; so ist

$$\frac{f(x) - A\varphi_1(x)}{x - a},$$

d. i. $f_1(x)$, offenbar von einem niedrigern Grade wie $\varphi_1(x)$, und die Function $f_1(x)$ genügt also augenscheinlich allen in unserm Satze ausgesprochenen Bedingungen.

Daher ist der Satz durch das Vorhergehende vollständig bewiesen.

§. 15.

Lehrsatz. Wenn die Grössen $a, a_1, a_2, \ldots a_{n-1}$ sämmtlich unter einander ungleich sind, und die ganze rationale algebraische Function $f(x)$ von einem niedrigern Grade wie vom $n$ten ist; so kann man jederzeit die echte gebrochene rationale algebraische Function

$$\frac{f(x)}{(x-a)(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_{n-1})}$$
$$= \frac{A}{x-a} + \frac{A_1}{x-a_1} + \frac{A_2}{x-a_2} + \ldots + \frac{A_{n-1}}{x-a_{n-1}},$$

wo $A, A_1, A_2, \ldots A_{n-1}$ völlig bestimmte constante *Grössen* bezeichnen, setzen.

Beweis. Man bezeichne der Kürze wegen die Producte

$$(x-a)(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)\ldots(x-a_{n-1}),$$
$$(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)\ldots(x-a_{n-1}),$$
$$(x-a_2)(x-a_3)\ldots(x-a_{n-1}),$$
$$(x-a_3)\ldots(x-a_{n-1}),$$
$$\ldots\ldots\ldots$$
$$x-a_{n-1}$$

ch der Reihe durch

$$\varphi(x),\ \varphi_1(x),\ \varphi_2(x),\ \varphi_3(x),\ \ldots\ \varphi_{n-1}(x);$$

kann man, weil nach der Voraussetzung die Grössen a, a_1, a_3, ... a_{n-1} sämmtlich unter einander ungleich sind, nach 14.

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\frac{f(x)}{(x-a)\varphi_1(x)}=\frac{A}{x-a}+\frac{f_1(x)}{\varphi_1(x)},$$
$$\frac{f_1(x)}{\varphi_1(x)}=\frac{f_1(x)}{(x-a_1)\varphi_2(x)}=\frac{A_1}{x-a_1}+\frac{f_2(x)}{\varphi_2(x)},$$
$$\frac{f_2(x)}{\varphi_2(x)}=\frac{f_2(x)}{(x-a_2)\varphi_3(x)}=\frac{A_2}{x-a_2}+\frac{f_3(x)}{\varphi_3(x)},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\frac{f_{n-2}(x)}{\varphi_{n-2}(x)}=\frac{f_{n-2}(x)}{(x-a_{n-2})\varphi_{n-1}(x)}=\frac{A_{n-2}}{x-a_{n-2}}+\frac{f_{n-1}(x)}{\varphi_{n-1}(x)}$$

tzen, wo die Grössen A, A_1, A_2, ... A_{n-2} constante Grössen, und

$$\frac{f_1(x)}{\varphi_1(x)},\ \frac{f_2(x)}{\varphi_2(x)},\ \frac{f_3(x)}{\varphi_3(x)},\ \ldots\ \frac{f_{n-1}(x)}{\varphi_{n-1}(x)},$$

mmtlich echte gebrochene rationale algebraische Functionen nd.

Addirt man die sämmtlichen obigen Gleichungen zusammen; erhält man, nachdem man aufgehoben hat, was sich aufheben sst,

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\frac{A}{x-a}+\frac{A_1}{x-a_1}+\frac{A_2}{x-a_2}+\ldots+\frac{A_{n-2}}{x-a_{n-2}}+\frac{f_{n-1}(x)}{\varphi_{n-1}(x)}.$$

Weil aber $\frac{f_{n-1}(x)}{\varphi_{n-1}(x)}$ eine echte gebrochene rationale algebraische unction, und $\varphi_{n-1}(x)=x-a_{n-1}$ ist; so kann $f_{n-1}(x)$ offenr bloss eine constante Grösse seyn, die wir durch A_{n-1} beichnen, und folglich

$$\frac{f_{n-1}(x)}{\varphi_{n-1}(x)}=\frac{A_{n-1}}{x-a_{n-1}}$$

tzen wollen. Führt man dies nun in die obige Gleichung ein, id setzt für $\varphi(x)$ wieder seinen obigen Werth; so erhält man

$$\frac{f(x)}{(x-a)(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_{n-1})}$$

$$=\frac{A}{x-a}+\frac{A_1}{x-a_1}+\frac{A_2}{x-a_2}+\ldots+\frac{A_{n-1}}{x-a_{n-1}},$$

wie bewiesen werden sollte.

§. 16.

Aufgabe. Wenn die Grössen $a, a_1, a_2, \ldots a_{n-1}$ sämmtlich unter einander ungleich sind, $f(x)$ eine ganze rationale algebraische Function von einem niedrigern Grade wie vom $n$ten ist, und der Kürze wegen

$$\varphi(x)=(x-a)(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_{n-1})$$

gesetzt wird, in der Gleichung

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\frac{A}{x-a}+\frac{A_1}{x-a_1}+\frac{A_2}{x-a_2}+\ldots+\frac{A_{n-1}}{x-a_{n-1}}$$

die constanten Zähler $A, A_1, A_2, \ldots A_{n-1}$ zu bestimmen.

Auflösung. Wir wollen einen beliebigen der zu bestimmenden Zähler durch A_k bezeichnen, und setzen der Kürze wegen

$$\varphi(x)=(x-a_k)\,\varphi_k(x).$$

Denken wir uns nun alle Glieder auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens in der Gleichung

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\frac{A}{x-a}+\frac{A_1}{x-a_1}+\frac{A_2}{x-a_2}+\ldots+\frac{A_{n-1}}{x-a_{n-1}},$$

mit Ausnahme des Gliedes

$$\frac{A_k}{x-a_k},$$

mit einander vereinigt; so erhalten wir offenbar eine Gleichung von der Form

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\frac{A_k}{x-a_k}+\frac{f_k(x)}{\varphi_k(x)},$$

aus der sich, wenn man auf beiden Seiten mit $\varphi(x)$ multiplicirt, unmittelbar die natürlich für jedes x geltende Gleichung

$$f(x)=A_k\,\varphi_k(x)+(x-a_k)\,f_k(x)$$

ergiebt. Setzen wir nun in dieser Gleichung $x=a_k$; so erhalten wir

$$f(a_k)=A_k\varphi_k(a_k),\quad A_k=\frac{f(a_k)}{\varphi_k(a_k)},$$

wodurch der Zähler A_k bestimmt ist.

Haben also $\varphi_0(x)$, $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, ... $\varphi_{n-1}(x)$ eine ganz ähnliche Bedeutung wie $\varphi_k(x)$; so ist

$$A = \frac{f(a)}{\varphi_0(a)},\ A_1 = \frac{f(a_1)}{\varphi_1(a_1)},\ A_2 = \frac{f(a_2)}{\varphi_2(a_2)},\ \ldots A_{n-1} = \frac{f(a_{n-1})}{\varphi_{n-1}(a_{n-1})}.$$

Man kann aber noch einen von dem vorigen verschiedenen merkwürdigen Ausdruck für A_k finden.

Durch Differentiation der Gleichung

$$\varphi(x) = (x - a_k)\varphi_k(x)$$

ergiebt sich nämlich

$$\varphi'(x) = (x - a_k)\varphi'_k(x) + \varphi_k(x),$$

und folglich, wenn man $x = a_k$ setzt,

$$\varphi_k(a_k) = \varphi'(a_k),$$

so dass also

$$A_k = \frac{f(a_k)}{\varphi'(a_k)},$$

folglich

$$A = \frac{f(a)}{\varphi'(a)},\ A_1 = \frac{f(a_1)}{\varphi'(a_1)},\ A_2 = \frac{f(a_2)}{\varphi'(a_2)},\ \ldots A_{n-1} = \frac{f(a_{n-1})}{\varphi'(a_{n-1})}$$

ist.

§. 17.

Wir wollen, um die vorhergehende Aufgabe durch ein Beispiel zu erläutern, die Function

$$\frac{1+x^2}{x(x-1)(x+1)}$$

betrachten.

In diesem Falle ist $f(x) = 1 + x^2$, $a = 0$, $a_1 = 1$, $a_2 = -1$, und

$$\varphi_0(x) = (x-1)(x+1),\ \varphi_1(x) = x(x+1),\ \varphi_2(x) = x(x-1);$$

also

$$\varphi_0(a) = -1,\ \varphi_1(a_1) = 2,\ \varphi_2(a_2) = 2.$$

Weil nun ferner

$$f(a) = 1,\ f(a_1) = 2,\ f(a_2) = 2$$

ist; so ist nach den ersten der im vorigen Paragraphen entwickelten allgemeinen Formeln

$$A = -1,\ A_1 = 1,\ A_2 = 1,$$

und folglich

$$\frac{1+x^2}{x(x-1)(x+1)} = -\frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1},$$

eine Gleichung, von deren Richtigkeit man sich auch leicht durch Vereinigung der Brüche auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens mit einander überzeugen wird.

Will man sich der zweiten im vorigen Paragraphen entwickelten allgemeinen Formeln, deren Anwendung hier aber nicht so bequem wie die Anwendung der ersten seyn dürfte, bedienen; so muss man zuvörderst den Differentialquotienten

$$\varphi'(x) = x(x-1) + x(x+1) + (x-1)(x+1) = 3x^2 - 1$$

des Nenners

$$\varphi(x) = x(x-1)(x+1)$$

entwickeln.

Weil nun

$$\varphi'(a) = -1, \ \varphi'(a_1) = 2, \ \varphi'(a_2) = 2$$

ist; so erhält man mittelst der zweiten der im vorigen Paragraphen entwickelten allgemeinen Formeln für A, A_1, A_2 offenbar ganz dieselben Werthe wie vorher.

§. 18.

Lehrsatz. Wir wollen jetzt annehmen, dass die ganze rationale algebraische Function $(x-a)^\alpha \varphi_1(x)$ vom $n$ten, also $\varphi_1(x)$ vom $(n-\alpha)$ten Grade sey, dass $\varphi_1(x)$ für $x = a$ *nicht* verschwinde, und dass die ganze rationale algebraische Function $f(x)$ höchstens vom $(n-1)$sten Grade sey; so kann man immer

$$\frac{f(x)}{(x-a)^\alpha \varphi_1(x)} = \frac{A}{(x-a)^\alpha} + \frac{f_1(x)}{(x-a)^{\alpha-1}\varphi_1(x)}$$

setzen, wo A eine völlig bestimmte constante Grösse, und $f_1(x)$ eine ganze rationale algebraische Function, welche höchstens vom $(n-2)$ten Grade ist, bezeichnet.

Beweis. Die Gleichung

$$\frac{f(x)}{(x-a)^\alpha \varphi_1(x)} = \frac{A}{(x-a)^\alpha} + \frac{f_1(x)}{(x-a)^{\alpha-1}\varphi_1(x)}$$

ist für jedes x erfüllt, wenn die Gleichung

$$f(x) = A\varphi_1(x) + (x-a)f_1(x)$$

für jedes x erfüllt ist. Soll aber diese Gleichung für jedes x gelten; so muss sie auch für $x = a$ gelten, und es muss also nothwendig $f(a) = A\varphi_1(a)$, d. i.

$$A = \frac{f(a)}{\varphi_1(a)}$$

seyn, wodurch die constante Grösse A, weil nach der Voraussetzung $\varphi_1(a)$ nicht $= 0$ ist, vollständig bestimmt ist.

Hat man nun auf diese Weise A bestimmt; so wird die obige Gleichung für jedes x erfüllt werden, wenn man

$$f_1(x) = \frac{f(x) - A\varphi_1(x)}{x-a}$$

setzt, weil sich dieselbe, wenn man diesen Ausdruck von $f_1(x)$ in sie einführt, offenbar auf die identische Gleichung $f(x) = f(x)$ reducirt, und es wird sich also bloss noch fragen, ob die auf diese Weise bestimmte Function $f_1(x)$ allen in unserm Satze ausgesprochenen Bedingungen genügt, d. h. eine ganze rationale algebraische Function ist, deren Grad den $(n-2)$ten nicht übersteigt.

Weil nach dem Vorhergehenden

$$A = \frac{f(a)}{\varphi_1(a)}$$

ist; so ist

$$f(a) - \frac{f(a)}{\varphi_1(a)}\varphi_1(a) = 0$$

der Werth, welchen die Function

$$f(x) - A\varphi_1(x)$$

erhält, wenn man $x=a$ setzt, und nach §. 12. geht also $x-a$ in dieser Function auf, oder $f_1(x)$ ist eine ganze rationale algebraische Function. Da aber nach der Voraussetzung die Function $f(x)$ höchstens vom $(n-1)$sten, die Function $\varphi_1(x)$ vom $(n-\alpha)$ten Grade ist; so erhellet leicht, dass die Function

$$\frac{f(x) - A\varphi_1(x)}{x-a},$$

d. i. $f_1(x)$, höchstens vom $(n-2)$ten Grade ist, und dass also diese Function in der That allen in unserm Satze ausgesprochenen Bedingungen genügt, derselbe folglich durch das Vorhergehende vollständig bewiesen ist.

§. 19.

Erster Zusatz. Durch successive Anwendung des vorhergehenden Satzes erhält man ohne Schwierigkeit:

$$\frac{f(x)}{(x-a)^\alpha\varphi_1(x)}$$

$$= \frac{A}{(x-a)^\alpha} + \frac{f_1(x)}{(x-a)^{\alpha-1}\varphi_1(x)}$$

$$= \frac{A}{(x-a)^\alpha} + \frac{A_1}{(x-a)^{\alpha-1}} + \frac{f_2(x)}{(x-a)^{\alpha-2}\varphi_2(x)}$$

$$= \frac{A}{(x-a)^\alpha} + \frac{A_1}{(x-a)^{\alpha-1}} + \frac{A_2}{(x-a)^{\alpha-2}} + \frac{f_3(x)}{(x-a)^{\alpha-3}\varphi_1(x)}$$

u. s. w. u. s. w.

$$= \frac{A}{(x-a)^\alpha} + \frac{A_1}{(x-a)^{\alpha-1}} + \frac{A_2}{(x-a)^{\alpha-2}} + \ldots + \frac{A_{\alpha-1}}{x-a} + \frac{f_\alpha(x)}{\varphi_1(x)},$$

wo die ganzen rationalen algebraischen Functionen $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$, ... $f_\alpha(x)$ respective höchstens vom $(n-2)$ten, $(n-3)$ten, $(n-4)$ten,... $(n-\alpha-1)$ten Grade sind, so dass also, weil $\varphi_1(x)$ vom $(n-\alpha)$ten Grade ist, $\frac{f_\alpha(x)}{\varphi_1(x)}$ jederzeit eine echte gebrochene rationale algebraische Function ist.

Setzen wir der Kürze wegen

$$\frac{A}{(x-a)^\alpha}+\frac{A_1}{(x-a)^{\alpha-1}}+\frac{A_2}{(x-a)^{\alpha-2}}+\ldots+\frac{A_{\alpha-1}}{x-a}=\Sigma\frac{A_{\alpha-1}}{x-a};$$

so ist

$$\frac{f(x)}{(x-a)^\alpha\,\varphi_1(x)}=\Sigma\frac{A_{\alpha-1}}{x-a}+\frac{f_\alpha(x)}{\varphi_1(x)},$$

und der letzte Bruch auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens ist jederzeit eine echte gebrochene rationale algebraische Function.

Wenn $\varphi_1(x)=1$ ist; so erhält man ganz auf dieselbe Weise wie vorher

$$\frac{f(x)}{(x-a)^\alpha}=$$

$$\frac{A}{(x-a)^\alpha}+\frac{A_1}{(x-a)^{\alpha-1}}+\frac{A_2}{(x-a)^{\alpha-2}}+\ldots+\frac{A_{\alpha-2}}{(x-a)^2}+\frac{f_{\alpha-1}(x)}{x-a},$$

wo $f_{\alpha-1}(x)$ höchstens vom $\{n-(\alpha-1)-1\}$ten, d. i., weil in diesem Falle $n=\alpha$ ist, höchstens vom 0ten, d. i. $f_{\alpha-1}(x)$ eine constante Grösse ist, und daher $=A_{\alpha-1}$, also

$$\frac{f(x)}{(x-a)^\alpha}=\frac{A}{(x-a)^\alpha}+\frac{A_1}{(x-a)^{\alpha-1}}+\frac{A_2}{(x-a)^{\alpha-2}}+\ldots+\frac{A_{\alpha-1}}{x-a},$$

oder

$$\frac{f(x)}{(x-a)^\alpha}=\Sigma\frac{A_{\alpha-1}}{x-a}.$$

gesetzt werden kann.

§. 20.

Zweiter Zusatz. Wir wollen jetzt, indem wir annehmen, dass die Grössen a, a_1, a_2, ... a_k sämmtlich unter einander ungleich sind,

$$\varphi(x)=(x-a)^\alpha(x-a_1)^{\alpha_1}(x-a_2)^{\alpha_2}\ldots(x-a_k)^{\alpha_k}$$

und

$$\alpha+\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_k=n$$

setzen, so dass also $\varphi(x)$ eine ganze rationale algebraische Function des $n$ten Grades ist. Ferner soll $f(x)$ eine ganze rationale algebraische Function seyn, welche höchstens vom $(n-1)$sten Grade ist.

Setzen wir nun der Kürze wegen:

$$\varphi(x) = (x-a)^{\alpha}\,\varphi_1(x),$$
$$\varphi_1(x) = (x-a_1)^{\alpha_1}\varphi_2(x),$$
$$\varphi_2(x) = (x-a_2)^{\alpha_2}\varphi_3(x),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\varphi_{k-1}(x) = (x-a_{k-1})^{\alpha_{k-1}}\varphi_k(x),$$
$$\varphi_k(x) = (x-a_k)^{\alpha_k},$$

so ist nach §. 19.

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \Sigma\,\frac{A_{\alpha-1}}{x-a} + \frac{f_\alpha(x)}{\varphi_1(x)},$$
$$\frac{f_\alpha(x)}{\varphi_1(x)} = \Sigma\,\frac{B_{\alpha_1-1}}{x-a_1} + \frac{f_{\alpha_1}(x)}{\varphi_2(x)},$$
$$\frac{f_{\alpha_1}(x)}{\varphi_2(x)} = \Sigma\,\frac{C_{\alpha_2-1}}{x-a_2} + \frac{f_{\alpha_2}(x)}{\varphi_3(x)},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\frac{f_{\alpha_{k-2}}(x)}{\varphi_{k-1}(x)} = \Sigma\,\frac{K_{\alpha_{k-1}-1}}{x-a_{k-1}} + \frac{f_{\alpha_{k-1}}(x)}{\varphi_k(x)},$$
$$\frac{f_{\alpha_{k-1}}(x)}{\varphi_k(x)} = \Sigma\,\frac{L_{\alpha_k-1}}{x-a_k},$$

und folglich, wenn man auf beiden Seiten addirt, und aufhebt, was sich aufheben lässt,

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \Sigma\,\frac{A_{\alpha-1}}{x-a} + \Sigma\,\frac{B_{\alpha_1-1}}{x-a_1} + \Sigma\,\frac{C_{\alpha_2-1}}{x-a_2} + \ldots + \Sigma\,\frac{L_{\alpha_k-1}}{x-a_k}.$$

§. 21.

Aufgabe. Wenn die Grössen $a, a_1, a_2, a_3, \ldots a_k$ sämmtlich unter einander ungleich sind, und

$$\varphi(x) = (x-a)^{\alpha}(x-a)^{\alpha_1}(x-a_2)^{\alpha_2}\ldots(x-a_k)^{\alpha_k}$$

und

$$\alpha + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \ldots + \alpha_k = n$$

ist, $f(x)$ aber eine ganze rationale algebraische Function bezeichnet, welche höchstens vom $(n-1)$sten Grade ist: in der Gleichung

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \Sigma\,\frac{A_{\alpha-1}}{x-a} + \Sigma\,\frac{B_{\alpha_1-1}}{x-a_1} + \Sigma\,\frac{C_{\alpha_2-1}}{x-a_2} + \ldots + \Sigma\,\frac{L_{\alpha_k-1}}{x-a_k}$$

die constanten Zähler sämmtlicher Brüche zu bestimmen.

Auflösung. I. Es wird hinreichend seyn, bloss die Bestimmung der constanten Zähler

$$A, A_1, A_2, A_3, \ldots A_{\alpha-1}$$

zu zeigen, weil alle übrigen Zähler ganz auf dieselbe Weise bestimmt werden.

Setzen wir

$$\varphi_1(x) = (x-a_1)^{\alpha_1}(x-a_2)^{\alpha_2} \ldots (x-a_k)^{\alpha_k};$$

so ist

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \Sigma \frac{A_{\alpha-1}}{x-a} + \frac{f_\alpha(x)}{\varphi_1(x)},$$

d. i.

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} =$$

$$\frac{A}{(x-a)^\alpha} + \frac{A_1}{(x-a)^{\alpha-1}} + \frac{A_2}{(x-a)^{\alpha-2}} + \ldots + \frac{A_{\alpha-1}}{x-a} + \frac{f_\alpha(x)}{\varphi_1(x)},$$

wo $f_\alpha(x)$ eine ganze rationale algebraische Function bezeichnet.

Aus dieser Gleichung folgt, wenn wir der Kürze wegen

$$A + A_1(x-a) + A_2(x-a)^2 + \ldots + A_{\alpha-1}(x-a)^{\alpha-1} = Z$$

setzen, leicht

$$1. \quad f(x) - Z\varphi_1(x) = (x-a)^\alpha f_\alpha(x)$$

und

$$2. \quad \frac{f(x)}{\varphi_1(x)} - Z = (x-a)^\alpha \frac{f_\alpha(x)}{\varphi_1(x)}.$$

Jede dieser beiden Gleichungen führt zu einer merkwürdigen Methode zur Bestimmung der constanten Zähler A, A_1, A_2, A_3, ... $A_{\alpha-1}$.

II. Bevor wir aber zur Entwickelung dieser beiden Methoden übergehen können, müssen wir zuvörderst den folgenden Satz beweisen.

Wenn $Y = (x-a)^\alpha X$ ist, und weder die Function X der Grösse x selbst, noch irgend einer ihrer Differentialquotienten vom ersten bis zum $(\alpha-1)$sten für $x = a$ unendlich wird; so verschwinden die Grössen

$$Y, \frac{\partial Y}{\partial x}, \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2}, \frac{\partial^3 Y}{\partial x^3}, \ldots \frac{\partial^{\alpha-1} Y}{\partial x^{\alpha-1}}$$

für $x = a$ sämmtlich.

Man findet nämlich für

$$Y, \frac{\partial Y}{\partial x}, \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2}, \frac{\partial^3 Y}{\partial x^3}, \ldots$$

durch leichte Rechnung die folgenden Ausdrücke:

$$(x-a)^\alpha X,$$

$$(x-a)^\alpha \frac{\partial X}{\partial x} + \alpha(x-a)^{\alpha-1}X,$$

$$(x-a)^\alpha \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + 2\alpha(x-a)^{\alpha-1}\frac{\partial X}{\partial x} + \alpha(\alpha-1)(x-a)^{\alpha-2}X,$$

$$(x-a)^\alpha \frac{\partial^3 X}{\partial x^3} + 3\alpha(x-a)^{\alpha-1}\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + 3\alpha(\alpha-1)(x-a)^{\alpha-2}\frac{\partial X}{\partial x} + \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)(x-a)^{\alpha-3}X,$$

u. s. w. u. s. w.

und überzeugt sich bei näherer Ansicht dieser Ausdrücke auf der Stelle, dass auch noch der Ausdruck für den $(\alpha-1)$sten Differentialquotienten von Y in allen seinen Gliedern den Factor $x-a$ enthält, und dass also, weil nach der Voraussetzung keine der Grössen

$$X, \frac{\partial X}{\partial x}, \frac{\partial^2 X}{\partial x^2}, \frac{\partial^3 X}{\partial x^3}, \ldots \frac{\partial^{\alpha-1} X}{\partial x^{\alpha-1}}$$

für $x=a$ unendlich wird, in der That die Grössen

$$Y, \frac{\partial Y}{\partial x}, \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2}, \frac{\partial^3 Y}{\partial x^3}, \ldots \frac{\partial^{\alpha-1} Y}{\partial x^{\alpha-1}}$$

für $x=a$ sämmtlich verschwinden, wie behauptet wurde.

III. Nach dem Obigen ist $f_\alpha(x)$ eine ganze rationale algebraische Function von x, und es wird folglich offenbar weder diese Function selbst, noch irgend einer ihrer Differentialquotienten für $x=a$ unendlich. Daher verschwinden nach II. die Function $(x-a)^\alpha f_\alpha(x)$ und ihre sämmtlichen Differentialquotienten vom ersten bis zum $(\alpha-1)$sten für $x=a$. Differentiirt man also die Gleichung 1. in I; so erhält man die folgenden, jedoch bloss für $x=a$ geltenden Gleichungen:

$$f(x) - Z\varphi_1(x) = 0,$$

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x} - \frac{\partial . Z\varphi_1(x)}{\partial x} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 . Z\varphi_1(x)}{\partial x^2} = 0,$$

u. s. w.

$$\frac{\partial^{\alpha-1} f(x)}{\partial x^{\alpha-1}} - \frac{\partial^{\alpha-1} . Z\varphi_1(x)}{\partial x^{\alpha-1}} = 0.$$

Entwickelt man nun die Differentialquotienten des Products $Z\varphi_1(x)$, und bemerkt, dass, wie man leicht durch Differentiation der Grösse Z findet, für $x=a$

$$Z = A,$$

$$\frac{\partial Z}{\partial x} = 1A_1,$$

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} = 1.2A_2,$$

$$\frac{\partial^3 Z}{\partial x^3} = 1.2.3A_3,$$

u. s. w.

$$\frac{\partial^{\alpha-1} Z}{\partial x^{\alpha-1}} = 1.2.3.4\ldots(\alpha-1)A_{\alpha-1}$$

ist; so erhält man die folgenden Gleichungen:

$$f(a) - A\varphi_1(a) = 0,$$

$$f'(a) - A\varphi'_1(a) - 1A_1\varphi_1(a) = 0,$$

$$f''(a) - A\varphi''_1(a) - 2.1A_1\varphi'_1(a) - 1.2A_2\varphi_1(a) = 0,$$

$$f'''(a) - A\varphi'''_1(a) - 3.1A_1\varphi''_1(a) - 3.1.2A_2\varphi'_1(a) - 1.2.3A_3\varphi_1(a) = 0,$$

u. s. w. u. s. w.

die man aber nach ihrem sich leicht kund gebenden allgemeinen Gesetze immer bloss bis zur αten fortsetzen darf, welches, wie man sogleich übersieht, auch völlig hinreichend ist, um die gesuchten Grössen A, A_1, A_2, A_3, . . . $A_{\alpha-1}$ nach und nach sämmtlich bestimmen zu können.

IV. Eine zweite Methode zur Bestimmung der in Rede stehenden Grössen ergiebt sich aus der Gleichung 2. in I. Da nämlich $f_\alpha(x)$ eine ganze rationale algebraische Function ist, und nach der Voraussetzung $\varphi_1(x)$ für $x = a$ nicht verschwindet; so wird offenbar weder die Function $\frac{f_\alpha(x)}{\varphi_1(x)}$ selbst, noch irgend einer ihrer Differentialquotienten für $x = a$ unendlich, und man erhält also durch Differentiation der Gleichung 2. in I. nach II. die folgenden für $x = a$ geltenden Gleichungen:

$$\frac{f(x)}{\varphi_1(x)} - Z = 0,$$

$$\frac{1}{\partial x}\partial.\frac{f(x)}{\varphi_1(x)} - \frac{\partial Z}{\partial x} = 0,$$

$$\frac{1}{\partial x^2}\partial^2.\frac{f(x)}{\varphi_1(x)} - \frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} = 0,$$

u. s. w.

$$\frac{1}{\partial x^{\alpha-1}}\partial^{\alpha-1}.\frac{f(x)}{\varphi_1(x)} - \frac{\partial^{\alpha-1} Z}{\partial x^{\alpha-1}} = 0;$$

und folglich nach III.

$$\frac{f(x)}{\varphi_1(x)} - A = 0,$$

$$\frac{1}{\partial x}\partial.\frac{f(x)}{\varphi_1(x)} - 1A_1 = 0,$$

$$\frac{1}{\partial x^2}\partial^2.\frac{f(x)}{\varphi_1(x)} - 1.2A_2 = 0,$$

u. s. w.

$$\frac{1}{\partial x^{\alpha-1}}\,\partial^{\alpha-1}.\frac{f(x)}{\varphi_1(x)} - 1.2.3\ldots(\alpha-1)A_{\alpha-1} = 0;$$

also

$$A = \frac{f(a)}{\varphi_1(a)},$$

$$A_1 = \frac{1}{1.\partial x}\,\partial.\frac{f(x)}{\varphi_1(x)},$$

$$A_2 = \frac{1}{1.2\partial x^2}\,\partial^2.\frac{f(x)}{\varphi_1(x)},$$

u. s. w.

$$A_{\alpha-1} = \frac{1}{1.2.3\ldots(\alpha-1)\partial x^{\alpha-1}}\,\partial^{\alpha-1}.\frac{f(x)}{\varphi_1(x)},$$

unter der Bedingung nämlich, dass man nach der Differentiation in allen Differentialquotienten $x = a$ setzt.

§. 22.

Um das Vorhergehende durch ein Beispiel zu erläutern, wollen wir die Function

$$\frac{1}{x^3(x-1)^2(x+1)}$$

betrachten.

Nach dem Vorhergehenden haben wir

$$\frac{1}{x^3(x-1)^2(x+1)} = \frac{A}{x^3} + \frac{A_1}{x^2} + \frac{A_2}{x} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{B_1}{x-1} + \frac{C}{x+1}$$

zu setzen.

Da in diesem Falle $f(x) = 1$ ist; so ist $f'(x) = f''(x) = f'''(x) = \ldots. = 0$.

Um nun zuerst A, A_1, A_2 zu bestimmen, müssen wir $a = 0$ und

$$\varphi_1(x) = (x-1)^2(x+1) = x^3 - x^2 - x + 1;$$

also

$$\varphi'_1(x) = 3x^2 - 2x - 1, \quad \varphi''_1(x) = 6x - 2,$$

und folglich

$$\varphi_1(a) = 1, \quad \varphi'_1(a) = -1, \quad \varphi''_1(a) = -2$$

setzen. Also haben wir nach §. 21. III. zur Bestimmung von A, A_1, A_2 die drei Gleichungen

$$1 - A = 0, \quad A - A_1 = 0, \quad 2A + 2A_1 - 2A_2 = 0,$$

aus denen sich $A = 1$, $A_1 = 1$, $A_2 = 2$ ergiebt.

Um ferner B und B_1 zu bestimmen, setzen wir $a_1 = 1$ und

$$\varphi_1(x) = x^3(x+1) = x^4 + x^3, \quad \varphi'_1(x) = 4x^3 + 3x^2;$$

also $\varphi_1(a_1) = 2$, $\varphi'_1(a_1) = 7$, und haben nun nach §. 21. III. zur Bestimmung von B und B_1 die beiden Gleichungen

$$1 - 2B = 0, \quad -7B - 2B_1 = 0,$$

aus denen sich $B = \frac{1}{2}$, $B_1 = -\frac{7}{4}$ ergiebt.

Um endlich C zu bestimmen, setzen wir $a_2 = -1$, und

$$\varphi_2(x) = x^3(x-1)^2 = x^5 - 2x^4 + x^3;$$

also $\varphi_2(a_2) = -4$, und haben nun nach §. 21. III. zur Bestimmung von C die Gleichung $1 + 4C = 0$, aus der sich $C = -\frac{1}{4}$ ergiebt.

Also ist

$$\frac{1}{x^3(x-1)^2(x+1)} =$$

$$\frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^2} + \frac{2}{x} + \frac{1}{2(x-1)^2} - \frac{7}{4(x-1)} - \frac{1}{4(x+1)}.$$

Dasselbe Resultat würde man mittelst der in §. 21. IV. entwickelten Formeln gefunden haben.

Um noch einen Fall zu betrachten, setze man

$$\frac{x^3 + 2x^2 - 3x + 2}{(x-2)^2(x+3)(x-1)} = \frac{A}{(x-2)^2} + \frac{A_1}{x-2} + \frac{B}{x+3} + \frac{C}{x-1};$$

so erhält man, weil jetzt

$$f(x) = x^3 + 2x^2 - 3x + 2$$

ist, nach §. 21. III. zur Bestimmung von A, A_1, B, C leicht die folgenden Gleichungen:

$$12 - 5A = 0, \quad 17 - 6A - 5A_1 = 0, \quad 2 + 100B = 0, \quad 2 - 4C = 0.$$

Da sich nun aus diesen Gleichungen $A = \frac{12}{5}$, $A_1 = \frac{13}{25}$, $B = -\frac{1}{50}$, $C = \frac{1}{2}$ ergiebt; so ist

$$\frac{x^3 + 2x^2 - 3x + 2}{(x-2)^2(x+3)(x-1)} =$$

$$\frac{12}{5(x-2)^2} + \frac{13}{25(x-2)} - \frac{1}{50(x+3)} + \frac{1}{2(x-1)}.$$

§. 23.

Ganz in der Kürze wollen wir nun noch auf eine Methode zur Zerlegung der gebrochenen Functionen in Partialbrüche aufmerksam machen, die bei praktischen Rechnungen zuweilen von Nutzen seyn kann.

Um nämlich z. B. die schon in §. 17. betrachtete gebrochene Function

$$\frac{x^2 + 1}{x(x-1)(x+1)}$$

in Partialbrüche zu zerlegen, setze man

$$\frac{x^2 + 1}{x(x-1)(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+1},$$

und addire nun die Brüche auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens zusammen; so erhält man

$$\frac{x^2+1}{x(x-1)(x+1)} = \frac{(A+B+C)x^2+(B-C)x-A}{x(x-1)(x+1)},$$

und folglich

$$x^2+1 = (A+B+C)x^2+(B-C)x-A.$$

Damit nun diese Gleichung und folglich auch die Gleichung

$$\frac{x^2+1}{x(x-1)(x+1)} = \frac{A}{x}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{x+1},$$

wie es erforderlich ist, für jedes x erfüllt werde, muss man die Grössen A, B, C aus den drei Gleichungen

$$A+B+C=1,\quad B-C=0,\quad -A=1;$$

indem man nämlich die Coefficienten der gleichnamigen Potenzen von x auf beiden Seiten der Gleichung

$$x^2+1 = (A+B+C)x^2+(B-C)x-A$$

einander gleich setzt, bestimmen, und erhält auf diese Art ohne Schwierigkeit $A=-1$, $B=1$, $C=1$; also

$$\frac{x^2+1}{x(x-1)(x+1)} = -\frac{1}{x}+\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x+1},$$

ganz wie in §. 17.

Ein ganz ähnliches Verfahren lässt sich in dem in §. 21. betrachteten Falle anwenden, wobei wir aber, da die Sache nicht die geringste Schwierigkeit hat, und sich aus dem Vorhergehenden unmittelbar ergiebt, hier nicht länger verweilen.

§. 24.

I. In der Theorie der Gleichungen wird in aller Strenge bewiesen, dass sich jederzeit ein reeller oder imaginärer Werth der unabhängigen veränderlichen Grösse einer ganzen rationalen algebraischen Function finden lässt, für welchen dieselbe verschwindet. Wegen der Schwierigkeit und Weitläufigkeit dieses Beweises kann derselbe hier nicht mitgetheilt werden, und wir müssen daher wegen des in Rede stehenden wichtigen Satzes überhaupt auf die Theorie der Gleichungen verweisen, da derselbe nach unserer Meinung nicht, wie früher häufig geschah, als ein für sich klarer Satz angenommen werden darf. Unter Voraussetzung dieses Satzes lässt sich aber die folgende Betrachtung über die ganzen rationalen algebraischen Functionen anstellen.

Es sey $\varphi(x)$ eine ganze rationale algebraische Function des $n$ten Grades, und a ein Werth von x, für welchen dieselbe verschwindet, den es nach der obigen einleitenden Bemerkung immer geben muss; so ist nach §. 12.

$$\varphi(x) = (x-a)\,\varphi_1(x),$$

wo $\varphi_1(x)$ eine ganze rationale algebraische Function des $(n-1)$sten Grades ist.

Ist nun ferner a_1 ein Werth von x, für welchen die Function $\varphi_1(x)$ verschwindet; so ist nach §. 12.

$$\varphi_1(x) = (x-a_1)\,\varphi_2(x),$$

wo $\varphi_2(x)$ eine ganze rationale algebraische Function des $(n-2)$ten Grades ist.

Eben so ist, wenn a_2 ein Werth von x ist, für welchen die Function $\varphi_2(x)$ verschwindet, nach §. 12.

$$\varphi_2(x) = (x-a_2)\,\varphi_3(x),$$

wo $\varphi_3(x)$ eine ganze rationale algebraische Function des $(n-3)$ten Grades ist.

Auf diese Art weiter gehend, kommt man endlich auf

$$\varphi_{n-1}(x) = (x-a_{n-1})\,\varphi_n(x),$$

wo $\varphi_n(x)$ eine ganze rationale algebraische Function des $(n-n)$ten $=$ 0ten Grades, d. i. eine constante Grösse ist, die wir durch C bezeichnen wollen.

Daher haben wir jetzt die folgenden Gleichungen:

$$\begin{aligned}
\varphi(x) &= (x-a)\,\varphi_1(x),\\
\varphi_1(x) &= (x-a_1)\,\varphi_2(x),\\
\varphi_2(x) &= (x-a_2)\,\varphi_3(x),\\
&\cdots\cdots\\
\varphi_{n-2}(x) &= (x-a_{n-2})\,\varphi_{n-1}(x),\\
\varphi_{n-1}(x) &= C(x-a_{n-1});
\end{aligned}$$

und erhalten aus denselben, wenn wir auf beiden Seiten der Gleichheitszeichen alle Grössen in einander multipliciren,

$$\varphi(x) = C(x-a)(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_{n-1}),$$

so dass sich also jede ganze rationale algebraische Function des $n$ten Grades als ein Product mit n Factoren des ersten Grades von der allgemeinen Form $x-p$ darstellen lässt, wenn man dieses Product nur noch mit einer gewissen, vorher durch C bezeichneten constanten Grösse multiplicirt.

Ueberlegt man, dass das höchste Glied des Products

$$C(x-a)(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_{n-1})$$

die Grösse Cx^n ist; so erhellet leicht, dass die Constante C jederzeit der Coefficient des höchsten Gliedes der Function $\varphi(x)$ ist, welches sich übrigens auch durch den, in §. 13. bei der Bestimmung der dortigen Constante C gebrauchten ganz ähnliche Schlüsse beweisen lassen würde.

Unter den Grössen $a, a_1, a_2, a_3, \ldots a_{n-1}$ können natürlich gleiche vorkommen. Nimmt man nun aber an, dass die Grös-

sen $a, a_1, a_2, \ldots a_k$ sämmtlich unter einander ungleich sind; so wird sich die ganze rationale algebraische Function $\varphi(x)$ nach dem Vorhergehenden offenbar immer als ein Product von der Form

$$C(x-a)^{\alpha}(x-a_1)^{\alpha_1}(x-a_2)^{\alpha_2}\ldots(x-a_k)^{\alpha_k},$$

wo C der Coefficient des höchsten Gliedes in $\varphi(x)$, und

$$\alpha+\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\ldots+\alpha_k=n$$

ist, darstellen lassen.

Ist nun ferner $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$, wo $\varphi(x)$ wie vorher eine ganze rationale Function des $n$ten, $f(x)$ eine ganze rationale algebraische Function eines niedrigern Grades bezeichnen soll, eine beliebige echte gebrochene rationale algebraische Function; so wird sich dieselbe nach dem Vorhergehenden jederzeit auf die Form

$$\frac{f(x)}{C(x-a)^{\alpha}(x-a_1)^{\alpha_1}(x-a_2)^{\alpha_2}\ldots(x-a_k)^{\alpha_k}},$$

wo $a, a_1, a_2, \ldots a_k$ sämmtlich unter einander ungleich sind, C der Coefficient des höchsten Gliedes in $\varphi(x)$ und

$$\alpha+\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\ldots+\alpha_k=n$$

ist, bringen, und folglich nach §. 16. und §. 21. jederzeit als ein Aggregat von lauter Brüchen von der allgemeinen Form

$$\frac{A}{C(x-p)^q},$$

wo A, p, q, so wie C, constante Grössen bezeichnen, darstellen lassen, eine Wahrheit, die für alles Folgende von der höchsten Wichtigkeit ist.

II. Es sind hierbei nun aber noch die folgenden ebenfalls sehr wichtigen Bemerkungen zu machen. Wenn nämlich die Function $\varphi(x)$, wie dies häufig der Fall ist, imaginäre Factoren des ersten Grades enthält, so werden, wenn man die gebrochene Function $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ nach dem Vorhergehenden in Partialbrüche zerlegt, die den imaginären Factoren des ersten Grades der Function $\varphi(x)$ entsprechenden Partialbrüche ebenfalls imaginär seyn. In der Theorie der Gleichungen wird aber streng bewiesen, dass, wenn die Function $\varphi(x)$, vorausgesetzt, dass dieselbe reell ist, den imagirären Factor $(x-p-q\sqrt{-1})^{\alpha}$ hat, jederzeit auch $(x-p+q\sqrt{-1})^{\alpha}$ ein Factor der Function $\varphi(x)$ ist. Weil nun diese beiden imaginären Factoren, mit einander verbunden, das reelle Product $\{(x-p)^2+q^2\}^{\alpha}$ geben; so ist klar, dass sich die Functin $\varphi(x)$ jederzeit in lauter reelle Factoren des ersten oder des zweiten Grades zerlegen lassen wird.

Setzen wir nun der Kürze wegen

$$(x-p)^2+q^2=P$$

und $\varphi(x)=CP^n\varphi_1(x)$, wo die ganze rationale algebraische Function $\varphi_1(x)$ den Factor P nicht mehr enthalten soll; so kann man nach dem Obigen bekanntlich immer

$$\frac{f(x)}{P\varphi_1(x)}=\frac{A}{x-p-q\sqrt{-1}}+\frac{B}{x-p+q\sqrt{-1}}+\frac{Q}{\varphi_1(x)}$$

setzen, wo A und B constante Grössen sind und Q eine ganze rationale algebraische Function von x bezeichnet. Multiplicirt man auf beiden Seiten dieser Gleichung mit $P\varphi_1(x)$; so ergiebt sich die Gleichung

$$f(x)=\{A(x-p+q\sqrt{-1})+B(x-p-q\sqrt{-1})\}\varphi_1(x)+PQ,$$

aus der, wenn man zuerst $x=p+q\sqrt{-1}$, dann $x=p-q\sqrt{-1}$ setzt, ferner

$$A=\frac{1}{2q\sqrt{-1}}\cdot\frac{f(p+q\sqrt{-1})}{\varphi_1(p+q\sqrt{-1})},\quad B=-\frac{1}{2q\sqrt{-1}}\cdot\frac{f(p-q\sqrt{-1})}{\varphi_1(p-q\sqrt{-1})}$$

folgt.

Mit Hülfe des Binomial-Theorems für Potenzen mit positiven ganzen Exponenten überzeugt man sich aber sehr leicht, dass sich, mit Beziehung der obern und untern Zeichen auf einander, die Grössen

$$f(p\pm q\sqrt{-1}) \text{ und } \varphi_1(p\pm q\sqrt{-1})$$

jederzeit respective auf die Form

$$s\pm t\sqrt{-1} \text{ und } s_1\pm t_1\sqrt{-1}$$

bringen lassen*), und dass also

---

*) Noch leichter erhellet dies mittelst der in §. 86. und §. 88. der Differentialrechnung bewiesenen Sätze. Nach §. 86. kann man nämlich

$$p\pm q\sqrt{-1}=\varrho(\cos\theta\pm\sin\theta\sqrt{-1})$$

setzen. Ist dann überhaupt

$$f(x)=a+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\ldots+a_nx^n;$$

so ist

$$\begin{aligned}f(p\pm q\sqrt{-1})=a&+a_1\varrho(\cos\theta\pm\sin\theta\sqrt{-1})\\&+a_2\varrho^2(\cos\theta\pm\sin\theta\sqrt{-1})^2\\&\cdots\cdots\cdots\\&+a_n\varrho^n(\cos\theta\pm\sin\theta\sqrt{-1})^n,\end{aligned}$$

d. i. nach §. 88.

$$\begin{aligned}f(p\pm q\sqrt{-1})=a&+a_1\varrho\cos\theta+a_2\varrho^2\cos2\theta+\ldots+a_n\varrho^n\cos n\theta\\&\pm(a_1\varrho\sin\theta+a_2\varrho^2\sin2\theta+\ldots+a_n\varrho^n\sin n\theta)\sqrt{-1},\end{aligned}$$

welches offenbar die verlangte Form ist.

$$A=\frac{1}{2q\sqrt{-1}}\cdot\frac{s+t\sqrt{-1}}{s_1+t_1\sqrt{-1}},\quad B=-\frac{1}{2q\sqrt{-1}}\cdot\frac{s+t\sqrt{-1}}{s_1-t_1\sqrt{-1}}$$

gesetzt werden kann. Multiplicirt man aber den Ausdruck von A im Zähler und Nenner mit $s_1-t_1\sqrt{-1}$, den Ausdruck von B im Zähler und Nenner mit $s_1+t_1\sqrt{-1}$; so erhält man nach leichter Rechnung

$$A=\frac{1}{2q\sqrt{-1}}\cdot\frac{ss_1+tt_1-(st_1-s_1t)\sqrt{-1}}{s_1s_1+t_1t_1},$$

$$B=-\frac{1}{2q\sqrt{-1}}\cdot\frac{ss_1+tt_1+(st_1-s_1t)\sqrt{-1}}{s_1s_1+t_1t_1};$$

oder, wenn man nun noch Zähler und Nenner jedes dieser beiden Ausdrücke mit $\sqrt{-1}$ multiplicirt,

$$A=\frac{s_1t-st_1}{2q(s_1s_1+t_1t_1)}-\frac{ss_1+tt_1}{2q(s_1s_1+t_1t_1)}\sqrt{-1},$$

$$B=\frac{s_1t-st_1}{2q(s_1s_1+t_1t_1)}+\frac{ss_1+tt_1}{2q(s_1s_1+t_1t_1)}\sqrt{-1},$$

und es erhellet also hieraus, dass die Grössen A und B immer von der Form

$$A=m-n\sqrt{-1},\quad B=m+n\sqrt{-1}$$

seyn werden. Also ist nach dem Obigen

$$\frac{f(x)}{P\varphi_1(x)}=\frac{m-n\sqrt{-1}}{x-p-q\sqrt{-1}}+\frac{m+n\sqrt{-1}}{x-p+q\sqrt{-1}}+\frac{Q}{\varphi_1(x)},$$

oder, wenn man die beiden ersten Brüche mit einander vereinigt,

$$\frac{f(x)}{P\varphi_1(x)}=\frac{2(nq-mp)+2mx}{P}+\frac{Q}{\varphi_1(x)},$$

wofür wir kürzer

$$\frac{f(x)}{P\varphi_1(x)}=\frac{M+Nx}{P}+\frac{Q}{\varphi_1(x)}$$

schreiben wollen.

Hieraus folgt nun ferner

$$\frac{f(x)}{P^2\varphi_1(x)}=\frac{M+Nx}{P^2}+\frac{Q}{P\varphi_1(x)}$$

$$=\frac{M+Nx}{P^2}+\frac{M_1+N_1x}{P}+\frac{Q_1}{\varphi_1(x)},$$

und hieraus ergiebt sich auf ähnliche Art

$$\frac{f(x)}{P^3\varphi_1(x)}=\frac{M+Nx}{P^3}+\frac{M_1+N_1x}{P^2}+\frac{Q_1}{P\varphi_1(x)}$$

$$=\frac{M+Nx}{P^3}+\frac{M_1+N_1x}{P^2}+\frac{M_2+N_2x}{P}+\frac{Q_2}{\varphi_1(x)},$$

wo nun auch schon erhellet, wie man auf diese Art weiter gehen kann.

Ueberhaupt wird nämlich immer

$$\frac{f(x)}{(x^2-2px+p^2+q^2)^\alpha \varphi_1(x)} = \frac{M+Nx}{(x^2-2px+p^2+q^2)^\alpha}$$
$$+\frac{M_1+N_1x}{(x^2-2px+p^2+q^2)^{\alpha-1}}$$
$$+\frac{M_2+N_2x}{(x^2-2px+p^2+q^2)^{\alpha-2}}$$
u. s. w.
$$+\frac{M_{\alpha-1}+N_{\alpha-1}x}{x^2-2px+p^2+q^2}+\frac{Q_{\alpha-1}}{\varphi_1(x)},$$

wo $Q_{\alpha-1}$ eine ganze rationale algebraische Function von x bezeichnet, gesetzt werden können.

Aus dieser Gleichung folgt aber

$$(x^2-2px+p^2+q^2)^\alpha Q_{\alpha-1} = f(x) - (M+Nx)\varphi_1(x)$$
$$-(M_1+N_1x)(x^2-2px+p^2+q^2)\varphi_1(x)$$
$$-(M_2+N_2x)(x^2-2px+p^2+q^2)^2\varphi_1(x)$$
u. s. w.
$$-(M_{\alpha-1}+N_{\alpha-1}x)(x^2-2px+p^2+q^2)^{\alpha-1}\varphi_1(x),$$

und es erhellet nun, wenn wir der Kürze wegen

$$S = f(x) - (M+Nx)\varphi_1(x)$$
$$-(M_1+N_1x)(x^2-2px+p^2+q^2)\varphi_1(x)$$
$$-(M_2+N_2x)(x^2-2px+p^2+q^2)^2\varphi_1(x)$$
u. s. w.
$$-(M_{\alpha-1}+N_{\alpha-1}x)(x^2-2px+p^2+q^2)^{\alpha-1}\varphi_1(x)$$

setzen, auf ganz ähnliche Art wie in §. 21. II. sehr leicht, dass für

$$x^2-2px+p^2+q^2=0$$

jederzeit

$$S=0,\quad \partial S=0,\quad \partial^2 S=0,\quad \partial^3 S=0,\ \ldots\ \partial^{\alpha-1}S=0$$

ist.

Weil nun aber sowohl für $x=p+q\sqrt{-1}$, als auch für $x=p-q\sqrt{-1}$,

$$x^2-2px+p^2+q^2=0$$

ist; so ergeben sich aus dem Obigen offenbar immer 2α Gleichungen zwischen den Grössen M, M_1, M_2, . . . $M_{\alpha-1}$; N, N_1, N_2, . . . $N_{\alpha-1}$, welche also zur vollständigen Bestimmung dieser Grössen gerade hinreichen.

Im Allgemeinen werden diese 2α Gleichungen die Form

$$V \pm U\sqrt{-1}=0,$$
$$V_1 \pm U_1\sqrt{-1}=0,$$
$$V_2 \pm U_2\sqrt{-1}=0,$$
u. s. w.
$$V_{\alpha-1} \pm U_{\alpha-1}\sqrt{-1}=0$$

haben, und führen folglich unmittelbar zu den 2α reellen Gleichungen

$$V=0,\quad V_1=0,\quad V_2=0,\ldots V_{\alpha-1}=0;$$
$$U=0,\quad U_1=0,\quad U_2=0,\ldots U_{\alpha-1}=0$$

zwischen den gesuchten Grössen.

Fassen wir nun alles Obige zusammen; so ergiebt sich, **dass jede reelle gebrochene rationale algebraische Function als ein Aggregat reeller Brüche von der Form**

$$\frac{A}{C(x-a)^{\gamma}} \text{ oder } \frac{M+Nx}{C(x^2-2px+p^2+q^2)^{\alpha}},$$

und, wenn die gegebene Function eine unechte gebrochene Function ist, einer ganzen rationalen algebraischen Function dargestellt werden kann.

Drittes Kapitel.

Entwickelung der wichtigsten Reductionsformeln.

§. 25.

Von sehr vielfachem Gebrauche sind in der Integralrechnung gewisse Formeln, mittelst welcher in vielen Fällen Integrale durch andere Integrale ausgedrückt werden können, welche entweder schon bekannt, oder wenigstens einfacher wie die zu findenden Integrale sind, woraus die grosse Bedeutung dieser Formeln, die überhaupt **Reductionsformeln** genannt werden, für alle Theile der Integralrechnung von selbst erhellet. Die wichtigsten dieser Formeln, welche fast in jedem der folgenden Kapitel Anwendung finden werden, wollen wir daher in diesem Kapitel entwickeln.

§. 26.

Bevor wir aber zu dieser Entwickelung selbst übergehen, machen wir auf eine, sich unmittelbar aus den bekannten Formeln der Differentialrechnung ergebende Formel aufmerksam, welche für alles Folgende von der grössten Wichtigkeit ist.

Bezeichnet nämlich X eine Function von x; so ist bekanntlich

$$\partial . X^{n+1} = (n+1)\, X^n \partial X,$$

und folglich nach §. 4.

$$X^{n+1} = (n+1)\int X^n \partial X + C;$$

also

$$\int X^n \partial X = \frac{X^{n+1}}{n+1} + C.$$

Als Ausnahmefall von dieser Formel ist der Fall zu bemerken, wenn $n = -1$ ist, weil dann $n + 1 = 0$ ist. Weil nun aber bekanntlich, wenn man, unter der Voraussetzung, dass X reell ist, das obere oder untere Zeichen nimmt, jenachdem X positiv oder negativ ist,

$$\partial l(\pm X) = \frac{\pm \partial X}{\pm X} = \frac{\partial X}{X}$$

ist; so ist

$$\int X^{-1}\partial X = \int \frac{\partial X}{X} = l(\pm X) + C,$$

mit derselben Bestimmung wie vorher wegen des Zeichens. Um aber die durch das doppelte Zeichen verursachte Unbequemlichkeit zu vermeiden, wollen wir im Folgenden, was offenbar verstattet ist, immer

$$\int X^{-1}\partial X = \int \frac{\partial X}{X} = \tfrac{1}{2}\, l.X^2 + C$$

setzen.

§. 27.

Allgemeinste Reductionsformel.

Bezeichnen P und X Functionen von x; so ist bekanntlich

$$\partial . PX = P\partial X + X\partial P,$$

und folglich nach §. 6.

$$PX = \int P\partial X + \int X\partial P + C'.$$

Setzen wir aber

$$\partial P = Y\partial x, \quad P = \int Y\partial x;$$

so wird

$$X\int Y\partial x = \int \partial X \int Y\partial x + \int XY\partial x + C',$$

und folglich

$$\int XY\partial x = X\int Y\partial x - \int \partial X\int Y\partial x + C,$$

oder, wenn wir, was in der Folge der Kürze wegen meistens geschehen wird, die willkührliche Constante weglassen,

$$\int XY\partial x = X\int Y\partial x - \int \partial X\int Y\partial x.$$

Natürlich ist auch

$$\int XY\partial x = Y\int X\partial x - \int \partial Y\int X\partial x.$$

§. 28.

Reductionsformeln für das Integral

$$\int x^{m-1}(a + bx^n)^p\partial x.$$

Der Kürze wegen wollen wir $a + bx^n = X$ setzen.

Nach §. 27. ist

$$\int x^{m-1}X^p\partial x = X^p\int x^{m-1}\partial x - \int\partial.X^p\int x^{m-1}\partial x,$$

und folglich nach den Regeln der Differentialrechnung, nach §. 26. und §. 4.

$$1.\quad \int x^{m-1}X^p\,\partial x = \frac{x^mX^p}{m} - \frac{pnb}{m}\int x^{m+n-1}X^{p-1}\partial x.$$

Drückt man nun das Integral auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens durch das Integral auf der linken Seite des Gleichheitszeichens aus; so erhält man

$$\int x^{m+n-1}X^{p-1}\partial x = \frac{x^mX^p}{pnb} - \frac{m}{pnb}\int x^{m-1}X^p\,\partial x,$$

und folglich, wenn man in dieser Gleichung $m-n$ für m, $p+1$ für p setzt,

$$2.\quad \int x^{m-1}X^p\,\partial x = \frac{x^{m-n}X^{p+1}}{(p+1)nb} - \frac{m-n}{(p+1)nb}\int x^{m-n-1}X^{p+1}\partial x.$$

Ferner ist nach §. 6.

$$3.\quad \int x^{m-1}X^p\,\partial x = \int x^{m-1}X^{p-1}(a+bx^n)\partial x$$
$$= a\int x^{m-1}X^{p-1}\partial x + b\int x^{m+n-1}X^{p-1}\partial x.$$

Führen wir nun in diese Gleichung für $\int x^{m-1}X^p\partial x$ den Ausdruck 1. ein; so erhalten wir

$$\frac{x^mX^p}{m} - \frac{pnb}{m}\int x^{m+n-1}X^{p-1}\partial x$$
$$= a\int x^{m-1}X^{p-1}\partial x + b\int x^{m+n-1}X^{p-1}\partial x,$$

und folglich, wenn wir mittelst dieser Gleichung $\int x^{m-1}X^{p-1}\partial x$ bestimmen,

$$\int x^{m-1}X^{p-1}\partial x = \frac{x^mX^p}{ma} - \frac{(m+np)b}{ma}\int x^{m+n-1}X^{p-1}\partial x;$$

also, wenn wir in dieser Gleichung $p+1$ für p setzen,

$$4.\quad \int x^{m-1}X^p\,\partial x = \frac{x^mX^{p+1}}{ma} - \frac{(m+n+np)b}{ma}\int x^{m+n-1}X^p\partial x.$$

Drücken wir aber mittelst dieser Gleichung das Integral auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens durch das Integral auf der linken Seite des Gleichheitszeichens aus; so erhalten wir

$$\int x^{m+n-1}X^p\,\partial x = \frac{x^mX^{p+1}}{(m+n+np)b} - \frac{ma}{(m+n+np)b}\int x^{m-1}X^p\,\partial x,$$

und folglich, wenn $m-n$ für m gesetzt wird,

$$5.\quad \int x^{m-1}X^p\,\partial x = \frac{x^{m-n}X^{p+1}}{(m+np)b} - \frac{(m-n)a}{(m+np)b}\int x^{m-n-1}X^p\,\partial x.$$

Wenden wir auf das Integral $\int x^{m+n-1} X^{p-1} \partial x$ in der Gleichung 3. die Formel 2. an; so erhalten wir

$$\int x^{m-1} X^p \partial x = a \int x^{m-1} X^{p-1} \partial x + b \left\{ \frac{x^m X^p}{pnb} - \frac{m}{pnb} \int x^{m-1} X^p \partial x \right\},$$

und folglich, wenn wir aus dieser Gleichung $\int x^{m-1} X^p \partial x$ entwickeln:

$$6. \int x^{m-1} X^p \partial x = \frac{x^m X^p}{m+np} + \frac{pna}{m+np} \int x^{m-1} X^{p-1} \partial x.$$

Bestimmen wir nun endlich aus dieser Gleichung $\int x^{m-1} X^{p-1} \partial x$ durch $\int x^{m-1} X^p \partial x$; so erhalten wir

$$\int x^{m-1} X^{p-1} \partial x = -\frac{x^m X^p}{pna} + \frac{m+np}{pna} \int x^{m-1} X^p \partial x,$$

und folglich, wenn wir $p+1$ für p setzen,

$$7. \int x^{m-1} X^p \partial x = -\frac{x^m X^{p+1}}{(p+1)na} + \frac{m+n+np}{(p+1)na} \int x^{m-1} X^{p+1} \partial x.$$

Wir haben also jetzt die sechs folgenden höchst wichtigen Gleichungen:

$$\text{I.} \int x^{m-1} X^p \partial x = \frac{x^m X^p}{m} - \frac{pnb}{m} \int x^{m+n-1} X^{p-1} \partial x,$$

$$\text{II.} \int x^{m-1} X^p \partial x = \frac{x^{m-n} X^{p+1}}{(p+1)nb} - \frac{m-n}{(p+1)nb} \int x^{m-n-1} X^{p+1} \partial x,$$

$$\text{III.} \int x^{m-1} X^p \partial x = \frac{x^m X^{p+1}}{ma} - \frac{(m+n+np)b}{ma} \int x^{m+n-1} X^p \partial x,$$

$$\text{IV.} \int x^{m-1} X^p \partial x = \frac{x^{m-n} X^{p+1}}{(m+np)b} - \frac{(m-n)a}{(m+np)b} \int x^{m-n-1} X^p \partial x,$$

$$\text{V.} \int x^{m-1} X^p \partial x = \frac{x^m X^p}{m+np} + \frac{pna}{m+np} \int x^{m-1} X^{p-1} \partial x,$$

$$\text{VI.} \int x^{m-1} X^p \partial x = -\frac{x^m X^{p+1}}{(p+1)na} + \frac{m+n+np}{(p+1)na} \int x^{m-1} X^{p+1} \partial x.$$

Durch jede dieser sechs Formeln wird $\int x^{m-1} X^p \partial x$ durch ein anderes Integral von ganz ähnlicher Form ausgedrückt. Die Formel I. gebraucht man, wenn m vergrössert, p vermindert werden soll; die Formel II. wird angewandt, wenn man m zu vermindern, p zu vergrössern die Absicht hat; der Formel III. bedient man sich, wenn m vermehrt werden, p ungeändert bleiben soll; die Formel IV. gebraucht man, wenn man, indem p ungeändert bleibt, m zu vermindern die Absicht hat; die Formel V. wendet man an, wenn, indem m ungeändert bleibt, p

vermindert werden soll; dagegen bedient man sich der Formel VI., wenn, indem m ungeändert bleibt, p vergrössert werden soll. Dies gilt jedoch nur unter der Voraussetzung, dass n eine positive Grösse ist.

Die hier entwickelten sechs Reductionsformeln werden uns in der Folge die vortrefflichsten Dienste leisten.

§. 29.

Reductionsformeln für das Integral

$$\int x^{m-1}(a+bx^n+cx^{2n})^p\partial x.$$

Der Kürze wegen wollen wir wieder $a+bx^n+cx^{2n}=X$ setzen.

Nach §. 27. ist

$$\int x^{m-1}X^p\partial x = X^p\int x^{m-1}\partial x - \int\partial.X^p\int x^{m-1}\partial x$$
$$= \frac{x^mX^p}{m} - \frac{p}{m}\int(nbx^{n-1}+2ncx^{2n-1})x^mX^{p-1}\partial x,$$

d. i.

$$1.\quad \int x^{m-1}X^p\partial x =$$
$$\frac{x^mX^p}{m} - \frac{pnb}{m}\int x^{m+n-1}X^{p-1}\partial x - \frac{2pnc}{m}\int x^{m+2n-1}X^{p-1}\partial x.$$

Ferner ist

$$\int x^{m-1}X^p\partial x = \int x^{m-1}(a+bx^n+cx^{2n})X^{p-1}\partial x$$
$$= a\int x^{m-1}X^{p-1}\partial x + b\int x^{m+n-1}X^{p-1}\partial x + c\int x^{m+2n-1}X^{p-1}\partial x,$$

und folglich nach 1.

$$\frac{x^mX^p}{m} - \frac{pnb}{m}\int x^{m+n-1}X^{p-1}\partial x - \frac{2pnc}{m}\int x^{m+2n-1}X^{p-1}\partial x$$
$$= a\int x^{m-1}X^{p-1}\partial x + b\int x^{m+n-1}X^{p-1}\partial x + c\int x^{m+2n-1}X^{p-1}\partial x;$$

also, wie sich aus dieser Gleichung leicht ergiebt,

$$\int x^{m-1}X^{p-1}\partial x =$$
$$\frac{x^mX^p}{ma} - \frac{(m+pn)b}{ma}\int x^{m+n-1}X^{p-1}\partial x - \frac{(m+2pn)c}{ma}\int x^{m+2n-1}X^{p-1}\partial x,$$

und folglich, wenn man $p+1$ für p setzt,

$$2.\quad \int x^{m-1}X^p\partial x = \frac{x^mX^{p+1}}{ma} - \frac{(m+n+pn)b}{ma}\int x^{m+n-1}X^p\partial x$$
$$- \frac{(m+2n+2pn)c}{ma}\int x^{m+2n-1}X^p\partial x.$$

Setzt man nun aber in dieser Gleichung $m-2n$ für m; so erhält man

$$\int x^{m-2n-1}X^p\partial x=\frac{x^{m-2n}X^{p+1}}{(m-2n)a}-\frac{(m-n+pn)b}{(m-2n)a}\int x^{m-n-1}X^p\partial x$$
$$-\frac{(m+2pn)c}{(m-2n)a}\int x^{m-1}X^p\partial x,$$

und folglich nach leichter Rechnung

$$3.\quad \int x^{m-1}X^p\partial x=\frac{x^{m-2n}X^{p+1}}{(m+2pn)c}-\frac{(m-n+pn)b}{(m+2pn)c}\int x^{m-n-1}X^p\partial x$$
$$-\frac{(m-2n)a}{(m+2pn)c}\int x^{m-2n-1}X^p\partial x.$$

Wendet man diese Formel auf das Integral $\int x^{m+2n-1}X^{p-1}\partial x$ in der Formel 1. an; so erhält man nach 1.

$$\int x^{m-1}X^p\partial x=\frac{x^mX^p}{m}-\frac{pnb}{m}\int x^{m+n-1}X^{p-1}\partial x-\frac{2pnx^mX^p}{m(m+2pn)}$$
$$+\frac{2pn(m+pn)b}{m(m+2pn)}\int x^{m+n-1}X^{p-1}\partial x+\frac{2pna}{m+2pn}\int x^{m-1}X^{p-1}\partial x,$$

d. i.

$$4.\quad \int x^{m-1}X^p\partial x=$$
$$\frac{x^mX^p}{m+2pn}+\frac{2pna}{m+2pn}\int x^{m-1}X^{p-1}\partial x+\frac{pnb}{m+2pn}\int x^{m+n-1}X^{p-1}\partial x.$$

Nach den Gleichungen 4. und 1. hat man nun:

$$\int x^{m-1}X^{p+1}\partial x=\frac{x^mX^{p+1}}{m+2n+2pn}+\frac{2(p+1)na}{m+2n+2pn}\int x^{m-1}X^p\partial x$$
$$+\frac{(p+1)nb}{m+2n+2pn}\int x^{m+n-1}X^p\partial x,$$

$$\int x^{m+n-1}X^{p+1}\partial x=\frac{x^{m+n}X^{p+1}}{m+3n+2pn}+\frac{2(p+1)na}{m+3n+2pn}\int x^{m+n-1}X^p\partial x$$
$$+\frac{(p+1)nb}{m+3n+2pn}\int x^{m+2n-1}X^p\partial x,$$

$$\int x^{m-1}X^{p+1}\partial x=\frac{x^mX^{p+1}}{m}-\frac{(p+1)nb}{m}\int x^{m+n-1}X^p\partial x$$
$$-\frac{2(p+1)nc}{m}\int x^{m+2n-1}X^p\partial x;$$

und folglich, wenn der Kürze wegen

$$\int x^{m-1}X^p\partial x=P,\quad \int x^{m-1}X^{p+1}\partial x=Q,\quad \int x^{m+n-1}X^{p+1}\partial x=R,$$
$$\int x^{m+n-1}X^p\partial x=S,\quad \int x^{m+2n-1}X^p\partial x=T;$$

$$\frac{x^m X^{p+1}}{m+2n+2pn} = \varphi, \quad \frac{x^{m+n} X^{p+1}}{m+3n+2pn} = \psi, \quad \frac{x^m X^{p+1}}{m} = \chi;$$

$$\frac{(p+1)n}{m+2n+2pn} = \alpha, \quad \frac{(p+1)n}{m+3n+2pn} = \beta, \quad \frac{(p+1)n}{m} = \gamma$$

gesetzt wird:

$$Q = \varphi + 2\alpha a P + \alpha b S,$$
$$R = \psi + 2\beta a S + \beta b T,$$
$$Q = \chi - \gamma b S - 2\gamma c T.$$

Eliminirt man aus diesen drei Gleichungen zwischen den fünf Integralen P, Q, R, S, T die Integrale S, T; so erhält man eine Gleichung zwischen den drei Integralen P, Q, R.

Um diese Elimination auszuführen, eliminire man aus der zweiten und dritten Gleichung zuerst T, und verbinde mit der dadurch erhaltenen Gleichung die erste der drei obigen Gleichungen; so erhält man die beiden folgenden Gleichungen:

$$Q = \varphi + 2\alpha a P + \alpha b S,$$
$$\beta b Q + 2\gamma c R = 2\gamma c\psi + \beta b\chi + \beta\gamma(4ac-b^2)S,$$

aus denen man nun ferner S eliminiren muss.

Dadurch erhält man die Gleichung

$$2\alpha\beta\gamma a(4ac-b^2)P + \beta\{\alpha b^2 - (4ac-b^2)\gamma\}Q + 2\alpha\gamma bcR$$
$$= -\beta\gamma(4ac-b^2)\varphi + 2\alpha\gamma bc\psi + \alpha\beta b^2\chi,$$

oder, wie man leicht findet,

$$2\alpha\beta\gamma a(4ac-b^2)P + \beta\{\alpha b^2 - (4ac-b^2)\gamma\}Q + 2\alpha\gamma bcR$$
$$= \frac{2(p+1)^2n^2\{b^2-2ac+bcx^n\}x^m X^{p+1}}{m(m+2n+2pn)(m+3n+2pn)}.$$

Weil nun aber

$$\alpha\beta\gamma = \frac{(p+1)^3n^3}{m(m+2n+2pn)(m+3n+2pn)},$$

$$\beta\{\alpha b^2-(4ac-b^2)\gamma\} = \frac{2(p+1)^2n^2\{(b^2-4ac)(p+1)n-(2ac-b^2)m\}}{m(m+2n+2pn)(m+3n+2pn)},$$

$$\alpha\gamma = \frac{(p+1)^2n^2}{m(m+2n+2pn)}$$

ist; so ist offenbar

$$(b^2-2ac+bcx^n)x^m X^{p+1}$$
$$= (p+1)na(4ac-b^2)P + \{(b^2-4ac)(p+1)n-(2ac-b^2)m\}Q$$
$$+ (m+3n+2pn)bcR$$

oder

$$(2ac-b^2-bcx^n)x^m X^{p+1}$$
$$= (p+1)na(b^2-4ac)P - \{n(p+1)(b^2-4ac)-m(2ac-b^2)\}Q$$
$$- (m+3n+2pn)bcR,$$

und folglich, wenn wir der Kürze wegen

$$A = 2ac - b^2,$$
$$B = -bc,$$
$$C = n(p+1)(b^2 - 4ac) - m(2ac - b^2),$$
$$D = (m+3n+2pn)bc,$$
$$K = (p+1)(b^2 - 4ac)na$$

setzen:

$$5.\quad \int x^{m-1} X^p \partial x = \frac{A+Bx^n}{K} x^m X^{p+1} + \frac{1}{K}\int \left(Cx^{m-1} + Dx^{m+n-1}\right) X^{p+1} \partial x.$$

Wir haben also jetzt die folgenden fünf Reductionsformeln, welche im Folgenden auch häufige Anwendung finden werden:

$$\text{I.}\quad \int x^{m-1} X^p \partial x = \frac{x^m X^p}{m} - \frac{pnb}{m}\int x^{m+n-1} X^{p-1} \partial x - \frac{2pnc}{m}\int x^{m+2n-1} X^{p-1} \partial x,$$

$$\text{II.}\quad \int x^{m-1} X^p \partial x = \frac{x^m X^p}{m+2pn} + \frac{2pna}{m+2pn}\int x^{m-1} X^{p-1} \partial x + \frac{pnb}{m+2pn}\int x^{m+n-1} X^{p-1} \partial x,$$

$$\text{III.}\quad \int x^{m-1} X^p \partial x = \frac{x^m X^{p+1}}{ma} - \frac{(m+n+pn)b}{ma}\int x^{m+n-1} X^p \partial x - \frac{(m+2n+2pn)c}{ma}\int x^{m+2n-1} X^p \partial x,$$

$$\text{IV.}\quad \int x^{m-1} X^p \partial x = \frac{x^{m-2n} X^{p+1}}{(m+2pn)c} - \frac{(m-n+pn)b}{(m+2pn)c}\int x^{m-n-1} X^p \partial x - \frac{(m-2n)a}{(m+2pn)c}\int x^{m-2n-1} X^p \partial x,$$

$$\text{V.}\quad \int x^{m-1} X^p \partial x = \frac{A+Bx^n}{K} x^m X^{p+1} + \frac{1}{K}\int \left(Cx^{m-1} + Dx^{m+n-1}\right) X^{p+1} \partial x,$$

für

$$A = 2ac - b^2,$$
$$B = -bc,$$
$$C = n(p+1)(b^2 - 4ac) - m(2ac - b^2),$$
$$D = (m+3n+2pn)bc,$$
$$K = (p+1)(b^2 - 4ac)na.$$

Der Gebrauch dieser Formeln ist ein ähnlicher wie der bei den Formeln des vorigen Paragraphen erläuterte.

Viertes Kapitel.

Integration der rationalen algebraischen Differentiale.

§. 30.

Das Differential $X\partial x$, wo X eine Function von x bezeichnet, heisst ein rationales algebraisches Differential, wenn X eine rationale algebraische Function von x ist. Jenachdem X eine ganze oder gebrochene rationale algebraische Function von x ist, soll auch $X\partial x$ ein ganzes oder gebrochenes rationales algebraisches Differential genannt werden, und wir werden uns daher jetzt zunächst mit der Integration der ganzen, dann mit der Integration der gebrochenen rationalen algebraischen Differentiale zu beschäftigen haben.

§. 31.

Was zunächst die Integration der ganzen rationalen algebraischen Differentiale betrifft; so unterliegt dieselbe nicht der mindesten Schwierigkeit. Ist nämlich X eine ganze rationale algebraische Function; so ist dieselbe von der allgemeinen Form

$$X = A + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + \ldots + A_n x^n$$

und folglich nach §. 6. und §. 26.

$$\int X\partial x = A\int\partial x + A_1\int x\,\partial x + A_2\int x^2\partial x + \ldots + A_n\int x^n\,\partial x$$

$$= Ax + \tfrac{1}{2}A_1 x^2 + \tfrac{1}{3}A_2 x^3 + \ldots + \frac{1}{n+1}A_n x^{n+1},$$

wo nun eigentlich noch eine willkührliche Constante beigefügt werden müsste.

Hiernach lässt sich jedes ganze rationale algebraische Differential ohne alle Schwierigkeit integriren, und wir wollen daher jetzt gleich zu der, viel grössere Schwierigkeiten darbietenden Integration der gebrochenen rationalen algebraischen Differentiale übergehen.

§. 32.

Entwickelung des Integrals

$$\int\frac{\partial x}{(a+bx)^n}.$$

Man setze $a + bx = z$; so ist $b\partial x = \partial z$, und folglich nach §. 4. und §. 26.

$$\int\frac{\partial x}{(a+bx)^n} = \frac{1}{b}\int\frac{\partial z}{z^n} = \frac{1}{b}\int z^{-n}\partial z = -\frac{1}{(n-1)bz^{n-1}},$$

d. i.

$$\int\frac{\partial x}{(a+bx)^n} = -\frac{1}{(n-1)b(a+bx)^{n-1}},$$

wo nun aber der Fall, wenn $n = 1$ ist, noch besonders betrachtet werden muss.

In diesem Falle ist nach §. 4. und §. 26.

$$\int \frac{\partial x}{a + bx} = \frac{1}{b} \int \frac{\partial z}{z} = \frac{1}{b} \int z^{-1} \partial z = \frac{1}{2b} l . z^2 ,$$

d. i.

$$\int \frac{\partial x}{a + bx} = \frac{1}{2b} l . (a + bx)^2 .$$

§. 33.

Entwickelung des Integrals

$$\int \frac{x^{m-1} \partial x}{(a + bx)^n} .$$

Nach §. 28. IV. ist

$$\int \frac{x^{m-1} \partial x}{(a + bx)^n} = \frac{x^{m-1}}{(m-n) b (a + bx)^{n-1}} - \frac{(m-1)a}{(m-n)b} \int \frac{x^{m-2} \partial x}{(a + bx)^n} .$$

1. Wenn $m < n$ ist, kann man durch wiederholte Anwendung dieser Reductionsformel das gesuchte Integreal immer endlich auf das Integral

$$\int \frac{\partial x}{(a + bx)^n} ,$$

welches aus §. 32. bekannt ist, zurückführen.

So ist z. B., wenn wir der Kürze wegen $a + bx = X$ setzen,

$$\int \frac{x^3 \partial x}{X^6} = - \frac{x^3}{2bX^5} + \frac{3a}{2b} \int \frac{x^2 \partial x}{X^6}$$

$$= - \left\{ \frac{x^3}{2b} + \frac{ax^2}{2b^2} \right\} \frac{1}{X^5} + \frac{a^2}{b^2} \int \frac{x \partial x}{X^6}$$

$$= - \left\{ \frac{x^3}{2b} + \frac{ax^2}{2b^2} + \frac{a^2 x}{4b^3} \right\} \frac{1}{X^5} + \frac{a^3}{4b^3} \int \frac{\partial x}{X^6}$$

$$= - \left\{ \frac{x^3}{2b} + \frac{ax^2}{2b^2} + \frac{a^2 x}{4b^3} + \frac{a^3}{20 b^4} \right\} \frac{1}{X^5} .$$

2. Wenn aber $m = n$ ist; so ist die obige Reductionsformel nicht mehr anwendbar, weil dann $m - n = 0$ ist, und man muss also in diesem Falle das gesuchte Integral auf eine andere Art entwickeln.

Es ist nämlich

$$\int \frac{x^{n-2} \partial x}{(a + bx)^{n-1}} =$$

$$\int \frac{(a + bx) x^{n-2} \partial x}{(a + bx)^n} = a \int \frac{x^{n-2} \partial x}{(a + bx)^n} + b \int \frac{x^{n-1} \partial x}{(a + bx)^n} ,$$

und folglich

$$\int \frac{x^{n-1}\partial x}{(a+bx)^n} = -\frac{a}{b}\int \frac{x^{n-2}\partial x}{(a+bx)^n} + \frac{1}{b}\int \frac{x^{n-2}\partial x}{(a+bx)^{n-1}},$$

oder, wenn wir der Kürze wegen wieder $a + bx = X$ setzen,

$$\int \frac{x^{n-1}\partial x}{X^n} = -\frac{a}{b}\int \frac{x^{n-2}\partial x}{X^n} + \frac{1}{b}\int \frac{x^{n-2}\partial x}{X^{n-1}}.$$

Durch wiederholte Anwendung dieser Formel ergiebt sich aber ohne alle Schwierigkeit

$$\int \frac{x^{n-1}\partial x}{X^n}$$

$$= -\frac{a}{b}\int \frac{x^{n-2}\partial x}{X^n} - \frac{a}{b^2}\int \frac{x^{n-3}\partial x}{X^{n-1}} - \frac{a}{b^3}\int \frac{x^{n-4}\partial x}{X^{n-2}} - \ldots.$$

$$\ldots\ldots - \frac{a}{b^{n-1}}\int \frac{\partial x}{X^2} + \frac{1}{b^{n-1}}\int \frac{\partial x}{X}.$$

Weil nun nach 1. die Integrale

$$\int \frac{x^{n-2}\partial x}{X^n},\ \int \frac{x^{n-3}\partial x}{X^{n-1}},\ \int \frac{x^{n-4}\partial x}{X^{n-2}},\ \ldots \int \frac{\partial x}{X^2}$$

gefunden werden können, und nach §. 32.

$$\int \frac{\partial x}{X} = \frac{1}{2b} l.X^2$$

ist; so kann auch immer das gesuchte Integral gefunden werden.

3. Wenn $m > n$ ist; so kann man das Integral

$$\int \frac{x^{m-1}\partial x}{(a+bx)^n}$$

mittelst der Reductionsformel

$$\int \frac{x^{m-1}\partial x}{(a+bx)^n} = \frac{x^{m-1}}{(m-n)b(a+bx)^{n-1}} - \frac{(m-1)a}{(m-n)b}\int \frac{x^{m-2}\partial x}{(a+bx)^n}$$

immer auf das in 2. gefundene Integral zurückführen.

So ist z. B.

$$\int \frac{x^6\partial x}{X^4} = \frac{x^6}{3b X^3} - \frac{6a}{3b}\int \frac{x^5\partial x}{X^4}$$

$$= \left\{\frac{x^6}{3b} - \frac{ax^5}{b^2}\right\}\frac{1}{X^3} + \frac{5a^2}{b^2}\int \frac{x^4\partial x}{X^4}$$

$$= \left\{\frac{x^6}{3b} - \frac{ax^5}{b^2} + \frac{5a^2x^4}{b^3}\right\}\frac{1}{X^3} - \frac{20a^3}{b^3}\int \frac{x^3\partial x}{X^4},$$

wo nun das Integral auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens nach 2. entwickelt werden kann.

Man kann aber das gesuchte Integral auch noch auf folgende Art finden. Setzt man nämlich wieder $a + bx = z$; so ist

$$(a+bx)^n = z^n,\quad x = \frac{z-a}{b},\quad b\partial x = \partial z,$$

und folglich

$$\int \frac{x^{m-1}\partial x}{(a+bx)^n} = \frac{1}{b^m}\int \frac{(z-a)^{m-1}}{z^n}\partial z .$$

Entwickelt man nun $(z-a)^{m-1}$ nach dem Binomischen Lehrsatze und dividirt durch z^n; so lässt sich das gesuchte Integral durch eine Reihe von Integralen von der Form $\int z^k \partial z$ ausdrücken, die bekanntlich immer leicht gefunden werden können.

§. 34.

Entwickelung des Integrals

$$\int \frac{\partial x}{x^{m+1}(a+bx)^n}.$$

Für $a+bx = X$ ist nach §. 28. III.

$$\int \frac{\partial x}{x^{m+1}X^n} = -\frac{1}{ma\,x^m X^{n-1}} - \frac{(m+n-1)b}{ma}\int \frac{\partial x}{x^m X^n},$$

und mittelst wiederholter Anwendung dieser Reductionsformel kann das gesuchte Integral offenbar jederzeit endlich auf $\int \frac{\partial x}{xX^n}$ reducirt werden, so dass es also jetzt ferner auf die Entwickelung dieses Integrals ankommt.

Nach §. 28. VI. ist aber

$$\int \frac{\partial x}{xX^n} = \frac{1}{(n-1)aX^{n-1}} + \frac{1}{a}\int \frac{\partial x}{xX^{n-1}},$$

und man kann mittelst dieser Formel $\int \frac{\partial x}{xX^n}$ offenbar endlich auf $\int \frac{\partial x}{xX}$ reduciren, so dass es also nun endlich noch auf die Entwickelung dieses letzten Integrals ankommt.

Zu dem Ende zerlege man den Bruch

$$\frac{1}{xX} = \frac{1}{x(a+bx)}$$

in zwei Partialbrüche, und setze deshalb, wobei §. 23. zu vergleichen,

$$\frac{1}{x(a+bx)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{a+bx};$$

so erhält man zur Bestimmung der Zähler A und B die beiden Gleichungen $Aa = 1$, $Ab + B = 0$, aus denen sich $A = \frac{1}{a}$, $B = -\frac{b}{a}$, und folglich

$$\int\frac{\partial x}{xX}=\int\frac{\partial x}{x(a+bx)}=\frac{1}{a}\int\frac{\partial x}{x}-\frac{b}{a}\int\frac{\partial x}{a+bx},$$

d. i. nach §. 32.

$$\int\frac{\partial x}{xX}=\frac{1}{2a}l.x^2-\frac{1}{2a}l.(a+bx)^2,$$

oder auch

$$\int\frac{\partial x}{xX}=\frac{1}{2a}l.\left(\frac{x}{a+bx}\right)^2=-\frac{1}{2a}l.\left(\frac{a+bx}{x}\right)^2$$

ergiebt.

Das Vorhergehende reicht in allen Fällen zur vollständigen Entwickelung des gegebenen Integrals hin.

§. 35.

Entwickelung des Integrals

$$\int\frac{K+Lx}{a+bx+cx^2}\partial x.$$

Wir wollen dieses Integral durch Zerlegung der gebrochenen Function

$$\frac{K+Lx}{a+bx+cx^2}$$

zu entwickeln suchen, und müssen daher zuerst den Nenner dieser gebrochenen Function in Factoren zerlegen.

Lösen wir zu dem Ende die quadratische Gleichung

$$a+bx+cx^2=0$$

auf; so erhalten wir

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2c},$$

und folglich, wenn wir der Kürze wegen

$$f=\frac{b+\sqrt{b^2-4ac}}{2c},\quad g=\frac{b-\sqrt{b^2-4ac}}{2c}$$

setzen,

$$a+bx+cx^2=c(x+f)(x+g).$$

Nun unterscheiden wir die drei folgenden Fälle.

I. $b^2-4ac=0$.

In diesem Falle ist $f=g=\frac{b}{2c}$, und also reell. Folglich setzen wir

$$\frac{K+Lx}{a+bx+cx^2}=\frac{A}{c(x+f)^2}+\frac{B}{c(x+f)},$$

und erhalten, wenn wir die Brüche auf der rechten Seite des

Gleichheitszeichens zu einander wirklich addiren, zur Bestimmung von A und B die beiden Gleichungen

$$A + fB = K, \quad B = L.$$

Da sich nun aus diesen Gleichungen

$$A = K - fL, \quad B = L$$

ergiebt; so ist

$$\frac{K + Lx}{a + bx + cx^2} = \frac{K - fL}{c(x+f)^2} + \frac{L}{c(x+f)},$$

und folglich

$$\int \frac{K + Lx}{a + bx + cx^2} \partial x = \frac{K - fL}{c} \int \frac{\partial x}{(x+f)^2} + \frac{L}{c} \int \frac{\partial x}{x+f}.$$

Also ist nach §. 32.

$$\int \frac{K + Lx}{a + bx + cx^2} \partial x = \frac{fL - K}{c(x+f)} + \frac{L}{2c} l.(x+f)^2.$$

Setzen wir aber für f seinen obigen Werth; so erhalten wir

$$\int \frac{K + Lx}{a + bx + cx^2} \partial x = \frac{bL - 2cK}{c(b + 2cx)} + \frac{L}{2c} l.\left(\frac{b + 2cx}{2c}\right)^2,$$

oder, wenn wir die in diesem Integrale noch enthaltene Constante $-\frac{L}{2c} l.(2c)^2$ weglassen,

$$\int \frac{K + Lx}{a + bx + cx^2} \partial x = \frac{bL - 2cK}{c(b + 2cx)} + \frac{L}{2c} l.(b + 2cx)^2.$$

II. $b^2 - 4ac > 0$.

In diesem Falle sind f und g beide reell und ungleich. Wir setzen also

$$\frac{K + Lx}{a + bx + cx^2} = \frac{A}{c(x+f)} + \frac{B}{c(x+g)},$$

und erhalten, wenn wir die Brüche auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens unter einerlei Nenner bringen, zur Bestimmung von A und B die beiden Gleichungen

$$gA + fB = K, \quad A + B = L,$$

aus denen sich

$$A = \frac{K - fL}{g - f}, \quad B = -\frac{K - gL}{g - f},$$

und folglich

$$\frac{K + Lx}{a + bx + cx^2} = \frac{K - fL}{c(g-f)(x+f)} - \frac{K - gL}{c(g-f)(x+g)},$$

also

$$\int \frac{K + Lx}{a + bx + cx^2} \partial x = \frac{K - fL}{c(g-f)} \int \frac{\partial x}{x+f} - \frac{K - gL}{c(g-f)} \int \frac{\partial x}{x+g},$$

d. i. nach §. 32.

$$\int\frac{K+Lx}{a+bx+cx^2}\,\partial x=\frac{K-fL}{2c(g-f)}\,l.(x+f)^2-\frac{K-gL}{2c(g-f)}\,l.(x+g)^2$$

ergiebt.

Führt man aber die obigen Werthe von f und g in diese Formel wirklich ein, und lässt die in dem Integrale dann noch enthaltenen Constanten weg; so ergiebt sich

$$\int\frac{K+Lx}{a+bx+cx^2}\,\partial x=\frac{2cK-L(b-\sqrt{b^2-4ac})}{4c\sqrt{b^2-4ac}}\,l.(2cx+b-\sqrt{b^2-4ac})^2$$

$$-\frac{2cK-L(b+\sqrt{b^2-4ac})}{4c\sqrt{b^2-4ac}}\,l.(2cx+b+\sqrt{b^2-4ac})^2.$$

Für $K=1$, $L=0$ wird

$$\int\frac{\partial x}{a+bx+cx^2}=\frac{1}{2\sqrt{b^2-4ac}}\,l.\left(\frac{2cx+b-\sqrt{b^2-4ac}}{2cx+b+\sqrt{b^2-4ac}}\right)^2.$$

III. $b^2-4ac<0$.

In diesem Falle sind f und g beide imaginär, und wir können also

$$f=\alpha+\beta\sqrt{-1},\quad g=\alpha-\beta\sqrt{-1};$$

folglich

$$(x+f)(x+g)=(x+\alpha+\beta\sqrt{-1})(x+\alpha-\beta\sqrt{-1})=(x+\alpha)^2+\beta^2,$$

$$\frac{K+Lx}{a+bx+cx^2}=\frac{K+Lx}{c\{(x+\alpha)^2+\beta^2\}}$$

setzen.

Setzen wir nun $x+\alpha=z$, $x=z-\alpha$, $\partial x=\partial z$; so wird

$$\frac{K+Lx}{(x+\alpha)^2+\beta^2}=\frac{K-L\alpha}{z^2+\beta^2}+\frac{Lz}{z^2+\beta^2},$$

und folglich

$$\int\frac{K+Lx}{(x+\alpha)^2+\beta^2}\,\partial x=(K-L\alpha)\int\frac{\partial z}{z^2+\beta^2}+L\int\frac{z\partial z}{z^2+\beta^2}.$$

Für $z=\beta u$, $\partial z=\beta\partial u$ ist nun

$$\frac{\partial z}{z^2+\beta^2}=\frac{\partial u}{\beta(1+u^2)},$$

und folglich nach D. §. 70.

$$\int\frac{\partial z}{z^2+\beta^2}=\frac{1}{\beta}\int\frac{\partial u}{1+u^2}=\frac{1}{\beta}\,Arc\,tang\,u=\frac{1}{\beta}\,Arc\,tang\,\frac{x+\alpha}{\beta}.$$

Für $z^2+\beta^2=v$ ist ferner $2z\partial z=\partial v$, und folglich

$$\int\frac{z\partial z}{z^2+\beta^2}=\tfrac{1}{2}\int\frac{\partial v}{v}=\tfrac{1}{2}lv=\tfrac{1}{2}l(z^2+\beta^2)=l\sqrt{(x+\alpha)^2+\beta^2},$$

die Quadratwurzel positiv genommen. Dass wir hier nicht $\int \frac{\partial v}{v} = \frac{1}{2} l.v^2$, wobei §. 26. zu vergleichen ist, gesetzt haben, hat darin seinen Grund, weil v, als die Summe zweier Quadrate, nothwendig positiv ist.

Folglich ist nach dem Obigen

$$\int \frac{K+Lx}{(x+\alpha)^2+\beta^2}\,\partial x = Ll\sqrt{(x+\alpha)^2+\beta^2} + \frac{K-L\alpha}{\beta}\,Arc\,tang\,\frac{x+\alpha}{\beta};$$

also

$$\int \frac{K+Lx}{a+bx+cx^2}\,\partial x = \frac{L}{c}\,l\sqrt{(x+\alpha)^2+\beta^2} + \frac{K-L\alpha}{\beta c}\,Arc\,tang\,\frac{x+\alpha}{\beta}.$$

Bemerkt man nun, dass

$$\alpha = \frac{b}{2c},\quad \beta = \frac{\sqrt{4ac-b^2}}{2c}$$

ist, und führt diese Werthe von α und β in die obige Gleichung ein; so erhält man

$$\int \frac{K+Lx}{a+bx+cx^2}\,\partial x =$$

$$\frac{L}{c}\,l\sqrt{\frac{a+bx+cx^2}{c}} + \frac{2Kc-Lb}{c\sqrt{4ac-b^2}}\,Arc\,tang\,\frac{b+2cx}{\sqrt{4ac-b^2}}.$$

Für $K=1$, $L=0$ ergiebt sich hieraus

$$\int \frac{\partial x}{a+bx+cx^2} = \frac{2}{\sqrt{4ac-b^2}}\,Arc\,tang\,\frac{b+2cx}{\sqrt{4ac-b^2}}.$$

Weil nun bekanntlich, unter der Bedingung, dass man das obere oder untere Zeichen nimmt, jenachdem sich $Arc\,sin\,\frac{z}{\sqrt{1+z^2}}$ im ersten oder vierten, oder im zweiten oder dritten Quadraten endigt,

$$tang\,Arc\,sin\,\frac{z}{\sqrt{1+z^2}} = \pm\frac{\frac{z}{\sqrt{1+z^2}}}{\sqrt{1-\frac{z^2}{1+z^2}}} = +z$$

oder

$$tang\left\{\pm Arc\,sin\,\frac{z}{\sqrt{1+z^2}}\right\} = z$$

ist; so kann man, immer unter der Bedingung, dass man das obere oder untere Zeichen nimmt, jenachdem $Arc\,sin\,\frac{z}{\sqrt{1+z^2}}$

sich im ersten oder vierten, oder im zweiten oder dritten Quadranten endigt, für *Arctang* z offenbar jederzeit $\pm$ *Arcsin* $\frac{z}{\sqrt{1+z^2}}$ setzen. Also ist nach dem Obigen

$$\int \frac{K+Lx}{a+bx+cx^2}\partial x =$$

$$\frac{L}{c} l \sqrt{\frac{a+bx+cx^2}{c}} \pm \frac{2Kc-Lb}{c\sqrt{4ac-b^2}} \, Arc\sin \frac{b+2cx}{2\sqrt{c(a+bx+cx^2)}},$$

$$\int \frac{\partial x}{a+bx+cx^2} = \pm \frac{2}{\sqrt{4ac-b^2}} \, Arc\sin \frac{b+2cx}{2\sqrt{c(a+bx+cx^2)}},$$

indem man das obere oder untere Zeichen nimmt, jenachdem sich

$$Arc\sin \frac{b+2cx}{2\sqrt{c(a+bx+cx^2)}}$$

im ersten oder vierten, oder im zweiten oder dritten Quadranten endigt, d. i. jenachdem

$$\cos Arc\sin \frac{b+2cx}{2\sqrt{c(a+bx+cx^2)}}$$

positiv oder negativ ist.

§. 36.

Entwickelung des Integrals

$$\int \frac{K+Lx}{a^2-2abx\cos\theta+b^2x^2}\partial x.$$

Durch Auflösung der Gleichung

$$a^2-2abx\cos\theta+b^2x^2=0$$

ergiebt sich

$$x=\frac{a}{b}(\cos\theta \pm \sin\theta\sqrt{-1}),$$

und unser Integral ist also, weil diese Werthe von x imaginär sind, wenn nur, was wir hier annehmen wollen, $\sin\theta$ nicht $=0$ ist, unter dem Falle §. 35. III. enthalten. Wenden wir also auf dasselbe die a. a. O. entwickelten Formeln an; so erhalten wir

$$\int \frac{K+Lx}{a^2-2abx\cos\theta+b^2x^2}\partial x =$$

$$\frac{L}{b^2} l \sqrt{\frac{a^2-2abx\cos\theta+b^2x^2}{b^2}} + \frac{Kb+La\cos\theta}{ab^2\sin\theta} \, Arctang \frac{bx-a\cos\theta}{a\sin\theta},$$

oder auch, wenn die in diesem Integrale noch enthaltene Constante $-\frac{L}{2b^2} l.b^2$ weggelassen wird,

$$\int \frac{K+Lx}{a^2-2abx\cos\theta+b^2x^2}\,\partial x =$$

$$\frac{L}{b^2}\,l\sqrt{a^2-2abx\cos\theta+b^2x^2}+\frac{Kb+La\cos\theta}{ab^2\sin\theta}\,Arc\,tang\,\frac{bx-a\cos\theta}{a\sin\theta}\,.$$

Addirt man hierzu, was verstattet ist, die Constante

$$\frac{Kb+La\cos\theta}{ab^2\sin\theta}\,Arc\,tang\,\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\,;$$

so wird, weil

$$Arc\,tang\,\frac{bx-a\cos\theta}{a\sin\theta}+Arc\,tang\,\frac{\cos\theta}{\sin\theta}=Arc\,tang\,\frac{bx\sin\theta}{a-bx\cos\theta}$$

ist,

$$\int \frac{K+Lx}{a^2-2abx\cos\theta+b^2x^2}\,\partial x =$$

$$\frac{L}{b^2}\,l\sqrt{a^2-2abx\cos\theta+b^2x^2}+\frac{Kb+La\cos\theta}{ab^2\sin\theta}\,Arc\,tang\,\frac{bx\sin\theta}{a-bx\cos\theta}\,,$$

und, für $K=1$ und $L=0$,

$$\int \frac{\partial x}{a^2-2abx\cos\theta+b^2x^2}=\frac{1}{ab\sin\theta}\,Arc\,tang\,\frac{bx\sin\theta}{a-bx\cos\theta}\,.$$

§. 37.

Entwickelung des Integrals

$$\int \frac{\partial x}{(a+bx+cx^2)^n}\,.$$

Man setze der Kürze wegen

$$a+bx+cx^2=X;$$

so ist

$$\partial x=\frac{\partial X}{b+2cx},$$

und folglich

$$\frac{\partial x}{X^n}=\frac{\partial X}{(b+2cx)X^n}\,.$$

Multiplicirt man nun auf beiden Seiten dieser Gleichung mit $(b+2cx)^2$; so erhält man, weil, wie leicht erhellet,

$$(b+2cx)^2=4cX-(4ac-b^2)$$

ist, die Gleichung

$$\frac{4c\partial x}{X^{n-1}}-\frac{(4ac-b^2)\partial x}{X^n}=(b+2cx)\frac{\partial X}{X^n},$$

und folglich nach §. 27.

$$4c\int\frac{\partial x}{X^{n-1}} - (4ac-b^2)\int\frac{\partial x}{X^n} =$$
$$(b+2cx)\int\frac{\partial x}{X^n} - 2c\int\partial x\int\frac{\partial x}{X^n},$$

d. i., wenn wir der Kürze wegen $4ac - b^2 = k$ setzen,

$$4c\int\frac{\partial x}{X^{n-1}} - k\int\frac{\partial x}{X^n} = -\frac{b+2cx}{(n-1)X^{n-1}} + \frac{2c}{n-1}\int\frac{\partial x}{X^{n-1}}.$$

Also ist

$$\int\frac{\partial x}{X^n} = \frac{b+2cx}{(n-1)kX^{n-1}} + \frac{2(2n-3)c}{(n-1)k}\int\frac{\partial x}{X^{n-1}}.$$

Durch wiederholte Anwendung dieser Formel kann man das gesuchte Integral jederzeit auf das in §. 35. entwickelte Integral $\int\frac{\partial x}{X}$ zurückführen.

§. 38.

Entwickelung des Integrals

$$\int\frac{x^{m-1}\partial x}{(a+bx+cx^2)^n}.$$

Setzen wir der Kürze wegen wieder

$$a+bx+cx^2 = X;$$

so ist nach §. 29. IV.

$$\int\frac{x^{m-1}\partial x}{X^n} =$$
$$\frac{x^{m-2}}{(m-2n)cX^{n-1}} - \frac{(m-n-1)b}{(m-2n)c}\int\frac{x^{m-2}\partial x}{X^n} - \frac{(m-2)a}{(m-2n)c}\int\frac{x^{m-3}\partial x}{X^n}.$$

Mittelst dieser Formel kann man das gesuchte Integral auf niedrigere Integrale von derselben Art zurückführen. Nur der Fall, wenn $m = 2n$ ist, leidet eine Ausnahme, und wir müssen also jetzt das Integral

$$\int\frac{x^{2n-1}\partial x}{X^n} = \int\frac{x^{2n-1}\partial x}{(a+bx+cx^2)^n}$$

noch besonders betrachten.

Weil aber

$$cx^{2n-1} = (a+bx+cx^2)x^{2n-3} - ax^{2n-3} - bx^{2n-2},$$

d. i.

$$cx^{2n-1} = Xx^{2n-3} - ax^{2n-3} - bx^{2n-2}$$

ist; so ist

$$c\int\frac{x^{2n-1}\partial x}{X^n} = \int\frac{x^{2n-3}\partial x}{X^{n-1}} - a\int\frac{x^{2n-3}\partial x}{X^n} - b\int\frac{x^{2n-2}\partial x}{X^n}$$

und folglich

$$\int\frac{x^{2n-1}\partial x}{X^n}=\frac{1}{c}\int\frac{x^{2n-3}\partial x}{X^{n-1}}-\frac{a}{c}\int\frac{x^{2n-3}\partial x}{X^n}-\frac{b}{c}\int\frac{x^{2n-2}\partial x}{X^n},$$

eine Relation, mittelst welcher, wenn $n>1$ ist, die Reduction des gesuchten Integrals auf niedrigere Integrale ähnlicher Art sich immer bewerkstelligen lässt. Für $n=1$ wird diese Relation

$$\int\frac{x\partial x}{X}=\frac{1}{c}\int\frac{\partial x}{x}-\frac{a}{c}\int\frac{\partial x}{xX}-\frac{b}{c}\int\frac{\partial x}{X},$$

und dieser Fall, welcher gleich nachher besonders betrachtet werden soll, leidet also eine Ausnahme.

Für $n=2$ erhält man aus dem Obigen leicht

$$\int\frac{x\partial x}{X^n}=-\frac{1}{2(n-1)cX^{n-1}}-\frac{b}{2c}\int\frac{\partial x}{X^n},$$

eine Formel, mittelst welcher, wenn $n>1$ ist, das Integral $\int\frac{x\partial x}{X^n}$ immer gefunden werden kann, weil das Integral $\int\frac{\partial x}{X^n}$ aus §. 37. bekannt ist.

Ist $n=1$, so kann man auf folgende Art verfahren. Weil

$$\partial X=b\partial x+2cx\partial x$$

ist; so ist

$$2cx\,\partial x=\partial X-b\partial x$$

und folglich

$$\frac{2cx\,\partial x}{X}=\frac{\partial X}{X}-\frac{b\partial x}{X};$$

also

$$2c\int\frac{x\partial x}{X}=\int\frac{\partial X}{X}-b\int\frac{\partial x}{X},$$

d. i.

$$\int\frac{x\partial x}{X}=\frac{1}{4c}l.X^2-\frac{b}{2c}\int\frac{\partial x}{X},$$

wodurch das gesuchte Integral wieder auf das in §. 35. entwickelte Integral zurückgeführt ist.

§. 39.

Entwickelung des Integrals

$$\int\frac{K+Lx}{(a+bx+cx^2)^n}\partial x.$$

Weil

$$\int\frac{K+Lx}{(a+bx+cx^2)^n}\partial x=K\int\frac{\partial x}{(a+bx+cx^2)^n}+L\int\frac{x\partial x}{(a+bx+cx^2)^n}$$

ist, und nach §. 37. und §. 38. die Integrale

$$\int\frac{\partial x}{(a+bx+cx^2)^n} \text{ und } \int\frac{x\partial x}{(a+bx+cx^2)^n}$$

entwickelt werden können; so lässt sich auch das gesuchte Integral jederzeit entwickeln.

§. 40.

Entwickelung des Integrals

$$\int\frac{\partial x}{x^{m+1}(a+bx+cx^2)^n}.$$

Nach der Formel §. 29. III. ist, wenn wir der Kürze wegen $a+bx+cx^2=X$ setzen,

$$\int\frac{\partial x}{x^{m+1}X^n}=-\frac{1}{max^mX^{n-1}}-\frac{(m+n-1)b}{ma}\int\frac{\partial x}{x^mX^n}$$
$$-\frac{(m+2n-2)c}{ma}\int\frac{\partial x}{x^{m-1}X^n},$$

und mittelst dieser Formel kann man offenbar das gesuchte Integral auf niedrigere Integrale derselben Art reduciren.

Der Fall, wenn $m=0$ ist, muss aber besonders betrachtet werden. Aus der Formel §. 29. V. ergiebt sich leicht

$$\int\frac{\partial x}{xX^n}=-\frac{2ac-b^2-bcx}{(n-1)(b^2-4ac)a}\cdot\frac{1}{X^{n-1}}+\frac{1}{a}\int\frac{\partial x}{xX^{n-1}}$$
$$+\frac{(2n-3)bc}{(n-1)(b^2-4ac)a}\int\frac{\partial x}{X^{n-1}}$$
$$=\frac{1}{2(n-1)aX^{n-1}}+\frac{1}{a}\int\frac{\partial x}{xX^{n-1}}-\frac{b}{2a}\left\{\frac{b+2cx}{(n-1)kX^{n-1}}\right.$$
$$\left.+\frac{2(2n-3)c}{(n-1)k}\int\frac{\partial x}{X^{n-1}}\right\},$$

wenn wir $4ac-b^2=k$ setzen. Also ist nach §. 37.

$$\int\frac{\partial x}{xX^n}=\frac{1}{2(n-1)aX^{n-1}}+\frac{1}{a}\int\frac{\partial x}{xX^{n-1}}-\frac{b}{2a}\int\frac{\partial x}{X^n}.$$

Mittelst dieser Gleichung lässt sich das gesuchte Integral auf niedrigere Integrale von derselben Form und auf die aus §. 37. bekannten Integrale zurückführen.

Nur der Fall, wenn $n=1$ ist, in welchem $n-1=0$ wird, muss noch besonders betrachtet werden. Es ist aber

$$\int\frac{\partial x}{xX}=$$
$$\int\frac{(X-bx-cx^2)\,\partial x}{axX}=\frac{1}{a}\int\frac{\partial x}{x}-\frac{b}{a}\int\frac{\partial x}{X}-\frac{c}{a}\int\frac{x\partial x}{X},$$

d. i. nach §. 26. und §. 38.

$$\int\frac{\partial x}{xX}=\frac{1}{2a}l.x^2-\frac{1}{4a}l.X^2-\frac{b}{2a}\int\frac{\partial x}{X}$$

oder

$$\int\frac{\partial x}{xX}=\frac{1}{4a}l.\frac{x^4}{X^2}-\frac{b}{2a}\int\frac{\partial x}{X},$$

so dass also hierdurch das gesuchte Integral wieder auf das aus §. 35. bekannte Integral zurückgeführt, und daher selbst bekannt ist.

Anmerkung. Die Integrale

$$\int\frac{x^{m-1}\partial x}{(a+bx^2)^n} \text{ und } \int\frac{\partial x}{x^{m+1}(a+bx^2)^n}$$

werden aus §. 38. und dem in diesem Paragraphen entwickelten Integrale erhalten, wenn man $b=0$ und $a=b$ setzt.

§. 41.

Aufgabe. Jedes reelle gebrochene rationale algebraische Differential zu integriren.

Auflösung. Nach §. 24. II. lässt sich jedes reelle gebrochene rationale algebraische Differential $X\partial x$ in lauter reelle gebrochene rationale algebraische Differentiale von der Form

$$\frac{A\partial x}{C(x-a)^\gamma} \text{ oder } \frac{(M+Nx)\partial x}{C(x^2-2px+p^2+q^2)^\alpha},$$

und, wenn X eine unechte gebrochene Function ist, in ein reelles ganzes rationales algebraisches Differential zerlegen. Da nun die Differentiale

$$\frac{A\partial x}{C(x-a)^\gamma} \text{ und } \frac{(M+Nx)\partial x}{C(x^2-2px+p^2+q^2)^\alpha}$$

sich jederzeit nach §. 32. und §. 39. integriren lassen, und jedes ganze rationale algebraische Differential nach §. 31. integrirt werden kann; so kann auch das reelle gebrochene rationale algebraische Differential $X\partial x$ jederzeit nach §. 6. integrirt werden.

Beispiele.

I. Das Differential

$$\frac{\partial x}{a+bx^3}$$

zu integriren.

Aus der Gleichung

$$a+bx^3=0 \text{ oder } x^3+\frac{a}{b}=0$$

erhält man $x = -\sqrt[3]{\frac{a}{b}}$, oder, wenn der Kürze wegen $\sqrt[3]{\frac{a}{b}} = k$ gesetzt wird, $x = -k$. Dividirt man nun mit $x + k$ in $x^3 + k^3$ hinein; so ergiebt sich $x^2 - kx + k^2$ als Quotient, und es ist folglich

$$a + bx^3 = b(x + k)(x^2 - kx + k^2).$$

Deshalb setzen wir

$$\frac{1}{a + bx^3} = \frac{A}{b(x + k)} + \frac{M + Nx}{b(x^2 - kx + k^2)},$$

indem wir zugleich bemerken, dass die Wurzeln der Gleichung

$$x^2 - kx + k^2 = 0$$

beide imaginär, nämlich

$$x = \tfrac{1}{2}k(1 + \sqrt{-3}) \text{ und } x = \tfrac{1}{2}k(1 - \sqrt{-3})$$

sind.

Aus obiger Gleichung folgt nun

$$1 = A(x^2 - kx + k^2) + (M + Nx)(x + k).$$

Für $x + k = 0$, d. i. $x = -k$, ergiebt sich hieraus

$$1 = 3Ak^2, \quad A = \frac{1}{3k^2}.$$

Setzen wir ferner $x = \frac{1}{2}k(1 + \sqrt{-3})$, so wird

$$1 = \{M + \tfrac{1}{2}Nk(1 + \sqrt{-3})\}\{k + \tfrac{1}{2}k(1 + \sqrt{-3})\}$$

oder

$$\frac{2}{k} = (M + \tfrac{1}{2}Nk + \tfrac{1}{2}Nk\sqrt{-3})(3 + \sqrt{-3})$$
$$= 3M + (M + 2Nk)\sqrt{-3},$$

eine Gleichung, welche auf die beiden Gleichungen

$$3M = \frac{2}{k}, \quad M + 2Nk = 0$$

führt, aus denen sich

$$M = \frac{2}{3k}, \quad N = -\frac{1}{3k^2}$$

ergiebt.

Folglich ist

$$\frac{1}{a + bx^3} = \frac{1}{3bk^2(x + k)} + \frac{2k - x}{3bk^2(x^2 - kx + k^2)},$$

und also

$$\int \frac{\partial x}{a + bx^3} = \frac{1}{3bk^2} \int \frac{\partial x}{x + k} + \frac{1}{3bk^2} \int \frac{(2k - x)\partial x}{x^2 - kx + k^2}.$$

Nach §. 32. und §. 35. III. ist aber

$$\int\frac{\partial x}{x+k}=\tfrac{1}{2}l.(x+k)^2$$

und

$$\int\frac{(2k-x)\partial x}{x^2-kx+k^2}=-l\sqrt{x^2-kx+k^2}+\sqrt{3}.Arctang\,\frac{2x-k}{k\sqrt{3}}.$$

Also ist

$$\int\frac{\partial x}{a+bx^3}=\frac{1}{3bk^2}\left\{\tfrac{1}{2}l\frac{(x+k)^2}{x^2-kx+k^2}+\sqrt{3}.Arctang\,\frac{2x-k}{k\sqrt{3}}\right\}.$$

Soll dieses Integral so bestimmt werden, dass es für $x=0$ verschwindet; so muss man offenbar die Constante $\frac{\sqrt{3}}{3bk^2}Arctang\,\frac{1}{\sqrt{3}}$ zu demselben addiren. Weil nun aber

$$Arctang\,\frac{2x-k}{k\sqrt{3}}+Arctang\,\frac{1}{\sqrt{3}}=Arctang\,\frac{x\sqrt{3}}{2k-x}$$

ist; so ist

$$\int_0^x\frac{\partial x}{a+bx^3}=\frac{1}{3bk^2}\left\{\tfrac{1}{2}l\frac{(x+k)^2}{x^2-kx+k^2}+\sqrt{3}.Arctang\,\frac{x\sqrt{3}}{2k-x}\right\}.$$

II. Das Differential

$$\frac{x\partial x}{a+bx^3}$$

zu integriren.

Wir setzen

$$\frac{x}{a+bx^3}=\frac{A}{b(x+k)}+\frac{M+Nx}{b(x^2-kx+k^2)},$$

d. i.

$$x=A(x^2-kx+k^2)+(M+Nx)(x+k).$$

Für $x=-k$ ergiebt sich

$$-k=3Ak^2,\quad A=-\frac{1}{3k}.$$

Für $x=\tfrac{1}{2}k\,(1+\sqrt{-3})$ wird

$$\tfrac{1}{2}k(1+\sqrt{-3})=\{M+\tfrac{1}{2}Nk(1+\sqrt{-3})\}\{k+\tfrac{1}{2}k(1+\sqrt{-3})\},$$

oder

$$1+\sqrt{-3}=3M+(M+2Nk)\sqrt{-3},$$

und folglich

$$3M=1,\quad M+2Nk=1;\quad M=\tfrac{1}{3},\quad N=\frac{1}{3k}.$$

Also ist

$$\int\frac{x\partial x}{a+bx^3}=-\frac{1}{3bk}\int\frac{\partial x}{x+k}+\frac{1}{3bk}\int\frac{(k+x)\partial x}{x^2-kx+k^2},$$

und folglich nach §. 32. und §. 35. III.

$$\int\frac{x\partial x}{a+bx^3}=-\frac{1}{3bk}\left\{\tfrac{1}{2}l.\frac{(x+k)^2}{x^2-kx+k^2}-\sqrt{3}.Arctang\frac{2x-k}{k\sqrt{3}}\right\},$$

und auf ähnliche Art wie in I.

$$\int_0^x\frac{x\partial x}{a+bx^3}=-\frac{1}{3bk}\left\{\tfrac{1}{2}l.\frac{(x+k)^2}{x^2-kx+k^2}-\sqrt{3}.Arctang\frac{x\sqrt{3}}{2k-x}\right\}.$$

Anmerkung. Das Differential

$$\frac{x^2\partial x}{a+bx^3}$$

lässt sich sehr leicht auf folgende Art integriren.

Man setze $a+bx^3=z$; so ist $3bx^2\partial x=\partial z$, und folglich

$$\frac{x^2\partial x}{a+bx^3}=\frac{\partial z}{3bz}.$$

Also ist

$$\int\frac{x^2\partial x}{a+bx^3}=\frac{1}{3b}\int\frac{\partial z}{z}=\frac{1}{6b}l.z^2=\frac{1}{6b}l.(a+bx^3)^2.$$

§. 42.

Aufgabe. Das Differential

$$\frac{x^{m-1}\partial x}{x^n+a^n}$$

zu integriren, unter der Voraussetzung, dass $m-1$ kleiner als n ist.

Auflösung. I. Zerlegung der Function x^n+a^n in Factoren.

1. n eine gerade Zahl.

Die allgemeine Form der Wurzeln der Gleichung $x^n+a^n=0$ ist

$$x=a.(-1)^{\frac{1}{n}}.$$

Weil nun

$$-1=\cos\pi+\sin\pi\sqrt{-1}$$

ist; so sind nach D. §. 89. III.

$$\cos\frac{\pi}{n}\pm\sin\frac{\pi}{n}\sqrt{-1},$$

$$\cos\frac{3\pi}{n}\pm\sin\frac{3\pi}{n}\sqrt{-1},$$

$$\cos\frac{5\pi}{n} \pm \sin\frac{5\pi}{n}\sqrt{-1},$$

u. s. w.

$$\cos\frac{(n-1)\pi}{n} \pm \sin\frac{(n-1)\pi}{n}\sqrt{-1}$$

n sämmtlich unter einander ungleiche Werthe von $(-1)^{\frac{1}{n}}$, und folglich

$$a(\cos\frac{\pi}{n} \pm \sin\frac{\pi}{n}\sqrt{-1}),$$

$$a(\cos\frac{3\pi}{n} \pm \sin\frac{3\pi}{n}\sqrt{-1}),$$

$$a(\cos\frac{5\pi}{n} \pm \sin\frac{5\pi}{n}\sqrt{-1}),$$

u. s. w.

$$a(\cos\frac{(n-1)\pi}{n} \pm \sin\frac{(n-1)\pi}{n}\sqrt{-1})$$

n sämmtlich unter einander ungleiche Wurzeln der Gleichung $x^n+a^n=0$. Also ist nach §. 13.

$$x^n+a^n = (x-a\cos\frac{\pi}{n} - a\sin\frac{\pi}{n}\sqrt{-1})$$

$$\times (x-a\cos\frac{\pi}{n} + a\sin\frac{\pi}{n}\sqrt{-1})$$

$$\times (x-a\cos\frac{3\pi}{n} - a\sin\frac{3\pi}{n}\sqrt{-1})$$

$$\times (x-a\cos\frac{3\pi}{n} + a\sin\frac{3\pi}{n}\sqrt{-1})$$

. . . .

$$\times (x-a\cos\frac{(n-1)\pi}{n} - a\sin\frac{(n-1)\pi}{n}\sqrt{-1})$$

$$\times (x-a\cos\frac{(n-1)\pi}{n} + a\sin\frac{(n-1)\pi}{n}\sqrt{-1}),$$

oder auch, wenn man je zwei dieser Factoren durch Multiplication mit einander verbindet,

$$x^n+a^n = (x^2-2ax\cos\frac{\pi}{n} + a^2)$$

$$\times (x^2-2ax\cos\frac{3\pi}{n} + a^2)$$

$$\times (x^2-2ax\cos\frac{5\pi}{n} + a^2)$$

. . . .

$$\times (x^2-2ax\cos\frac{(n-1)\pi}{n} + a^2),$$

wo nun alle Factoren reell sind.

2. n eine ungerade Zahl.

Ganz auf ähnliche Art wie vorher sind nach D. §. 89. III.

$$-1,$$

$$\cos\frac{\pi}{n}\pm\sin\frac{\pi}{n}\sqrt{-1},$$

$$\cos\frac{3\pi}{n}\pm\sin\frac{3\pi}{n}\sqrt{-1},$$

$$\cos\frac{5\pi}{n}\pm\sin\frac{5\pi}{n}\sqrt{-1},$$

u. s. w.

$$\cos\frac{(n-2)\pi}{n}\pm\sin\frac{(n-2)\pi}{n}\sqrt{-1}$$

n sämmtlich unter einander ungleiche Werthe von $(-1)^{\frac{1}{n}}$; also

$$-a,$$

$$a(\cos\frac{\pi}{n}\pm\sin\frac{\pi}{n}\sqrt{-1}),$$

$$a(\cos\frac{3\pi}{n}\pm\sin\frac{3\pi}{n}\sqrt{-1}),$$

$$a(\cos\frac{5\pi}{n}\pm\sin\frac{5\pi}{n}\sqrt{-1}),$$

u. s. w.

$$a\left(\cos\frac{(n-2)\pi}{n}\pm\sin\frac{(n-2)\pi}{n}\sqrt{-1}\right)$$

n sämmtlich unter einander ungleiche Wurzeln der Gleichung $x^n+a^n=0$. Folglich ist nach §. 13.

$$x^n+a^n=(x+a)\,(x-a\cos\frac{\pi}{n}-a\sin\frac{\pi}{n}\sqrt{-1})$$

$$\times(x-a\cos\frac{\pi}{n}+a\sin\frac{\pi}{n}\sqrt{-1})$$

$$\times(x-a\cos\frac{3\pi}{n}-a\sin\frac{3\pi}{n}\sqrt{-1})$$

$$\times(x-a\cos\frac{3\pi}{n}+a\sin\frac{3\pi}{n}\sqrt{-1})$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\times\left(x-a\cos\frac{(n-2)\pi}{n}-a\sin\frac{(n-2)\pi}{n}\sqrt{-1}\right)$$

$$\times\left(x-a\cos\frac{(n-2)\pi}{n}+a\sin\frac{(n-2)\pi}{n}\sqrt{-1}\right),$$

oder

$$x^n + a^n = (x+a)\left(x^2 - 2ax\cos\frac{\pi}{n} + a^2\right)$$
$$\times\left(x^2 - 2ax\cos\frac{3\pi}{n} + a^2\right)$$
$$\times\left(x^2 - 2ax\cos\frac{5\pi}{n} + a^2\right)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\times\left(x^2 - 2ax\cos\frac{(n-2)\pi}{n} + a^2\right),$$

wo nun alle Factoren reell sind.

II. Zerlegung der gebrochenen Function

$$\frac{x^{m-1}}{x^n + a^n}$$

in Partialbrüche.

1. n eine gerade Zahl.

Der Zähler des dem Factor

$$x - a\cos\frac{(2k-1)\pi}{n} \mp a\sin\frac{(2k-1)\pi}{n}\sqrt{-1}$$

von $x^n + a^n$ entsprechenden Partialbruchs ist nach §. 16.

$$\frac{a^{m-1}\left\{\cos\frac{(2k-1)\pi}{n} \pm \sin\frac{(2k-1)\pi}{n}\sqrt{-1}\right\}^{m-1}}{na^{n-1}\left\{\cos\frac{(2k-1)\pi}{n} \pm \sin\frac{(2k-1)\pi}{n}\sqrt{-1}\right\}^{n-1}},$$

d. i.

$$\frac{1}{n}a^{m-n}\left\{\cos\frac{(2k-1)\pi}{n} \pm \sin\frac{(2k-1)\pi}{n}\sqrt{-1}\right\}^{m-n},$$

und folglich nach D. §. 88.

$$\frac{1}{n}a^{m-n}\left\{\cos\frac{(2k-1)(m-n)\pi}{n} \pm \sin\frac{(2k-1)(m-n)\pi}{n}\sqrt{-1}\right\}$$

oder

$$-\frac{1}{n}a^{m-n}\left\{\cos\frac{(2k-1)m\pi}{n} \pm \sin\frac{(2k-1)m\pi}{n}\sqrt{-1}\right\},$$

weil

$$\cos\frac{(2k-1)(m-n)\pi}{n}$$
$$= \cos\left\{(2k-1)\left(\frac{m\pi}{n} - \pi\right)\right\} = -\cos\frac{(2k-1)m\pi}{n},$$
$$\sin\frac{(2k-1)(m-n)\pi}{n}$$
$$= \sin\left\{(2k-1)\left(\frac{m\pi}{n} - \pi\right)\right\} = -\sin\frac{(2k-1)m\pi}{n}$$

ist.

Die Summe der beiden Brüche

$$\frac{\cos\frac{(2k-1)m\pi}{n}+\sin\frac{(2k-1)m\pi}{n}\sqrt{-1}}{x-a\cos\frac{(2k-1)\pi}{n}-\sin\frac{(2k-1)\pi}{n}\sqrt{-1}}$$

und

$$\frac{\cos\frac{(2k-1)m\pi}{n}-\sin\frac{(2k-1)m\pi}{n}\sqrt{-1}}{x-a\cos\frac{(2k-1)\pi}{n}+a\sin\frac{(2k-1)\pi}{n}\sqrt{-1}}$$

ist aber, wie man leicht findet,

$$\frac{2x\cos\frac{(2k-1)m\pi}{n}-2a\cos\frac{(2k-1)(m-1)\pi}{n}}{x^2-2ax\cos\frac{(2k-1)\pi}{n}+a^2}\ ^{*)}.$$

Also ist

$$\frac{x^{m-1}}{x^n+a^n}=-\frac{2a^{m-n}\left\{x\cos\frac{m\pi}{n}-a\cos\frac{(m-1)\pi}{n}\right\}}{n\left(x^2-2ax\cos\frac{\pi}{n}+a^2\right)}$$

$$-\frac{2a^{m-n}\left\{x\cos\frac{3m\pi}{n}-a\cos\frac{3(m-1)\pi}{n}\right\}}{n\left(x^2-2ax\cos\frac{3\pi}{n}+a^2\right)}$$

$$-\frac{2a^{m-n}\left\{x\cos\frac{5m\pi}{n}-a\cos\frac{5(m-1)\pi}{n}\right\}}{n\left(x^2-2ax\cos\frac{5\pi}{n}+a^2\right)}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$-\frac{2a^{m-n}\left\{x\cos\frac{(n-1)m\pi}{n}-a\cos\frac{(n-1)(m-1)\pi}{n}\right\}}{n\left(x^2-2ax\cos\frac{(n-1)\pi}{n}+a^2\right)}.$$

2. n eine ungerade Zahl.

Der dem Factor $x+a$ entsprechende Partialbruch ist nach §. 16.

$$\frac{(-a)^{m-n}}{n(x+a)}=(-1)^{m-1}\cdot\frac{a^{m-n}}{n(x+a)},$$

weil n eine ungerade Zahl ist.

---

*) Man muss bei dieser Addition jeden der beiden Nenner bloss als eine zweitheilige Grösse betrachten, so dass der reelle Theil den ersten, der imaginäre Theil den zweiten Theil bildet.

Die übrigen Brüche findet man ganz auf dieselbe Art wie in 1., und es ist folglich

$$\frac{x^{m-1}}{x^n+a^n} = (-1)^{m-1}\cdot\frac{a^{m-n}}{n(x+a)}$$

$$-\frac{2a^{m-n}\left\{x\cos\frac{m\pi}{n} - a\cos\frac{(m-1)\pi}{n}\right\}}{n\left(x^2-2ax\cos\frac{\pi}{n}+a^2\right)}$$

$$-\frac{2a^{m-n}\left\{x\cos\frac{3m\pi}{n} - a\cos\frac{3(m-1)\pi}{n}\right\}}{n\left(x^2-2ax\cos\frac{3\pi}{n}+a^2\right)}$$

$$-\frac{2a^{m-n}\left\{x\cos\frac{5m\pi}{n} - a\cos\frac{5(m-1)\pi}{n}\right\}}{n\left(x^2-2ax\cos\frac{5\pi}{n}+a^2\right)}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$-\frac{2a^{m-n}\left\{x\cos\frac{(n-2)m\pi}{n} - a\cos\frac{(n-2)(m-1)\pi}{n}\right\}}{n\left(x^2-2ax\cos\frac{(n-2)\pi}{n}+a^2\right)}.$$

III. Integration des Differentials

$$\frac{x^{m-1}\partial x}{x^n+a^n}.$$

1. n eine gerade Zahl.

Nach §. 36. erhält man leicht

$$\frac{n}{2a^{m-n}}\int\frac{x^{m-1}\partial x}{x^n+a^n}$$

$$= -\cos\frac{m\pi}{n}\, l\sqrt{x^2-2ax\cos\frac{\pi}{n}+a^2}$$

$$+\sin\frac{m\pi}{n}\,Arc\tang\frac{x\sin\frac{\pi}{n}}{a-x\cos\frac{\pi}{n}}$$

$$-\cos\frac{3m\pi}{n}\, l\sqrt{x^2-2ax\cos\frac{3\pi}{n}+a^2}$$

$$+\sin\frac{3m\pi}{n}\,Arc\tang\frac{x\sin\frac{3\pi}{n}}{a-x\cos\frac{3\pi}{n}}$$

$$-\cos\frac{5m\pi}{n}\,l\sqrt{x^2-2ax\cos\frac{5\pi}{n}+a^2}$$

$$+\sin\frac{5m\pi}{n}\,Arc\,tang\,\frac{x\sin\frac{5\pi}{n}}{a-x\cos\frac{5\pi}{n}}.$$

. . . .

$$-\cos\frac{(n-1)m\pi}{n}\,l\sqrt{x^2-2ax\cos\frac{(n-1)\pi}{n}+a^2}$$

$$+\sin\frac{(n-1)m\pi}{n}\,Arc\,tang\,\frac{x\sin\frac{(n-1)\pi}{n}}{a-x\cos\frac{(n-1)\pi}{n}}.$$

2. n eine ungerade Zahl.

Nach §. 32. und §. 36. ist

$$\frac{n}{2a^{m-n}}\int\frac{x^{m-1}\,\partial x}{x^n+a^n}$$

$$=\quad(-1)^{m-1}.\tfrac{1}{2}\,l.(x+a)^2$$

$$-\cos\frac{m\pi}{n}\,l\sqrt{x^2-2ax\cos\frac{\pi}{n}+a^2}$$

$$+\sin\frac{m\pi}{n}\,Arc\,tang\,\frac{x\sin\frac{\pi}{n}}{a-x\cos\frac{\pi}{n}}$$

$$-\cos\frac{3m\pi}{n}\,l\sqrt{x^2-2ax\cos\frac{3\pi}{n}+a^2}$$

$$+\sin\frac{3m\pi}{n}\,Arc\,tang\,\frac{x\sin\frac{3\pi}{n}}{a-x\cos\frac{3\pi}{n}}$$

$$-\cos\frac{5m\pi}{n}\,l\sqrt{x^2-2ax\cos\frac{5\pi}{n}+a^2}$$

$$+\sin\frac{5m\pi}{n}\,Arc\,tang\,\frac{x\sin\frac{5\pi}{n}}{a-\cos\frac{5\pi}{n}}$$

. . . .

$$-\cos\frac{(n-2)m\pi}{n}\,l\sqrt{x^2-2ax\cos\frac{(n-2)\pi}{n}+a^2}$$

$$+\sin\frac{(n-2)m\pi}{n}\,Arc\,tang\,\frac{x\sin\frac{(n-2)\pi}{n}}{a-x\cos\frac{(n-2)\pi}{n}}.$$

IV. Als Beispiel zu dem Vorhergehenden wollen wir nun das Integral $\int \frac{\partial x}{x^6+1}$ entwickeln.

Nach III. 1. ist

$$3\int \frac{\partial x}{x^6+1}$$

$$= -\cos\frac{\pi}{6}\, l \sqrt{x^2 - 2x\cos\frac{\pi}{6} + 1} + \sin\frac{\pi}{6}\, Arc\,tang \frac{x\sin\frac{\pi}{6}}{1 - x\cos\frac{\pi}{6}}$$

$$- \cos\frac{3\pi}{6}\, l \sqrt{x^2 - 2x\cos\frac{3\pi}{6} + 1} + \sin\frac{3\pi}{6}\, Arc\,tang \frac{x\sin\frac{3\pi}{6}}{1 - x\cos\frac{3\pi}{6}}$$

$$- \cos\frac{5\pi}{6}\, l \sqrt{x^2 - 2x\cos\frac{5\pi}{6} + 1} + \sin\frac{5\pi}{6}\, Arc\,tang \frac{x\sin\frac{5\pi}{6}}{1 - x\cos\frac{5\pi}{6}}.$$

Aber $\cos\frac{1}{6}\pi = \frac{1}{2}\sqrt{3}$, $\sin\frac{1}{6}\pi = \frac{1}{2}$; $\cos\frac{3}{6}\pi = 0$, $\sin\frac{3}{6}\pi = 1$; $\cos\frac{5}{6}\pi = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$, $\sin\frac{5}{6}\pi = \frac{1}{2}$, und folglich

$$3\int \frac{\partial x}{x^6+1} = \frac{1}{2}\sqrt{3}.\, l \sqrt{\frac{x^2 + x\sqrt{3} + 1}{x^2 - x\sqrt{3} + 1}}$$

$$+ \frac{1}{2} Arc\,tang \frac{x}{2 - x\sqrt{3}} + Arc\,tang\, x + \frac{1}{2} Arc\,tang \frac{x}{2 + x\sqrt{3}},$$

oder, weil

$$Arc\,tang \frac{x}{2 - x\sqrt{3}} + Arc\,tang \frac{x}{2 + x\sqrt{3}} + 2 Arc\,tang\, x$$

$$= Arc\,tang \frac{x}{2 - x\sqrt{3}} + Arc\,tang \frac{x}{2 + x\sqrt{3}} + Arc\,tang \frac{2x}{1 - x^2}$$

$$= Arc\,tang \frac{x}{1 - x^2} + Arc\,tang \frac{2x}{1 - x^2} = Arc\,tang \frac{3x(1 - x^2)}{1 - 4x^2 + x^4}$$

ist,

$$\int \frac{\partial x}{x^6+1} = \frac{1}{2\sqrt{3}}\, l \sqrt{\frac{x^2 + x\sqrt{3} + 1}{x^2 - x\sqrt{3} + 1}} + \frac{1}{6} Arc\,tang \frac{3x(1 - x^2)}{1 - 4x^2 + x^4}.$$

Sollte man nun das Integral $\int \frac{\partial x}{a + bx^6}$ unter der Voraussetzung, dass a und b gleiche Vorzeichen haben, entwickeln; so setze man

$$\sqrt[6]{\frac{a}{b}} = k, \quad \frac{x}{k} = z.$$

Dann wird

$$\int \frac{\partial x}{a+bx^6} = \frac{k}{a}\int \frac{\partial z}{1+z^6},$$

und folglich nach dem Vorhergehenden

$$\int \frac{\partial x}{a+bx^6}$$

$$= \frac{k}{a}\left\{\frac{1}{2\sqrt{3}}\, l \sqrt{\frac{x^2+kx\sqrt{3}+k^2}{x^2-kx\sqrt{3}+k^2}} + \tfrac{1}{6} Arc\,tang\, \frac{3kx(k^2-x^2)}{x^4-4k^2x^2+k^4}\right\}$$

oder auch

$$\int \frac{\partial x}{a+bx^6}$$

$$= \frac{1}{6bk^5}\left\{\frac{\sqrt{3}}{2}\, l\, \frac{x^2+kx\sqrt{3}+k^2}{x^2-kx\sqrt{3}+k^2} + Arc\,tang\, \frac{3kx(k^2-x^2)}{x^4-4k^2x^2+k^4}\right\}.$$

§. 43.

Aufgabe. Das Differential

$$\frac{x^{m-1}\partial x}{x^n - a^n}$$

zu integriren, unter der Voraussetzung, dass $m-1$ kleiner als n ist.

Auflösung. I. Zerlegung der Function $x^n - a^n$ in Factoren.

1. n eine gerade Zahl.

Die allgemeine Form der Wurzeln der Gleichung $x^n - a^n = 0$ ist

$$x = a.(+1)^{\frac{1}{n}}.$$

Weil nun

$$+1 = \cos 2\pi + \sin 2\pi \sqrt{-1}$$

ist; so sind nach D. §. 89. III.

$$+1,\ -1,$$

$$\cos\frac{2\pi}{n} \pm \sin\frac{2\pi}{n}\sqrt{-1},$$

$$\cos\frac{4\pi}{n} \pm \sin\frac{4\pi}{n}\sqrt{-1},$$

$$\cos\frac{6\pi}{n} \pm \sin\frac{6\pi}{n}\sqrt{-1},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\cos\frac{(n-2)\pi}{n} \pm \sin\frac{(n-2)\pi}{n}\sqrt{-1}$$

n sämmtlich unter einander ungleiche Werthe von $(+1)^{\frac{1}{n}}$, und folglich

$$+a,\ -a,$$
$$a\left(\cos\frac{2\pi}{n} \pm \sin\frac{2\pi}{n}\sqrt{-1}\right),$$
$$a\left(\cos\frac{4\pi}{n} \pm \sin\frac{4\pi}{n}\sqrt{-1}\right),$$
$$a\left(\cos\frac{6\pi}{n} \pm \sin\frac{6\pi}{n}\sqrt{-1}\right),$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$a\left(\cos\frac{(n-2)\pi}{n} \pm \sin\frac{(n-2)\pi}{n}\sqrt{-1}\right)$$

n sämmtlich unter einander ungleiche Wurzeln der Gleichung $x^n - a^n = 0$. Also ist nach §. 13.

$$\begin{aligned} x^n - a^n = \ & (x-a)(x+a) \\ & \times\left(x - a\cos\frac{2\pi}{n} - a\sin\frac{2\pi}{n}\sqrt{-1}\right) \\ & \times\left(x - a\cos\frac{2\pi}{n} + a\sin\frac{2\pi}{n}\sqrt{-1}\right) \\ & \times\left(x - a\cos\frac{4\pi}{n} - a\sin\frac{4\pi}{n}\sqrt{-1}\right) \\ & \times\left(x - a\cos\frac{4\pi}{n} + a\sin\frac{4\pi}{n}\sqrt{-1}\right) \\ & \cdots\cdots\cdots \\ & \times\left(x - a\cos\frac{(n-2)\pi}{n} - a\sin\frac{(n-2)\pi}{n}\sqrt{-1}\right) \\ & \times\left(x - a\cos\frac{(n-2)\pi}{n} + a\sin\frac{(n-2)\pi}{n}\sqrt{-1}\right), \end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned} x^n - a^n = \ & (x-a)(x+a) \\ & \times\left(x^2 - 2ax\cos\frac{2\pi}{n} + a^2\right) \\ & \times\left(x^2 - 2ax\cos\frac{4\pi}{n} + a^2\right) \\ & \times\left(x^2 - 2ax\cos\frac{6\pi}{n} + a^2\right) \\ & \cdots\cdots\cdots \\ & \times\left(x^2 - 2ax\cos\frac{(n-2)\pi}{n} + a^2\right). \end{aligned}$$

2. n eine ungerade Zahl.

Ganz auf ähnliche Art wie vorher sind nach D. §. 89. III.

$$+1,$$

$$\cos\frac{2\pi}{n} \pm \sin\frac{2\pi}{n}\sqrt{-1},$$

$$\cos\frac{4\pi}{n} \pm \sin\frac{4\pi}{n}\sqrt{-1},$$

$$\cos\frac{6\pi}{n} \pm \sin\frac{6\pi}{n}\sqrt{-1},$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$\cos\frac{(n-1)\pi}{n} \pm \sin\frac{(n-1)\pi}{n}\sqrt{-1}$$

n sämmtlich unter einander verschiedene Werthe von $(+1)^{\frac{1}{n}}$, und folglich

$$+a,$$

$$a\left(\cos\frac{2\pi}{n} \pm \sin\frac{2\pi}{n}\sqrt{-1}\right),$$

$$a\left(\cos\frac{4\pi}{n} \pm \sin\frac{4\pi}{n}\sqrt{-1}\right),$$

$$a\left(\cos\frac{6\pi}{n} \pm \sin\frac{6\pi}{n}\sqrt{-1}\right),$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$a\left(\cos\frac{(n-1)\pi}{n} \pm \sin\frac{(n-1)\pi}{n}\sqrt{-1}\right)$$

n sämmtlich unter einander ungleiche Wurzeln der Gleichung $x^n - a^n = 0$. Also ist nach §. 13.

$$\begin{aligned}
x^n - a^n = & \ (x-a) \\
& \times\left(x - a\cos\frac{2\pi}{n} - a\sin\frac{2\pi}{n}\sqrt{-1}\right) \\
& \times\left(x - a\cos\frac{2\pi}{n} + a\sin\frac{2\pi}{n}\sqrt{-1}\right) \\
& \times\left(x - a\cos\frac{4\pi}{n} - a\sin\frac{4\pi}{n}\sqrt{-1}\right) \\
& \times\left(x - a\cos\frac{4\pi}{n} + a\sin\frac{4\pi}{n}\sqrt{-1}\right) \\
& \cdots\cdots\cdots \\
& \times\left(x - a\cos\frac{(n-1)\pi}{n} - a\sin\frac{(n-1)\pi}{n}\sqrt{-1}\right) \\
& \times\left(x - a\cos\frac{(n-1)\pi}{n} + a\sin\frac{(n-1)\pi}{n}\sqrt{-1}\right),
\end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned}x^n - a^n = \; & (x-a) \\ & \times\left(x^2 - 2ax\cos\frac{2\pi}{n} + a^2\right) \\ & \times\left(x^2 - 2ax\cos\frac{4\pi}{n} + a^2\right) \\ & \times\left(x^2 - 2ax\cos\frac{6\pi}{n} + a^2\right) \\ & \quad\cdots\cdots\cdots \\ & \times\left(x^2 - 2ax\cos\frac{(n-1)\pi}{n} + a^2\right).\end{aligned}$$

II. Zerlegung der gebrochenen Function

$$\frac{x^{m-1}}{x^n - a^n}$$

in Partialbrüche.

1. n eine gerade Zahl.

Der Zähler des dem Factor

$$x - a\cos\frac{2k\pi}{n} \mp a\sin\frac{2k\pi}{n}\sqrt{-1}$$

von $x^n - a^n$ entsprechenden Partialbruchs ist nach §. 16.

$$\frac{a^{m-1}\left\{\cos\frac{2k\pi}{n} \pm \sin\frac{2k\pi}{n}\sqrt{-1}\right\}^{m-1}}{na^{n-1}\left\{\cos\frac{2k\pi}{n} \pm \sin\frac{2k\pi}{n}\sqrt{-1}\right\}^{n-1}},$$

d. i.

$$\frac{1}{n}a^{m-n}\left\{\cos\frac{2k\pi}{n} \pm \sin\frac{2k\pi}{n}\sqrt{-1}\right\}^{m-n},$$

und folglich nach D. §. 88.

$$\frac{1}{n}a^{m-n}\left\{\cos\frac{2k(m-n)\pi}{n} \pm \sin\frac{2k(m-n)\pi}{n}\sqrt{-1}\right\}$$

oder

$$\frac{1}{n}a^{m-n}\left\{\cos\frac{2km\pi}{n} \pm \sin\frac{2km\pi}{n}\sqrt{-1}\right\},$$

weil

$$\cos\frac{2k(m-n)\pi}{n} = \cos\left\{2k\left(\frac{m\pi}{n} - \pi\right)\right\} = \cos\frac{2km\pi}{n},$$

$$\sin\frac{2k(m-n)\pi}{n} = \sin\left\{2k\left(\frac{m\pi}{n} - \pi\right)\right\} = \sin\frac{2km\pi}{n}$$

ist.

Die Summe der beiden Brüche

$$\frac{\cos\frac{2km\pi}{n}+\sin\frac{2km\pi}{n}\sqrt{-1}}{x-a\cos\frac{2k\pi}{n}-a\sin\frac{2k\pi}{n}\sqrt{-1}}$$

und

$$\frac{\cos\frac{2km\pi}{n}-\sin\frac{2km\pi}{n}\sqrt{-1}}{x-a\cos\frac{2k\pi}{n}+a\sin\frac{2k\pi}{n}\sqrt{-1}}$$

ist aber, wie man leicht findet,

$$\frac{2x\cos\frac{2km\pi}{n}-2a\cos\frac{2k(m-1)\pi}{n}}{x^2-2ax\cos\frac{2k\pi}{n}+a^2}\ ^{*)}.$$

Endlich sind nach §. 16. die beiden den Factoren $x-a$ und $x+a$ von x^n-a^n entsprechenden Partialbrüche

$$\frac{a^{m-1}}{na^{n-1}(x-a)}\ \text{und}\ \frac{(-a)^{m-1}}{n(-a)^{n-1}(x+a)},$$

d. i.

$$\frac{a^{m-n}}{n(x-a)}\ \text{und}\ \frac{(-a)^{m-n}}{n(x+a)},$$

oder, weil n eine gerade Zahl ist,

$$\frac{a^{m-n}}{n(x-a)}\ \text{und}\ (-1)^m.\frac{a^{m-n}}{n(x+a)}.$$

Also ist

$$\frac{x^{m-1}}{x^n-a^n}=\frac{a^{m-n}}{n(x-a)}+(-1)^m.\frac{a^{m-n}}{n(x+a)}$$

$$+\frac{2a^{m-n}\left\{x\cos\frac{2m\pi}{n}-a\cos\frac{2(m-1)\pi}{n}\right\}}{n\left(x^2-2ax\cos\frac{2\pi}{n}+a^2\right)}$$

$$+\frac{2a^{m-n}\left\{x\cos\frac{4m\pi}{n}-a\cos\frac{4(m-1)\pi}{n}\right\}}{n\left(x^2-2ax\cos\frac{4\pi}{n}+a^2\right)}$$

---

*) Man muss bei dieser Addition jeden der beiden Nenner bloss als eine zweitheilige Grösse betrachten, so dass der reelle Theil den ersten, der imaginäre Theil den zweiten Theil bildet.

$$+\frac{2a^{m-n}\left\{x\cos\frac{6m\pi}{n}-a\cos\frac{6(m-1)\pi}{n}\right\}}{n\left(x^2-2ax\cos\frac{6\pi}{n}+a^2\right)}$$

. . . .

$$+\frac{2a^{m-n}\left\{x\cos\frac{(n-2)m\pi}{n}-a\cos\frac{(n-2)(m-1)\pi}{n}\right\}}{n\left(x^2-2ax\cos\frac{(n-2)\pi}{n}+a^2\right)}.$$

2. n eine ungerade Zahl.

Man erhält ganz auf ähnliche Art wie vorher

$$\frac{x^{m-1}}{x^n-a^n}=\frac{a^{m-n}}{n(x-a)}$$

$$+\frac{2a^{m-n}\left\{x\cos\frac{2m\pi}{n}-a\cos\frac{2(m-1)\pi}{n}\right\}}{n\left(x^2-2ax\cos\frac{2\pi}{n}+a^2\right)}$$

$$+\frac{2a^{m-n}\left\{x\cos\frac{4m\pi}{n}-a\cos\frac{4(m-1)\pi}{n}\right\}}{n\left(x^2-2ax\cos\frac{4\pi}{n}+a^2\right)}$$

$$+\frac{2a^{m-n}\left\{x\cos\frac{6m\pi}{n}-a\cos\frac{6(m-1)\pi}{n}\right\}}{n\left(x^2-2ax\cos\frac{6\pi}{n}+a^2\right)}$$

. . . .

$$+\frac{2a^{m-n}\left\{x\cos\frac{(n-1)m\pi}{n}-a\cos\frac{(n-1)(m-1)\pi}{n}\right\}}{n\left(x^2-2ax\cos\frac{(n-1)\pi}{n}+a^2\right)}.$$

III. Integration des Differentials

$$\frac{x^{m-1}\,\partial x}{x^n-a^n}.$$

1. n eine gerade Zahl.

Nach §. 32. und §. 36. ist

$$\frac{n}{2a^{m-n}}\int\frac{x^{m-1}\,\partial x}{x^n-a^n}$$

$$= \tfrac{1}{4}\,l.(x-a)^2 + (-1)^m.\tfrac{1}{4}\,l.(x+a)^2$$

$$+\cos\frac{2m\pi}{n}\,l\sqrt{x^2-2ax\cos\frac{2\pi}{n}+a^2}$$

$$-\sin\frac{2m\pi}{n}\,Arc\,tang\,\frac{x\sin\frac{2\pi}{n}}{a-x\cos\frac{2\pi}{n}}$$

$$+\cos\frac{4m\pi}{n}\,l\sqrt{x^2-2ax\cos\frac{4\pi}{n}+a^2}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots-\sin\frac{4m\pi}{n}\,Arc\,tang\,\frac{x\sin\frac{4\pi}{n}}{a-x\cos\frac{4\pi}{n}}$$

$$+\cos\frac{6m\pi}{n}\,l\sqrt{x^2-2ax\cos\frac{6\pi}{n}+a^2}$$

$$-\sin\frac{6m\pi}{n}\,Arc\,tang\,\frac{x\sin\frac{6\pi}{n}}{a-x\cos\frac{6\pi}{n}}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$+\cos\frac{(n-2)m\pi}{n}\,l\sqrt{x^2-2ax\cos\frac{(n-2)\pi}{n}+a^2}$$

$$-\sin\frac{(n-2)m\pi}{n}\,Arc\,tang\,\frac{x\sin\frac{(n-2)}{n}}{a-x\cos\frac{(n-2)\pi}{n}}.$$

2. n eine ungerade Zahl.

Auf ganz ähnliche Art wie vorher erhält man

$$\frac{n}{2a^{m-n}}\int\frac{x^{m-1}\,\partial x}{x^n-a^n}$$

$$= \tfrac{1}{4}\,l.(x-a)^2$$

$$+\cos\frac{2m\pi}{n}\,l\sqrt{x^2-2ax\cos\frac{2\pi}{n}+a^2}$$

$$-\sin\frac{2m\pi}{n}\,Arc\,tang\,\frac{x\sin\frac{2\pi}{n}}{a-x\cos\frac{2\pi}{n}}$$

$$+\cos\frac{4m\pi}{n}\,l\sqrt{x^2-2ax\cos\frac{4\pi}{n}+a^2}$$

$$-\sin\frac{4m\pi}{n}\,Arc\,tang\,\frac{x\sin\frac{4\pi}{n}}{a-x\cos\frac{4\pi}{n}}$$

$$+\cos\frac{6m\pi}{n}\,l\sqrt{x^2-2ax\cos\frac{6\pi}{n}+a^2}$$

$$-\sin\frac{6m\pi}{n}\,Arc\,tang\,\frac{x\sin\frac{6\pi}{n}}{a-x\cos\frac{6\pi}{n}}$$

. . . .

$$+\cos\frac{(n-1)m\pi}{n}\,l\sqrt{x^2-2ax\cos\frac{(n-1)\pi}{n}+a^2}$$

$$-\sin\frac{(n-1)m\pi}{n}\,Arc\,tang\,\frac{x\sin\frac{(n-1)\pi}{n}}{a-x\cos\frac{(n-1)\pi}{n}}.$$

IV. Als Beispiel zu dem Vorhergehenden wollen wir das Integral $\int\frac{\partial x}{x^6-1}$ entwickeln.

Es ist

$$3\int\frac{\partial x}{x^6-1}=\tfrac{1}{4}l.(x-1)^2-\tfrac{1}{4}l.(x+1)^2$$

$$+\cos\tfrac{1}{3}\pi.\,l\sqrt{x^2-2x\cos\tfrac{1}{3}\pi+1}-\sin\tfrac{1}{3}\pi.\,Arc\,tang\,\frac{x\sin\frac{1}{3}\pi}{1-x\cos\frac{1}{3}\pi}$$

$$+\cos\tfrac{2}{3}\pi.\,l\sqrt{x^2-2x\cos\tfrac{2}{3}\pi+1}-\sin\tfrac{2}{3}\pi.\,Arc\,tang\,\frac{x\sin\frac{2}{3}\pi}{1-x\cos\frac{2}{3}\pi}$$

$$=\tfrac{1}{4}l.(x-1)^2-\tfrac{1}{4}l.(x+1)^2$$

$$+\tfrac{1}{2}l\sqrt{x^2-x+1}-\tfrac{1}{2}\sqrt{3}.\,Arc\,tang\,\frac{\frac{1}{2}x\sqrt{3}}{1-\frac{1}{2}x}$$

$$-\tfrac{1}{2}l\sqrt{x^2+x+1}-\tfrac{1}{2}\sqrt{3}.\,Arc\,tang\,\frac{\frac{1}{2}x\sqrt{3}}{1+\frac{1}{2}x}$$

$$=\tfrac{1}{4}l\frac{(x-1)^2(x^2-x+1)}{(x+1)^2(x^2+x+1)}-\tfrac{1}{2}\sqrt{3}.\left\{Arc\,tang\,\frac{\frac{1}{2}x\sqrt{3}}{1-\frac{1}{2}x}+Arc\,tang\,\frac{\frac{1}{2}x\sqrt{3}}{1+\frac{1}{2}x}\right\},$$

d. i.

$$\int\frac{\partial x}{x^6-1}=\tfrac{1}{12}l\frac{(x-1)^2(x^2-x+1)}{(x+1)^2(x^2+x+1)}-\tfrac{1}{6}\sqrt{3}.Arc\,tang\,\frac{x\sqrt{3}}{1-x^2}.$$

Soll nun, unter der Voraussetzung, dass a und b entgegengesetzte Vorzeichen haben, $\int \frac{\partial x}{a+bx^6}$ entwickelt werden; so setze man

$$\sqrt[6]{-\frac{a}{b}} = k, \quad \frac{x}{k} = z.$$

Dann ist

$$\int \frac{\partial x}{a+bx^6} = \frac{k}{a}\int \frac{\partial z}{1-z^6} = -\frac{k}{a}\int \frac{\partial z}{z^6-1},$$

und folglich

$$\int \frac{\partial x}{a+bx^6}$$

$$= -\frac{k}{6a}\left\{\tfrac{1}{2} l \frac{(x-k)^2(x^2-kx+k^2)}{(x+k)^2(x^2+kx+k^2)} - \sqrt{3}\,.\,Arctang \frac{kx\sqrt{3}}{k^2-x^2}\right\}$$

$$= \frac{1}{6bk^5}\left\{\tfrac{1}{2} l \frac{(x-k)^2(x^2-kx+k^2)}{(x+k)^2(x^2+kx+k^2)} - \sqrt{3}\,.\,Arctang \frac{kx\sqrt{3}}{k^2-x^2}\right\},$$

oder auch

$$\int \frac{\partial x}{a+bx^6}$$

$$= \frac{-1}{6bk^5}\left\{\tfrac{1}{2} l \frac{(x+k)^2(x^2+kx+k^2)}{(x-k)^2(x^2-kx+k^2)} + \sqrt{3}\,.\,Arctang \frac{kx\sqrt{3}}{k^2-x^2}\right\}.$$

Fünftes Kapitel.

Integration der irrationalen algebraischen Differentiale.

§. 44.

Ein vorzügliches und sich zuerst darbietendes Mittel zur Integration irrationaler algebraischer Differentiale ist, dass man dieselben durch geeignete Substitutionen rational zu machen und dadurch ihre Integration auf das vorhergehende Kapitel zurückzuführen sucht. Ausserdem kann man Integrale irrationaler algebraischer Differentiale durch zweckmässige Substitutionen oft auf schon bekannte Integrale irrationaler algebraischer Differentiale zurückführen. Ferner leisten auch hier wieder die im zweiten Kapitel entwickelten Reductionsformeln in vielen Fällen die vortrefflichsten Dienste, und endlich muss man zuweilen zur Entwickelung der gegebenen Differentiale in convergirende Reihen, wenn dies möglich ist, seine Zuflucht nehmen, indem man dann auf diese Reihen die in §. 8. und §. 9. bewiesenen wichtigen

allgemeinen Sätze anwendet. Von allen diesen Integrationsmethoden werden im Folgenden Beispiele vorkommen.

§. 45.

Entwickelung des Integrals

$$\int \frac{\partial x}{(a+bx)^{\frac{n}{2}}}$$

Wir nehmen hier und im Folgenden immer an, dass n eine durch 2 nicht theilbare Zahl ist. Setzen wir nun $a+bx=z$; so ist $b\partial x = \partial z$, und folglich

$$\int \frac{\partial x}{(a+bx)^{\frac{n}{2}}}$$

$$= \frac{1}{b}\int z^{-\frac{n}{2}}\partial z = -\frac{2}{(n-2)bz^{\frac{n-2}{2}}} = -\frac{2}{(n-2)b(a+bx)^{\frac{n-2}{2}}}.$$

§. 46.

Entwickelung des Integrals

$$\int \frac{x^{m-1}\partial x}{(a+bx)^{\frac{n}{2}}}.$$

Nach §. 28. IV. ist.

$$\int \frac{x^{m-1}\partial x}{(a+bx)^{\frac{n}{2}}}$$

$$= \frac{2x^{m-1}}{(2m-n)b(a+bx)^{\frac{n-2}{2}}} - \frac{2(m-1)a}{(2m-n)b}\int \frac{x^{m-2}\partial x}{(a+bx)^{\frac{n}{2}}}.$$

Mittelst dieser Reductionsformel lässt sich das gesuchte Integral immer auf das in §. 45. entwickelte Integral zurückführen.

Man kann aber dieses Integral auch noch auf folgende Art entwickeln. Setzt man nämlich $a+bx=z^2$; so ist

$$(a+bx)^{\frac{n}{2}} = z^n,\quad x = \frac{z^2-a}{b},\quad b\partial x = 2z\partial z,$$

und folglich

$$\int \frac{x^{m-1}\partial x}{(a+bx)^{\frac{n}{2}}} = \frac{2}{b^m}\int \frac{(z^2-a)^{m-1}}{z^{n-1}}\partial z.$$

Entwickelt man nun $(z^2-a)^{m-1}$ nach dem binomischen Lehrsatze und dividirt durch z^{n-1}; so lässt sich das gesuchte Integral durch eine Reihe von Integralen von der Form $\int z^k \partial z$ ausdrücken, die bekanntlich immer leicht zu finden sind.

§. 47.

Entwickelung des Integrals

$$\int\frac{\partial x}{x\sqrt{a+bx}}$$

Man setze $a+bx=z^2$; so ist

$$\sqrt{a+bx}=z,\quad x=\frac{z^2-a}{b},\quad b\partial x=2z\partial z,$$

und folglich

$$\int\frac{\partial x}{x\sqrt{a+bx}}=2\int\frac{\partial z}{z^2-a},$$

wodurch also unser Integral auf das Integral eines rationalen algebraischen Differentials zurückgeführt ist, und nach §. 35. gefunden werden kann.

Wir unterscheiden bei der Integration die drei folgenden Fälle.

I. $a=0$.

In diesem Falle ist

$$\int\frac{\partial x}{x\sqrt{a+bx}}=\int\frac{\partial x}{x\sqrt{bx}}=\frac{1}{\sqrt{b}}\int x^{-\frac{3}{2}}\partial x=-\frac{2}{\sqrt{bx}}.$$

II. $a>0$.

Die Grösse b^2-4ac in §. 35. ist in Bezug auf das Integral $\int\frac{\partial z}{z^2-a}$, wie sogleich erhellet, $=4a$, und im vorliegenden Falle also >0. Folglich ist nach §. 35. II.

$$\int\frac{\partial z}{z^2-a}=\frac{1}{4\sqrt{a}}l.\left(\frac{2z-2\sqrt{a}}{2z+2\sqrt{a}}\right)^2,$$

oder

$$\int\frac{\partial z}{z^2-a}=\frac{1}{4\sqrt{a}}l.\left(\frac{z-\sqrt{a}}{z+\sqrt{a}}\right)^2.$$

Also ist

$$\int\frac{\partial x}{x\sqrt{a+bx}}=\frac{1}{2\sqrt{a}}l.\left(\frac{\sqrt{a+bx}-\sqrt{a}}{\sqrt{a+bx}+\sqrt{a}}\right)^2.$$

III. $a<0$.

In diesem Falle ist die Grösse b^2-4ac in §. 35. <0, und folglich nach §. 35. III.

$$\int\frac{\partial z}{z^2-a}=\frac{1}{\sqrt{-a}}\,Arc\,tang\,\frac{z}{\sqrt{-a}};$$

also

$$\int \frac{\partial x}{x\sqrt{a+bx}} = \frac{2}{\sqrt{-a}} \operatorname{Arc\,tang} \frac{\sqrt{a+bx}}{\sqrt{-a}}.$$

§. 48.

Entwickelung des Integrals

$$\int \frac{\partial x}{x(a+bx)^{\frac{n}{2}}}.$$

Nach §. 28. VI. ist

$$\int \frac{\partial x}{x(a+bx)^{\frac{n}{2}}} = \frac{2}{(n-2)\,a\,(a+bx)^{\frac{n-2}{2}}} + \frac{1}{a}\int \frac{\partial x}{x(a+bx)^{\frac{n-2}{2}}}.$$

Mittelst dieser Reductionsformel kann das gesuchte Integral immer auf das in §. 47. entwickelte Integral zurückgeführt werden.

§. 49.

Entwickelung des Integrals

$$\int \frac{\partial x}{x^{m+1}(a+bx)^{\frac{n}{2}}}.$$

Nach §. 28. III. ist

$$\int \frac{\partial x}{x^{m+1}(a+bx)^{\frac{n}{2}}}$$

$$= -\frac{1}{max^m(a+bx)^{\frac{n-2}{2}}} - \frac{(2m+n-2)b}{2ma}\int \frac{\partial x}{x^m(a+bx)^{\frac{n}{2}}}.$$

Mittelst dieser Reductionsformel lässt sich das gesuchte Integral immer auf das in §. 48. entwickelte Integral zurückführen.

§. 50.

Entwickelung des Integrals

$$\int x^m(a+bx)^{\frac{n}{2}}\partial x.$$

Man setze $a+bx = z^2$; so ist

$$(a+bx)^{\frac{n}{2}} = z^n, \quad x = \frac{z^2-a}{b}, \quad b\partial x = 2z\partial z,$$

und folglich

$$\int x^m(a+bx)^{\frac{n}{2}}\partial x = \frac{2}{b^{m+1}}\int (z^2-a)^m z^{n+1}\partial z.$$

Entwickelt man nun $(z^2 - a)^m$ nach dem binomischen Lehrsatze und multiplicirt den durch diese Entwickelung erhaltenen Ausdruck mit z^{n+1}; so wird das gesuchte Integral durch eine Reihe von Integralen von der Form $\int z^k \partial z$ ausgedrückt, die sich bekanntlich immer leicht finden lassen.

§. 51.

Entwickelung des Integrals

$$\int \frac{(a+bx)^{\frac{n}{2}} \partial x}{x^{m+1}}.$$

Nach §. 28. III. ist

$$\int \frac{(a+bx)^{\frac{n}{2}} \partial x}{x^{m+1}}$$

$$= -\frac{(a+bx)^{\frac{n+2}{2}}}{max^m} - \frac{(2m-n-2)b}{2ma} \int \frac{(a+bx)^{\frac{n}{2}} \partial x}{x^m}.$$

Mittelst dieser Reductionsformel kann man das gesuchte Integral immer auf das Integral

$$\int \frac{(a+bx)^{\frac{n}{2}} \partial x}{x}$$

zurückführen, so dass es also jetzt bloss noch auf die Entwickelung dieses Integrals ankommt.

Nach §. 28. V. ist aber

$$\int \frac{(a+bx)^{\frac{n}{2}} \partial x}{x} = \frac{2(a+bx)^{\frac{n}{2}}}{n} + a \int \frac{(a+bx)^{\frac{n-2}{2}} \partial x}{x}$$

Mittelst dieser Formel kann man, weil n eine ungerade Zahl ist, das gesuchte Integral offenbar immer auf

$$\int \frac{(a+bx)^{\frac{1}{2}} \partial x}{x}$$

zurückführen, und für dieses Integral ergiebt sich ferner mittelst derselben Reductionsformel

$$\int \frac{(a+bx)^{\frac{1}{2}} \partial x}{x} = 2(a+bx)^{\frac{1}{2}} + a \int \frac{\partial x}{x \sqrt{a+bx}},$$

so dass sich also dass gesuchte Integral immer auf das in §. 47. entwickelte Integral zurückführen lässt.

§. 52.

Entwickelung des Integrals

$$\int \frac{\partial x}{x\sqrt[3]{a+bx}}.$$

Man setze $a + bx = z^3$; so ist

$$\sqrt[3]{a+bx} = z,\quad b\partial x = 3z^2\partial z,\quad x = \frac{z^3-a}{b},$$

und folglich

$$\int \frac{\partial x}{x\sqrt[3]{a+bx}} = 3\int \frac{z\partial z}{z^3-a}.$$

Nach §. 43. III. 2. ist aber

$$\frac{3\sqrt[3]{a}}{2}\int\frac{z\partial z}{z^3-a} = \tfrac{1}{4}l.(z-\sqrt[3]{a})^2$$

$$+\cos\frac{4\pi}{3}\,l\sqrt{z^2-2z\sqrt[3]{a}.\cos\frac{2\pi}{3}+\sqrt[3]{a^2}}$$

$$-\sin\frac{4\pi}{3}\,Arc\,tang\frac{z\sin\frac{2\pi}{3}}{\sqrt[3]{a}-z\cos\frac{2\pi}{3}}$$

$$= \tfrac{1}{4}l.(z-\sqrt[3]{a})^2$$

$$-\tfrac{1}{2}l\sqrt{z^2+z\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{a^2}}+\tfrac{1}{2}\sqrt{3}.Arc\,tang\frac{z\sqrt{3}}{z+2\sqrt[3]{a}}$$

$$= \tfrac{1}{4}l\frac{(z-\sqrt[3]{a})^2}{z^2+z\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{a^2}} + \tfrac{1}{2}\sqrt{3}.Arc\,tang\frac{z\sqrt{3}}{z+2\sqrt[3]{a}}.$$

Aber

$$z^3-a = (z-\sqrt[3]{a})(z^2+z\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{a^2}).$$

Also

$$\frac{3\sqrt[3]{a}}{2}\int\frac{z\partial z}{z^3-a} = \tfrac{1}{4}l\frac{(z-\sqrt[3]{a})^3}{z^3-a} + \tfrac{1}{2}\sqrt{3}.Arc\,tang\frac{z\sqrt{3}}{z+2\sqrt[3]{a}}$$

$$= \tfrac{3}{4}l\frac{z-\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{z^3-a}} + \tfrac{1}{2}\sqrt{3}.Arc\,tang\frac{z\sqrt{3}}{z+2\sqrt[3]{a}},$$

und folglich

$$\int\frac{\partial x}{x\sqrt{a+bx}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt[3]{a}}\left\{\tfrac{3}{2}l\frac{\sqrt[3]{a+bx}-\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{bx}} + \sqrt{3}.Arc\,tang\frac{\sqrt{3}.\sqrt[3]{a+bx}}{\sqrt[3]{a+bx}+2\sqrt[3]{a}}\right\}.$$

§. 53.

Entwickelung des Integrals

$$\int \frac{\partial x}{x\sqrt[3]{(a+bx)^2}}.$$

Man setze wieder $a + bx = z^3$; so ist auf ganz ähnliche rt wie vorher

$$\int \frac{\partial x}{x\sqrt[3]{(a+bx)^2}} = 3\int \frac{\partial z}{z^3 - a},$$

nd nach §. 43. III. 2.

$$\frac{3\sqrt[3]{a^2}}{2}\int \frac{\partial z}{z^3 - a} = \tfrac{1}{4} l.(z - \sqrt[3]{a})^2$$

$$+ \cos\frac{2\pi}{3} l \sqrt{z^2 - 2z\sqrt[3]{a}.\cos\frac{2\pi}{3} + \sqrt[3]{a^2}}$$

$$- \sin\frac{2\pi}{3} \mathit{Arc\,tang} \frac{z \sin\frac{2\pi}{3}}{\sqrt[3]{a} - z\cos\frac{2\pi}{3}}$$

$$= \tfrac{1}{4} l.(z - \sqrt[3]{a})^2$$

$$- \tfrac{1}{2} l \sqrt{z^2 + z\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{a^2}} - \tfrac{1}{2}\sqrt{3}.\mathit{Arc\,tang} \frac{z\sqrt{3}}{z + 2\sqrt[3]{a}},$$

voraus auf ganz ähnliche Art wie im vorigen Paragraphen

$$\int \frac{\partial x}{x\sqrt[3]{(a+bx)^2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt[3]{a^2}} \left\{ \tfrac{1}{2} l \frac{\sqrt[3]{a+bx} - \sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{bx}} - \sqrt{3}.\mathit{Arc\,tang} \frac{\sqrt{3}.\sqrt[3]{a+bx}}{\sqrt[3]{a+bx} + 2\sqrt[3]{a}} \right\}$$

rhalten wird.

§. 54.

Entwickelung des Integrals

$$\int \frac{\partial x}{\sqrt{a + bx + cx^2}}.$$

Wir unterscheiden bei der Entwickelung dieses wichtigen ntegrals zwei Fälle, jenachdem $c > 0$ oder $c < 0$ ist.

I. $c > 0$.

Man bringe die Grösse unter dem Wurzelzeichen auf die Form

$$a + bx + cx^2 = c\left(\frac{a}{c} + \frac{b}{c}x + x^2\right)$$

und setze der Kürze wegen

$$\frac{a}{c} = \alpha, \quad \frac{b}{c} = \beta, \quad c = \gamma^2,$$

wo γ eine reelle Grösse bezeichnet; so ist

$$a + bx + cx^2 = \gamma^2(\alpha + \beta x + x^2)$$

und folglich

$$\int\frac{\partial x}{\sqrt{a+bx+cx^2}} = \frac{1}{\gamma}\int\frac{\partial x}{\sqrt{\alpha+\beta x+x^2}};$$

Nun setze man ferner

$$\sqrt{\alpha+\beta x+x^2} = x + z$$

oder

$$\alpha + \beta x + x^2 = x^2 + 2xz + z^2;$$

so ist

$$x = \frac{\alpha - z^2}{2z-\beta},\ x + z = \frac{\alpha-\beta z+z^2}{2z-\beta},\ \partial x = -\frac{2(\alpha-\beta z+z^2)\partial z}{(2z-\beta)^2},$$

und folglich

$$\int\frac{\partial x}{\sqrt{a+bx+cx^2}} = -\frac{2}{\gamma}\int\frac{\partial z}{2z-\beta}.$$

Aber nach §. 32.

$$\int\frac{\partial z}{2z-\beta} = \tfrac{1}{4}\,l.(2z-\beta)^2.$$

Folglich

$$\int\frac{\partial x}{\sqrt{a+bx+cx^2}} = -\frac{1}{2\gamma}\,l.(2z-\beta)^2,$$

woraus nach gehöriger Substitution

$$\int\frac{\partial x}{\sqrt{a+bx+cx^2}} = -\frac{1}{2\sqrt{c}}\,l.\left\{-\frac{b}{c} - 2x + \frac{2}{\sqrt{c}}\sqrt{a+bx+cx^2}\right\}^2$$

$$= -\frac{1}{2\sqrt{c}}\,l.\left\{-\frac{1}{c}\left(b + 2cx - 2\sqrt{c}.\sqrt{a+bx+cx^2}\right)\right\}^2,$$

oder, wenn man die in diesem Integrale noch enthaltene Constante weglässt,

$$\int\frac{\partial x}{\sqrt{a+bx+cx^2}} = -\frac{1}{2\sqrt{c}}\,l.(b+2cx-2\sqrt{c}.\sqrt{a+bx+cx^2})^2$$

folgt.

Zu bemerken hat man übrigens noch, dass man in diesem Ausdrucke des gesuchten Integrals offenbar $\sqrt{c}$ positiv und negativ nehmen, und daher auch

$$\int\frac{\partial x}{\sqrt{a+bx+cx^2}}=\frac{1}{2\sqrt{c}}\,l.(b+2cx+2\sqrt{c}.\sqrt{a+bx+cx^2})^2$$

setzen kann.

Will man also $\sqrt{c}$ immer positiv nehmen; so muss man eigentlich

$$\int\frac{\partial x}{\sqrt{a+bx+cx^2}}=\pm\frac{1}{2\sqrt{c}}\,l.(b+2cx\pm 2\sqrt{c}.\sqrt{a+bx+cx^2})^2$$

setzen.

Weil aber

$$(b+2cx+2\sqrt{c}.\sqrt{a+bx+cx^2})(b+2cx-2\sqrt{c}.\sqrt{a+bx+cx^2})$$
$$=(b+2cx)^2-4c(a+bx+cx^2)=b^2-4ac,$$

und folglich

$$-\frac{1}{2\sqrt{c}}\,l.(b+2cx-2\sqrt{c}.\sqrt{a+bx+cx^2})^2$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{c}}\,l.(b+2cx+2\sqrt{c}.\sqrt{a+bx+cx^2})^2-\frac{1}{2\sqrt{c}}\,l.(b^2-4ac)^2$$

ist; so reicht es, weil

$$-\frac{1}{2\sqrt{c}}\,l.(b^2-4ac)^2$$

eine constante Grösse ist, offenbar hin,

$$\int\frac{\partial x}{\sqrt{a+bx+cx^2}}=\frac{1}{2\sqrt{c}}\,l.(b+2cx+2\sqrt{c}.\sqrt{a+bx+cx^2})^2$$

zu setzen, und $\sqrt{c}$ immer positiv zu nehmen, welches im Folgenden auch meistens geschehen wird.

II. $c<0$.

In diesem Falle setzen wir

$$\int\frac{\partial x}{\sqrt{a+bx+cx^2}}=\frac{1}{\sqrt{-c}}\int\frac{\partial x}{\sqrt{-\frac{a}{c}-\frac{b}{c}x-x^2}},$$

oder, für $-\frac{a}{c}=\alpha$, $-\frac{b}{c}=\beta$, $-c=\gamma^2$,

$$\int\frac{\partial x}{\sqrt{a+bx+cx^2}}=\frac{1}{\gamma}\int\frac{\partial x}{\sqrt{\alpha+\beta x-x^2}}.$$

Setzen wir nun ferner $x - \frac{1}{2}\beta = z$; so ist $\partial x = \partial z$, $\alpha + \beta x - x^2 = \alpha + \frac{1}{4}\beta^2 - z^2$, und folglich, für $\alpha + \frac{1}{4}\beta^2 = g^2$,

$$\int \frac{\partial x}{\sqrt{a+bx+cx^2}} = \frac{1}{\gamma}\int \frac{\partial z}{\sqrt{g^2-z^2}}.$$

Für $z^2 = \frac{g^2u^2}{1+u^2}$ ist aber

$$g^2 - z^2 = \frac{g^2}{1+u^2},\ \partial z = \frac{g\partial u}{(1+u^2)\sqrt{1+u^2}},$$

und folglich

$$\int \frac{\partial x}{\sqrt{a+bx+cx^2}} = \frac{1}{\gamma}\int \frac{\partial u}{1+u^2} = \frac{1}{\sqrt{-c}}\, Arctang\, u.$$

Weil nun

$$u^2 = \frac{z^2}{g^2-z^2} = \frac{(x-\frac{1}{2}\beta)^2}{\alpha+\beta x-x^2} = \frac{(b+2cx)^2}{-4c(a+bx+cx^2)}$$

und folglich

$$u = \pm \frac{b+2cx}{2\sqrt{-c}.\sqrt{a+bx+cx^2}}$$

ist; so ist

$$\int \frac{\partial x}{\sqrt{a+bx+cx^2}} = \frac{1}{\sqrt{-c}}\, Arctang \pm \frac{b+2cx}{2\sqrt{-c}.\sqrt{a+bx+cx^2}},$$

wo sich nun noch fragt, ob man das obere oder untere Zeichen zu nehmen hat, eine Frage, welche sich am leichtesten beantworten lässt, wenn man die Grösse auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens differentiirt. Dadurch findet man, dass man das untere Zeichen nehmen muss, und dass also

$$\int \frac{\partial x}{\sqrt{a+bx+cx^2}} = \frac{1}{\sqrt{-c}}\, Arctang \frac{-b-2cx}{2\sqrt{-c}.\sqrt{a+bx+cx^2}}$$

ist.

Auch hier kann man $\sqrt{-c}$ positiv und negativ nehmen, und man muss also, wenn man $\sqrt{-c}$ immer positiv nehmen will, eigentlich

$$\int \frac{\partial x}{\sqrt{a+bx+cx^2}} = \pm \frac{1}{\sqrt{-c}}\, Arctang \frac{-b-2cx}{\pm 2\sqrt{-c}.\sqrt{a+bx+cx^2}}$$

setzen. Weil aber alle die trigonometrische Tangente

$$\frac{-b-2cx}{-2\sqrt{-c}.\sqrt{a+bx+cx^2}}$$

habende Kreisbogen, wie leicht erhellen wird, in dem analytischen Ausdrucke

$$-Arctang \frac{-b-2cx}{2\sqrt{-c}.\sqrt{a+bx+cx^2}}$$

zusammengefasst werden können; so reicht es offenbar hin,

$$\int \frac{\partial x}{\sqrt{a+bx+cx^2}} = \frac{1}{\sqrt{-c}} Arc\,tang \frac{-b-2cx}{2\sqrt{-c}.\sqrt{a+bx+cx^2}}$$

zu setzen, und $\sqrt{-c}$ immer positiv zu nehmen.

§. 55.

Entwickelung des Integrals

$$\int \frac{\partial x}{(a+bx+cx^2)^{\frac{n}{2}}}.$$

Wir setzen der Kürze wegen

$$a+bx+cx^2 = X,\ (b+2cx)\partial x = \partial X;$$

folglich überhaupt

$$\frac{\partial x}{X^p} = \frac{\partial X}{(b+2cx)X^p},$$

und, wenn man auf beiden Seiten mit $(b+2cx)^2$ multiplicirt,

$$\frac{(b^2+4bcx+4c^2x^2)\partial x}{X^p} = \frac{(b+2cx)\partial X}{X^p},$$

oder, weil

$$b^2+4bcx+4c^2x^2 = b^2-4ac+4cX$$

ist, wenn wir der Kürze wegen $4ac-b^2=k$ setzen,

$$\frac{(4cX-k)\partial x}{X^p} = \frac{(b+2cx)\partial X}{X^p}.$$

Also ist nach §. 27.

$$4c\int\frac{\partial x}{X^{p-1}} - k\int\frac{\partial x}{X^p} = (b+2cx)\int X^{-p}\partial X - 2c\int\partial x\int X^{-p}\partial X$$

$$= -\frac{b+2cx}{(p-1)X^{p-1}} + \frac{2c}{p-1}\int\frac{\partial x}{X^{p-1}},$$

und folglich

$$\int\frac{\partial x}{X^p} = \frac{b+2cx}{(p-1)kX^{p-1}} + \frac{2(2p-3)c}{(p-1)k}\int\frac{\partial x}{X^{p-1}}.$$

Durch fortgesetzte Anwendung dieser Formel ergiebt sich für $p=\frac{n}{2}$, wenn wir

$$A = \frac{1}{(n-2)k},\ B = \frac{4(n-3)c}{(n-4)k}A,\ C = \frac{4(n-5)c}{(n-6)k}B,\ D = \frac{4(n-7)c}{(n-8)k}C,\ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots L = \frac{4(n-2i+1)c}{(n-2i)k}K$$

setzen, leicht

$$\int\frac{\partial x}{X^{\frac{n}{2}}} =$$

$$\left\{\frac{A}{X^{\frac{n-3}{2}}} + \frac{B}{X^{\frac{n-5}{2}}} + \frac{C}{X^{\frac{n-7}{2}}} + \ldots + \frac{K}{X^{\frac{n-2i+1}{2}}} + \frac{L}{X^{\frac{n-2i-1}{2}}}\right\}\frac{2(b+2cx)}{\sqrt{X}}$$

$$+ 4(n-2i-1)cL\int\frac{\partial x}{X^{\frac{n}{2}-i}}.$$

Ist nun n eine ungerade Zahl und grösser als die Einheit, wie wir hier annehmen wollen; so kann man $i = \frac{n-1}{2}$ setzen, und wird also, da für diesen Werth von i das Glied

$$4(n-2i-1)cL\int\frac{\partial x}{X^{\frac{n}{2}-i}}$$

verschwindet, mittelst der vorbergehenden Formel das gesuchte Integral immer vollständig entwickeln können. Der Fall, wenn $n = 1$ ist, ist im vorigen Paragraphen ausführlich betrachtet worden.

Für $n = 3$ und $n = 5$ erhält man z. B.

$$\int\frac{\partial x}{X^{\frac{3}{2}}} = \frac{2(b+2cx)}{k\sqrt{X}}, \quad \int\frac{\partial x}{X^{\frac{5}{2}}} = \left(\frac{1}{3kX} + \frac{8c}{3k^2}\right)\frac{2(b+2cx)}{\sqrt{X}}.$$

§. 56.

Entwickelung des Integrals

$$\int(a+bx+cx^2)^{\frac{n}{2}}\partial x.$$

Kehrt man die im vorigen Paragraphen entwickelte allgemeine Relation um; so erhält man für $k = 4ac - b^2$,

$$\int\frac{\partial x}{X^{p-1}} = -\frac{b+2cx}{2(2p-3)cX} + \frac{(p-1)k}{2(2p-3)c}\int\frac{\partial x}{X^p},$$

und folglich, wenn man $-p+1$ für p setzt,

$$\int X^p\,\partial x = \frac{b+2cx}{2(2p+1)c}X^p + \frac{pk}{2(2p+1)c}\int X^{p-1}\partial x.$$

Durch fortgesetzte Anwendung dieser Formel ergiebt sich für $p = \frac{n}{2}$, wenn wir

$$A = \frac{1}{2(n+1)c},\ B = \frac{nk}{4(n-1)c}A,\ C = \frac{(n-2)k}{4(n-3)c}B,\ D = \frac{(n-4)k}{4(n-5)c},\ldots$$

$$\ldots\ldots L = \frac{(n-2i+4)k}{4(n-2i+3)c}K$$

setzen,

$$\int X^{\frac{n}{2}} \partial x =$$

$$\left\{ AX^{\frac{n-1}{2}} + BX^{\frac{n-3}{2}} + CX^{\frac{n-5}{2}} + \ldots + KX^{\frac{n-2i+3}{2}} + LX^{\frac{n-2i+1}{2}} \right\} (b+2cx)\sqrt{X}$$
$$+ \frac{n-2i+2}{2} kL \int X^{\frac{n}{2}-i} \partial x.$$

Nehmen wir nun wieder an, dass n eine ungerade Zahl ist, die auch die Einheit seyn kann; so können wir $i = \frac{n+1}{2}$ setzen, und werden also offenbar mittelst der vorhergehenden Formel das gesuchte Integral immer auf das in §. 54. entwickelte Integral $\int \frac{\partial x}{\sqrt{X}}$ zurückführen können. Für $n = 1$ und $n = 3$ ergiebt sich z. B.

$$\int X^{\frac{1}{2}} \partial x = \frac{(b+2cx)\sqrt{X}}{4c} + \frac{k}{8c} \int \frac{\partial x}{\sqrt{X}},$$

$$\int X^{\frac{3}{2}} \partial x = \left(\frac{X}{8c} + \frac{3k}{64c^2} \right) (b+2cx)\sqrt{X} + \frac{3k^2}{128c^2} \int \frac{\partial x}{\sqrt{X}}.$$

§. 57.

Entwickelung des Integrals

$$\int \frac{x^m \partial x}{(a+bx+cx^2)^{\frac{n}{2}}}.$$

Wir nehmen an, dass n eine ungerade Zahl ist, und setzen der Kürze wegen $a + bx + cx^2 = X$.

Nach §. 29. IV. ist

$$\int \frac{x^m \partial x}{X^{\frac{n}{2}}} =$$

$$\frac{x^{m-1}}{(m-n+1)\, cX^{\frac{n-2}{2}}} - \frac{(2m-n)b}{2(m-n+1)c} \int \frac{x^{m-1} \partial x}{X^{\frac{n}{2}}} - \frac{(m-1)a}{(m-n+1)c} \int \frac{x^{m-2} \partial x}{X^{\frac{n}{2}}}.$$

Mittelst dieser Formel kann das gesuchte Integral auf niedrigere Integrale derselben Art zurückgeführt werden. Für $m = 1$ ist z. B.

$$\int \frac{x \partial x}{X^{\frac{n}{2}}} = - \frac{1}{(n-2)cX^{\frac{n-2}{2}}} - \frac{b}{2c} \int \frac{\partial x}{X^{\frac{n}{2}}},$$

wodurch das Integral auf das in §. 55. entwickelte Integral zurückgeführt ist.

Nur für $m = n - 1$ ist die obige allgemeine Formel nicht mehr anwendbar, weil dann $m - n + 1 = 0$ wird, und dieser Fall muss also besonders betrachtet werden.

Weil aber

$$cx^{n-1} = (a + bx + cx^2)x^{n-3} - ax^{n-3} - bx^{n-2}$$

ist; so ist

$$c\int\frac{x^{n-1}\partial x}{X^{\frac{n}{2}}} = \int\frac{x^{n-3}\partial x}{X^{\frac{n-2}{2}}} - a\int\frac{x^{n-3}\partial x}{X^{\frac{n}{2}}} - b\int\frac{x^{n-2}\partial x}{X^{\frac{n}{2}}},$$

und folglich

$$\int\frac{x^{n-1}\partial x}{X^{\frac{n}{2}}} = \frac{1}{c}\int\frac{x^{n-3}\partial x}{X^{\frac{n-2}{2}}} - \frac{a}{c}\int\frac{x^{n-3}\partial x}{X^{\frac{n}{2}}} - \frac{b}{c}\int\frac{x^{n-2}\partial x}{X^{\frac{n}{2}}},$$

mittelst welcher Formel die Reduction des gesuchten Integrals auf niedrigere Integrale ähnlicher Art immer bewerkstelligt werden kann. Für $n = 1$ ist das Integral aus §. 54. bekannt.

§. 58.

Entwickelung des Integrals

$$\int\frac{\partial x}{x^m(a + bx + cx^2)^{\frac{n}{2}}}.$$

Auch hier nehmen wir an, dass n eine ungerade Zahl ist, und setzen der Kürze wegen $a + bx + cx^2 = X$.

Nach §. 29. III. ist

$$\int\frac{\partial x}{x^m X^{\frac{n}{2}}} = -\frac{1}{(m-1)ax^{m-1}X^{\frac{n-2}{2}}} - \frac{(2m+n-4)b}{2(m-1)a}\int\frac{\partial x}{x^{m-1}X^{\frac{n}{2}}}$$
$$-\frac{(m+n-3)c}{(m-1)a}\int\frac{\partial x}{x^{m-2}X^{\frac{n}{2}}}.$$

Mittelst dieser Formel lässt sich das gesuchte Integral auf niedrigere Integrale derselben Art zurückführen. Nur der Fall, wenn $m = 1$ ist, macht eine Ausnahme, und muss daher besonders behandelt werden.

Setzt man aber in dem für $\int\frac{\partial x}{xX^n}$ gefundenen Ausdrucke in §. 40. $\frac{n}{2}$ für n; so erhält man

$$\int\frac{\partial x}{xX^{\frac{n}{2}}} = \frac{1}{(n-2)aX^{\frac{n-2}{2}}} + \frac{1}{a}\int\frac{\partial x}{xX^{\frac{n-2}{2}}} - \frac{b}{2a}\int\frac{\partial x}{X^{\frac{n}{2}}},$$

und kann also mittelst dieser Relation das gesuchte Integral immer auf Integrale von der in §. 55. betrachteten Form und auf das Integral $\int\frac{\partial x}{x\sqrt{X}}$ zurückführen, so dass uns jetzt bloss noch die Entwickelung des letzten Integrals übrig bleibt.

Setzen wir aber $\frac{1}{x}=z$ so ist $-\frac{\partial x}{x^2}=\partial z$, $\frac{\partial x}{x}=-x\partial z$, und folglich, wie man leicht findet,

$$\int\frac{\partial x}{x\sqrt{X}}=-\int\frac{\partial z}{\sqrt{c+bz+az^2}},$$

wodurch also das erstere Integral wieder auf die in §. 55. betrachtete Form gebracht ist, und daher immer gefunden werden kann.

§. 59.

Entwickelung des Integrals

$$\int x^m(a+bx+cx^2)^{\frac{n}{2}}\partial x.$$

Nach §. 29. IV. ist, wenn wir $a+bx+cx^2=X$ setzen,

$$\int x^m X^{\frac{n}{2}}\partial x=\frac{x^{m-1}X^{\frac{n+2}{2}}}{(m+n+1)c}-\frac{(2m+n)b}{2(m+n+1)c}\int x^{m-1}X^{\frac{n}{2}}\partial x$$
$$-\frac{(m-1)a}{(m+n+1)c}\int x^{m-2}X^{\frac{n}{2}}\partial x.$$

Mittelst dieser Formel wird sich das gesuchte Integral immer ohne Schwierigkeit auf bekannte Integrale zurückführen lassen.

Es ist auch

$$\int x^m X^{\frac{n}{2}}\partial x=\int\frac{x^m X^n\partial x}{X^{\frac{n}{2}}}.$$

Entwickelt man nun $x^m X^n$ nach Potenzen von x; so wird sich mittelst §. 6. das gesuchte Integral in lauter Integrale von der in §. 57. betrachteten Form zerlegen lassen, und wird daher auch auf diese Weise immer entwickelt werden können.

§. 60.

Entwickelung des Integrals

$$\int\frac{(a+bx+cx^2)^{\frac{n}{2}}\partial x}{x^m}.$$

Nach §. 29. III. ist, wenn wir $a+bx+cx^2=X$ setzen,

$$\int\frac{X^{\frac{n}{2}}\partial x}{x^m}=-\frac{X^{\frac{n+2}{2}}}{(m-1)ax^{m-1}}-\frac{(2m-n-4)b}{(m-1)a}\int\frac{X^{\frac{n}{2}}\partial x}{x^{m-1}}$$

$$-\frac{(m-n-3)c}{(m-1)a}\int\frac{X^{\frac{n}{2}}\partial x}{x^{m-2}}.$$

Mittelst dieser Formel lässt sich das gesuchte Integral immer auf bekannte Integrale reduciren; nur der Fall, wenn $m=1$ ist, macht eine Ausnahme, und muss besonders betrachtet werden.

Setzt man in dem für $\int\frac{\partial x}{xX^{\frac{n}{2}}}$ gefundenen Ausdrucke in §. 58. $-n$ für n; so erhält man

$$\int\frac{X^{\frac{n}{2}}\partial x}{x}=-\frac{X^{\frac{n+2}{2}}}{(n+2)a}+\frac{1}{a}\int\frac{X^{\frac{n+2}{2}}\partial x}{x}-\frac{b}{2a}\int X^{\frac{n}{2}}\partial x,$$

und folglich

$$\int\frac{X^{\frac{n+2}{2}}\partial x}{x}=\frac{X^{\frac{n+2}{2}}}{n+2}+a\int\frac{X^{\frac{n}{2}}\partial x}{x}+\tfrac{1}{2}b\int X^{\frac{n}{2}}\partial x,$$

oder, wenn man jetzt $n-2$ für n setzt,

$$\int\frac{X^{\frac{n}{2}}\partial x}{x}=\frac{X^{\frac{n}{2}}}{n}+a\int\frac{X^{\frac{n-2}{2}}\partial x}{x}+\tfrac{1}{2}b\int X^{\frac{n-2}{2}}\partial x.$$

Mittelst dieser Formel lässt sich $\int\frac{X^{\frac{n}{2}}\partial x}{x}$ immer auf bekannte Integrale zurückführen. Für $n=1$ ist z. B.

$$\int\frac{X^{\frac{1}{2}}\partial x}{x}=X^{\frac{1}{2}}+a\int\frac{\partial x}{x\sqrt{X}}+\tfrac{1}{2}b\int\frac{\partial x}{\sqrt{X}},$$

wo beide Integrale auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens aus dem Vorhergehenden bekannt sind.

Es ist auch

$$\int\frac{X^{\frac{n}{2}}\partial x}{x^m}=\int\frac{X^n\partial x}{x^mX^{\frac{n}{2}}}.$$

Entwickelt man nun $\frac{X^n}{x^m}$ nach Potenzen von x, die positive und negative Exponenten haben können; so wird sich mittelst §. 6. das gesuchte Integral immer in lauter Integrale von der in §. 57. und §. 58. betrachteten Form zerlegen, und sich also auch auf diese Weise immer entwickeln lassen.

§. 61.

Entwickelung des Integrals

$$\int(\alpha+\beta x+\gamma x^2+\delta x^3+\ldots+\lambda x^m)X^{\pm\frac{n}{2}}\partial x.$$

Mittelst §. 6. lässt sich das gesuchte Integral immer in lauter Integrale von der in §. 57. oder §. 59. betrachteten Form zerlegen, und kann daher immer gefunden werden.

§. 62.

Die Integration irrationaler algebraischer Differentiale durch Reihen wollen wir nur an einem Beispiele zeigen.

Nach D. §. 117. ist, wenn wir die Quadratwurzel positiv nehmen,

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=1+\tfrac{1}{2}x^2+\frac{1.3}{2.4}x^4+\frac{1.3.5}{2.4.6}x^6+\frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}x^8+\ldots,$$
$$\{0=x<1\}.$$

Also ist nach §. 9.

$$\int_0^x\frac{\partial x}{\sqrt{1-x^2}}$$
$$=\int_0^x\partial x+\tfrac{1}{2}\int_0^x x^2\partial x+\frac{1.3}{2.4}\int_0^x x^4\partial x+\frac{1.3.5}{2.4.6}\int_0^x x^6\partial x+\ldots,$$
$$\{0=x<1\},$$

d. i.

$$\int_0^x\frac{\partial x}{\sqrt{1-x^2}}=x+\tfrac{1}{2}.\frac{x^3}{3}+\frac{1.3}{2.4}.\frac{x^5}{5}+\frac{1.3.5}{2.4.6}.\frac{x^7}{7}+\ldots.$$

Bezeichnet nun aber $Arc\sin x$ den zu x als Sinus gehörenden Kreisbogen, welcher den kleinsten absoluten Werth hat; so ist nach D. §. 68. offenbar

$$\int_0^x\frac{\partial x}{\sqrt{1-x^2}}=Arc\sin x,$$

und folglich

$$Arc\sin x=x+\tfrac{1}{2}.\frac{x^3}{3}+\frac{1.3}{2.4}.\frac{x^5}{5}+\frac{1.3.5}{2.4.6}.\frac{x^7}{7}+\ldots.$$
$$\{0=x<1\}.$$

§. 63.

Es lässt sich aber zeigen, dass die Reihe

$$x,\ \tfrac{1}{2}.\frac{x^3}{3},\ \frac{1.3}{2.4}.\frac{x^5}{5},\ \frac{1.3.5}{2.4.6}.\frac{x^7}{7},\ \ldots..$$

auch noch für $x = 1$ convergirt, d. h. man kann beweisen, dass die Reihe

$$1, \frac{1}{2}.\frac{1}{3}, \frac{1.3}{2.4}.\frac{1}{5}, \frac{1.3.5}{2.4.6}.\frac{1}{7}, \ldots\ldots$$

eine convergirende Reihe ist.

Lassen wir jetzt x immer eine positive Grösse bezeichnen, die kleiner als die Einheit ist; so ist nach D. §. 117.

$$(1-x)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{1.3}{2.4}x^2 + \frac{1.3.5}{2.4.6}x^3 + \ldots\ldots,$$

oder der Kürze wegen

$$(1-x)^{-\frac{1}{2}} = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + \ldots\ldots$$

Setzen wir also

$$s_n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots + a_{n-1} x^{n-1};$$

so nähert sich s_n, wenn n wächst, der endlichen völlig bestimmten Grösse $(1-x)^{-\frac{1}{2}}$ immer mehr und mehr, und kann derselben beliebig nahe gebracht werden, wenn man nur n gross genug nimmt. Daher muss für jedes beliebig grosse, aber bestimmte m die Grösse

$$s_{n+m} - s_n = a_n x^n + a_{n+1} x^{n+1} + a_{n+2} x^{n+2} + \ldots + a_{n+m-1} x^{n+m-1}$$

sich, wenn n wächst der Null immer mehr und mehr nähern, und wird derselben, wenn man nur n gross genug nimmt, auch beliebig nahe gebracht werden können.

Da nun die Coefficienten $a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots\ldots$ offenbar beständig abnehmen; so kann man, wie leicht erhellen wird, die positive ganze Zahl k immer so annehmen, dass zugleich

$$\frac{1}{2k+1} < x^{n+m-1},\ a_k < a_{n+m-1}$$

ist. Weil aber

$$\frac{1}{2k+1} \text{ und } a_k$$

unter den Grössen

$$\frac{1}{2k+1}, \frac{1}{2k+3}, \frac{1}{2k+5}, \ldots \frac{1}{2k+2m-1}$$

und

$$a_k, a_{k+1}, a_{k+2}, \ldots a_{k+m-1}$$

respective die grössten, dagegen

$$x^{n+m-1} \text{ und } a_{n+m-1}$$

unter den Grössen

$$x^n, x^{n+1}, x^{n+2}, \ldots x^{n+m-1}$$

und

$$a_n,\ a_{n+1},\ a_{n+2},\ \ldots\ a_{n+m-1}$$

respective die kleinsten sind; so ist offenbar

$$\frac{1}{2k+1} < x^n, \qquad a_k < a_n;$$

$$\frac{1}{2k+3} < x^{n+1}, \qquad a_{k+1} < a_{n+1};$$

$$\frac{1}{2k+5} < x^{n+2}, \qquad a_{k+2} < a_{n+2}$$

u. s. w. u. s. w.

$$\frac{1}{2k+2m-1} < x^{n+m-1}, \qquad a_{k+m-1} < a_{n+m-1}.$$

Folglich ist

$$a_k \cdot \frac{1}{2k+1} + a_{k+1} \cdot \frac{1}{2k+3} + \ldots + a_{k+m-1} \cdot \frac{1}{2k+2m-1}$$
$$< a_n x^n + a_{n+1} x^{n+1} + a_{n+2} x^{n+2} + \ldots + a_{n+m-1} x^{n+m-1},$$

d. i., wenn wir

$$S_k = a_0 + a_1 \cdot \frac{1}{3} + a_2 \cdot \frac{1}{5} + a_3 \cdot \frac{1}{7} + \ldots + a_{k-1} \cdot \frac{1}{2k-1}$$

setzen,

$$S_{k+m} - S_k < s_{n+m} - s_n.$$

Ueberlegt man nun, dass, wenn n wächst, offenbar auch k wächst; so ist aus dem Obigen klar, dass $S_{k+m} - S_k$ sich, wenn k wächst, der Null immer mehr und mehr nähert, und derselben beliebig nahe gebracht werden kann, wenn man nur k gross genug werden lässt. Daher wird S_k sich offenbar, wenn k wächst, einer gewissen bestimmten endlichen Grösse immer mehr und mehr und bis zu jedem beliebigen Grade nähern, und die Reihe

$$a_0,\ a_1 \cdot \frac{1}{3},\ a_2 \cdot \frac{1}{5},\ a_3 \cdot \frac{1}{7},\ a_4 \cdot \frac{1}{9},\ \ldots,$$

d. i. die Reihe

$$1,\ \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3},\ \frac{1.3}{2.4} \cdot \frac{1}{5},\ \frac{1.3.5}{2.4.6} \cdot \frac{1}{7},\ \ldots,$$

folglich convergiren, wie behauptet wurde.

Weil nun, wenn i eine unendlich kleine positive Grösse bezeichnet, nach §. 62. auch noch für $x = 1 - i$

$$Arc\sin x = x + \tfrac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{1.3}{2.4} \cdot \frac{x^5}{5} + \frac{1.3.5}{2.4.6} \cdot \frac{x^7}{7} + \ldots$$

ist; weil ferner $Arc\sin 1$ eine endlich völlig bestimmte Grösse ist, und nach dem Vorhergehenden die Reihe auf der rechten

Seite des Gleichheitszeichens auch noch für $x = 1$ eine endliche völlig bestimmte Summe hat; so erhellet leicht, dass die obige Gleichung auch noch für $x = 1$ gilt, oder dass

$$Arc\sin 1 = 1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3} + \frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{1}{5} + \frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\frac{1}{7} + \ldots\ldots,$$

und folglich

$$Arc\sin x = x + \frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3} + \frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{x^5}{5} + \frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\frac{x^7}{7} + \ldots$$
$$\{0 = x = 1\}$$

ist. Offenbar gilt diese Gleichung nun aber auch noch für jedes x von $x = 0$ bis $x = -1$, und es ist also

$$Arc\sin x = x + \frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3} + \frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{x^5}{5} + \frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\frac{x^7}{7} + \ldots\ldots$$
$$\{-1 = x = +1\}$$

Für $x = 1$ und $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ erhält man hieraus die beiden merkwürdigen Gleichungen

$$\tfrac{1}{4}\pi = 1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3} + \frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{1}{5} + \frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\frac{1}{7} + \ldots\ldots$$

und

$$\tfrac{1}{4}\pi = \frac{1}{\sqrt{2}}\left\{1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{1}{5}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\frac{1}{7}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3 + \ldots\right\}.$$

Besonders die letztere Gleichuug, welche sich auch unter der Form

$$\pi = 2\sqrt{2}.\left\{1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{1}{5}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\frac{1}{7}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3 + \ldots\right\}$$

schreiben lässt, ist wegen der ziemlich starken Convergenz der Reihe auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens zur Berechnung des numerischen Werthes von π geschickt.

Sechstes Kapitel.

Integration der Differentiale, welche Kreisfunctionen enthalten.

§. 64.

Reductionsformeln für das Integral $\int \sin x^m \cos x^n \partial x$.

1. Weil nach D. §. 60. und §. 61. $\partial \sin x = \cos x \partial x$ und $\partial \cos x = -\sin x \partial x$ ist; so ist umgekehrt

$$\int \cos x \partial x = \sin x, \quad \int \sin x \partial x = -\cos x,$$

zwei Formeln, welche die Grundlage von allem Folgenden bilden.

2. Nach §. 27. ist

$$\int \sin x^m \cos x^n \partial x = \sin x^m \cos x^{n-1} \int \cos x \partial x - \int \partial . \sin x^m \cos x^{n-1} \int \cos x \partial x$$

$$= \sin x^{m+1} \cos x^{n-1} - \int \{ m \sin x^m \cos x^n - (n-1) \sin x^{m+2} \cos x^{n-2} \} \partial x$$

$$= \sin x^{m+1} \cos x^{n-1} - m \int \sin x^m \cos x^n \partial x + (n-1) \int \sin x^{m+2} \cos x^{n-2} \partial x,$$

und folglich

$$\int \sin x^m \cos x^n \partial x = \frac{\sin x^{m+1} \cos x^{n-1}}{m+1} + \frac{n-1}{m+1} \int \sin x^{m+2} \cos x^{n-2} \partial x.$$

3. Ganz auf ähnliche Art ist nach §. 27.

$$\int \sin x^m \cos x^n \partial x = \sin x^{m-1} \cos x^n \int \sin x \partial x - \int \partial . \sin x^{m-1} \cos x^n \int \sin x \partial x$$

$$= -\sin x^{m-1} \cos x^{n+1} - \int \{ -(m-1) \sin x^{m-2} \cos x^{n+2} + n \sin x^m \cos x^n \} \partial x$$

$$= -\sin x^{m-1} \cos x^{n+1} + (m-1) \int \sin x^{m-2} \cos x^{n+2} \partial x - n \int \sin x^m \cos x^n \partial x,$$

und folglich

$$\int \sin x^m \cos x^n \partial x = -\frac{\sin x^{m-1} \cos x^{n+1}}{n+1} + \frac{m-1}{m+1} \int \sin x^{m-2} \cos x^{n+2} \partial x.$$

4. Setzt man in 2.

$$\sin x^{m+2} = \sin x^m (1 - \cos x^2);$$

so wird

$$\int \sin x^m \cos x^n \partial x$$

$$= \frac{\sin x^{m+1} \cos x^{n-1}}{m+1} + \frac{n-1}{m+1} \left\{ \int \sin x^m \cos x^{n-2} \partial x - \int \sin x^m \cos x^n \partial x \right\},$$

und folglich

$$\int \sin x^m \cos x^n \partial x = \frac{\sin x^{m+1} \cos x^{n-1}}{m+n} + \frac{n-1}{m+n} \int \sin x^m \cos x^{n-2} \partial x.$$

5. Setzt man in 3.

$$\cos x^{n+2} = \cos x^n (1 - \sin x^2);$$

so wird

$$\int \sin x^m \cos x^n \, \partial x$$

$$= -\frac{\sin x^{m-1} \cos x^{n+1}}{n+1} + \frac{m-1}{n+1} \left\{ \int \sin x^{m-2} \cos x^n \, \partial x - \int \sin x^m \cos x^n \, \partial x \right\},$$

und folglich

$$\int \sin x^m \cos x^n \, \partial x$$

$$= -\frac{\sin x^{m-1} \cos x^{n+1}}{m+n} + \frac{m-1}{m+n} \int \sin x^{m-2} \cos x^n \, \partial x.$$

6. Durch Umkehrung der Gleichung in 4. ergiebt sich

$$\int \sin x^m \cos x^{n-2} \, \partial x$$

$$= -\frac{\sin x^{m+1} \cos x^{n-1}}{n-1} + \frac{m+n}{n-1} \int \sin x^m \cos x^n \, \partial x,$$

und folglich, wenn wir nun $n + 2$ für n setzen,

$$\int \sin x^m \cos x^n \, \partial x$$

$$= -\frac{\sin x^{m+1} \cos x^{n+1}}{n+1} + \frac{m+n+2}{n+1} \int \sin x^m \cos x^{n+2} \, \partial x.$$

7. Durch Umkehrung der Gleichung in 5. ergiebt sich

$$\int \sin x^{m-2} \cos x^n \, \partial x$$

$$= \frac{\sin x^{m-1} \cos x^{n+1}}{m-1} + \frac{m+n}{m-1} \int \sin x^m \cos x^n \, \partial x,$$

und folglich, wenn wir nun $m + 2$ für m setzen,

$$\int \sin x^m \cos x^n \, \partial x$$

$$= \frac{\sin x^{m+1} \cos x^{n+1}}{m+1} + \frac{m+n+2}{m+1} \int \sin x^{m+2} \cos x^n \, \partial x.$$

Wir haben also jetzt die folgenden Reductionsformeln:

$$\text{I.} \quad \int \sin x^m \cos x^n \, \partial x$$

$$= \frac{\sin x^{m+1} \cos x^{n-1}}{m+1} + \frac{n-1}{m+1} \int \sin x^{m+2} \cos x^{n-2} \, \partial x,$$

$$\text{II.} \quad \int \sin x^m \cos x^n \, \partial x$$

$$= -\frac{\sin x^{m-1} \cos x^{n+1}}{n+1} + \frac{m-1}{n+1} \int \sin x^{m-2} \cos x^{n+2} \, \partial x,$$

$$\text{III.} \quad \int \sin x^m \cos x^n \, \partial x$$

$$= -\frac{\sin x^{m-1} \cos x^{n+1}}{m+n} + \frac{m-1}{m+n} \int \sin x^{m-2} \cos x^n \, \partial x,$$

IV. $\int \sin x^m \cos x^n \partial x$

$$= \frac{\sin x^{m+1} \cos x^{n-1}}{m+n} + \frac{n-1}{m+n} \int \sin x^m \cos x^{n-2} \partial x,$$

V. $\int \sin x^m \cos x^n \partial x$

$$= \frac{\sin x^{m+1} \cos x^{n+1}}{m+1} + \frac{m+n+2}{m+1} \int \sin x^{m+2} \cos x^n \partial x,$$

VI. $\int \sin x^m \cos x^n \partial x$

$$= -\frac{\sin x^{m+1} \cos x^{n+1}}{n+1} + \frac{m+n+2}{n+1} \int \sin x^m \cos x^{n+2} \partial x.$$

§. 65.

Entwickelung des Integrals $\int \sin x^n \partial x$.

Nach §. 64. III. ist

$$\int \sin x^n \partial x = -\frac{\sin x^{n-1} \cos x}{n} + \frac{n-1}{n} \int \sin x^{n-2} \partial x.$$

Ist nun

1. n eine gerade Zahl;

so erhält man durch wiederholte Anwendung der vorhergehenden Relation

$$\int \sin x^n \partial x = -\left\{\frac{1}{n} \sin x^{n-1} + \frac{n-1}{n(n-2)} \sin x^{n-3} + \frac{(n-1)(n-3)}{n(n-2)(n-4)} \sin x^{n-5} + \ldots + \frac{(n-1)(n-3)\ldots 3}{n(n-2)\ldots 2} \sin x\right\} \cos x + \frac{(n-1)(n-3)(n-5)\ldots 1}{n(n-2)(n-4)\ldots 2} x.$$

Ist aber

2. n eine ungerade Zahl;

so erhält man durch wiederholte Anwendung der obigen Relation

$$\int \sin x^n \partial x = -\left\{\frac{1}{n} \sin x^{n-1} + \frac{n-1}{n(n-2)} \sin x^{n-3} + \frac{(n-1)(n-3)}{n(n-2)(n-4)} \sin x^{n-5} + \ldots \ldots\ldots + \frac{(n-1)(n-3)\ldots 4}{n(n-2)\ldots 3} \sin x^2 + \frac{(n-1)(n-3)\ldots 2}{n(n-2)\ldots 1}\right\} \cos x.$$

§. 66.

Entwickelung des Integrals $\int \cos x^n \partial x$.

Nach §. 64. IV. ist

$$\int \cos x^n \partial x = \frac{\sin x \cos x^{n-1}}{n} + \frac{n-1}{n} \int \cos x^{n-2} \partial x.$$

Ist nun

1. n eine gerade Zahl;

so erhält man durch wiederholte Anwendung der vorhergehenden Relation

$$\int \cos x^n \partial x = \left\{\frac{1}{n}\cos x^{n-1} + \frac{n-1}{n(n-2)}\cos x^{n-3} + \frac{(n-1)(n-3)}{n(n-2)(n-4)}\cos x^{n-5} + \ldots + \frac{(n-1)(n-3)\ldots 3}{n(n-2)\ldots 2}\cos x\right\}\sin x + \frac{(n-1)(n-3)(n-5)\ldots 1}{n(n-2)(n-4)\ldots 2}\, x.$$

Ist dagegen

2. n eine ungerade Zahl;

so giebt die wiederholte Anwendung der obigen Relation

$$\int \cos x^n \partial x = \left\{\frac{1}{n}\cos x^{n-1} + \frac{n-1}{n(n-2)}\cos x^{n-3} + \frac{(n-1)(n-3)}{n(n-2)(n-4)}\cos x^{n-5} + \ldots \ldots + \frac{(n-1)(n-3)\ldots 4}{n(n-2)\ldots 3}\cos x^2 + \frac{(n-1)(n-3)\ldots 2}{n(n-2)\ldots 1}\right\}\sin x.$$

§. 67.

Entwickelung des Integrals $\int \frac{\partial x}{\sin x^n}$.

Nach §. 64. V. ist

$$\int \frac{\partial x}{\sin x^n} = -\frac{\cos x}{(n-1)\sin x^{n-1}} + \frac{n-2}{n-1}\int \frac{\partial x}{\sin x^{n-2}}.$$

Für $n = 1$ ist diese Relation nicht gültig, und das Integral $\int \frac{\partial x}{\sin x}$ wird also besonders zu entwickeln seyn.

Es ist aber

$$\int \frac{\partial x}{\sin x} = \int \frac{\sin x \partial x}{\sin x^2} = \int \frac{\sin x \partial x}{1-\cos x^2} = -\int \frac{-\sin x\partial x}{1-\cos x^2},$$

oder, wenn wir $\cos x = z$ setzen,

$$\int \frac{\partial x}{\sin x} = -\int \frac{\partial z}{1-z^2},$$

und folglich, wie man leicht durch Zerlegung in Partialbrüche findet, oder auch nach §. 35. II.

$$\int \frac{\partial x}{\sin x} = -\tfrac{1}{4} l.\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^2 = -\tfrac{1}{4} l.\left(\frac{1+\cos x}{1-\cos x}\right)^2 = \tfrac{1}{2} l.\tan g\, \tfrac{1}{2} x^2.$$

Ist nun

1. *n* eine gerade Zahl;

so ergiebt sich aus der obigen Relation ohne Schwierigkeit

$$\int \frac{\partial x}{\sin x^n} = -\left\{\frac{1}{(n-1)\sin x^{n-1}} + \frac{n-2}{(n-1)(n-3)\sin x^{n-3}} + \frac{(n-2)(n-4)}{(n-1)(n-3)(n-5)\sin x^{n-5}} + \ldots + \frac{(n-2)(n-4)\ldots 2}{(n-1)(n-3)\ldots 1 \sin x}\right\}\cos x.$$

Ist aber

2. *n* eine ungerade Zahl;

so erhält man aus der obigen Relation

$$\int \frac{\partial x}{\sin x^n} = -\left\{\frac{1}{(n-1)\sin x^{n-1}} + \frac{n-2}{(n-1)(n-3)\sin x^{n-3}} + \ldots \frac{(n-2)(n-4)\ldots 3}{(n-1)(n-3)\ldots 2 \sin x^2}\right\}\cos x + \frac{(n-2)(n-4)\ldots 3.1}{(n-1)(n-3)\ldots 4.2}\int \frac{\partial x}{\sin x}.$$

§. 68.

Entwickelung des Integrals

$$\int \frac{\partial x}{\cos x^n}.$$

Nach §. 64. VI. ist

$$\int \frac{\partial x}{\cos x^n} = \frac{\sin x}{(n-1)\cos x^{n-1}} + \frac{n-2}{n-1}\int \frac{\partial x}{\cos x^{n-2}}.$$

Der Fall, wenn $n = 1$ ist, muss zuerst wieder besonders betrachtet werden.

Es ist aber

$$\int \frac{\partial x}{\cos x} = \int \frac{\partial x}{\sin(\frac{1}{2}\pi - x)} = -\int \frac{\partial(\frac{1}{2}\pi - x)}{\sin(\frac{1}{2}\pi - x)},$$

und folglich nach §. 67.

$$\int \frac{\partial x}{\cos x} = -\tfrac{1}{2} l.\{tang(\tfrac{1}{4}\pi - \tfrac{1}{2}x)\}^2 = \tfrac{1}{2} l.\{tang(\tfrac{1}{4}\pi + \tfrac{1}{2}x)\}^2.$$

Ist nun

1. *n* eine gerade Zahl;

so ergiebt sich aus der obigen Relation

$$\int \frac{\partial x}{\cos x^n} = \left\{\frac{1}{(n-1)\cos x^{n-1}} + \frac{n-2}{(n-1)(n-3)\cos x^{n-3}} + \frac{(n-2)(n-4)}{(n-1)(n-3)(n-5)\cos x^{n-5}} + \ldots + \frac{(n-2)(n-4)\ldots 2}{(n-1(n-3)\ldots 1 \cos x}\right\}\sin x.$$

Ist aber

2. *n* eine ungerade Zahl;

so giebt die obige Relation

$$\int\frac{\partial x}{\cos x^n}=\left\{\frac{1}{(n-1)\cos x^{n-1}}+\frac{n-2}{(n-1)(n-3)\cos x^{n-3}}+\ldots\right.$$
$$\left.\ldots+\frac{(n-2)(n-4)\ldots 3}{(n-1)(n-3)\ldots 2\cos x^2}\right\}\sin x$$
$$+\frac{(n-2)(n-4)\ldots 3.1}{(n-1)(n-3)\ldots 4.2}\int\frac{\partial x}{\cos x}.$$

§. 69.

Entwickelung des Integrals

$\int\sin x^m\cos x^n\,\partial x.$

Um deutlich zu zeigen, wie man sich bei der Entwickelung der Integrale von dieser Form zu verhalten hat, wird die Betrachtung einiger besondern Fälle hinreichend seyn.

Für $m=8$ und $n=7$ erhält man mittelst abwechselnder Anwendung der Formeln §. 64. III. und IV.

$$\int\sin x^8\cos x^7\partial x=-\tfrac{1}{15}\sin x^7\cos x^8+\tfrac{7}{15}\int\sin x^6\cos x^7\partial x,$$
$$\int\sin x^6\cos x^7\partial x=\tfrac{1}{13}\sin x^7\cos x^6+\tfrac{6}{13}\int\sin x^6\cos x^5\partial x,$$
$$\int\sin x^6\cos x^5\partial x=-\tfrac{1}{11}\sin x^5\cos x^6+\tfrac{5}{11}\int\sin x^4\cos x^5\partial x,$$
$$\int\sin x^4\cos x^5\partial x=\tfrac{1}{9}\sin x^5\cos x^4+\tfrac{4}{9}\int\sin x^4\cos x^3\partial x,$$
$$\int\sin x^4\cos x^3\partial x=-\tfrac{1}{7}\sin x^3\cos x^4+\tfrac{3}{7}\int\sin x^2\cos x^3\partial x,$$
$$\int\sin x^2\cos x^3\partial x=\tfrac{1}{5}\sin x^3\cos x^2+\tfrac{2}{5}\int\sin x^2\cos x\,\partial x,$$
$$\int\sin x^2\cos x\,\partial x=-\tfrac{1}{3}\sin x\cos x^2+\tfrac{1}{3}\int\cos x\,\partial x.$$

Weil nun $\int\cos x\,\partial x=\sin x$ ist; so kann man mittelst der vorhergehenden Ausdrücke das gesuchte Integral offenbar vollständig entwickeln.

Für $m=9$, $n=4$ ergiebt sich aus §. 64. III. und IV.

$$\int\sin x^9\cos x^4\partial x=-\tfrac{1}{13}\sin x^8\cos x^5+\tfrac{8}{13}\int\sin x^7\cos x^4\partial x,$$
$$\int\sin x^7\cos x^4\partial x=-\tfrac{1}{11}\sin x^6\cos x^5+\tfrac{6}{11}\int\sin x^5\cos x^4\partial x,$$
$$\int\sin x^5\cos x^4\partial x=-\tfrac{1}{9}\sin x^4\cos x^5+\tfrac{4}{9}\int\sin x^3\cos x^4\partial x,$$
$$\int\sin x^3\cos x^4\partial x=\tfrac{1}{7}\sin x^4\cos x^3+\tfrac{3}{7}\int\sin x^3\cos x^2\partial x,$$
$$\int\sin x^3\cos x^2\partial x=-\tfrac{1}{5}\sin x^2\cos x^3+\tfrac{2}{5}\int\sin x\cos x^2\partial x,$$
$$\int\sin x\cos x^2\partial x=\tfrac{1}{3}\sin x^2\cos x+\tfrac{1}{3}\int\sin x\,\partial x.$$

Weil nun $\int\sin x\,\partial x=-\cos x$ ist; so wird sich mittelst der obigen Ausdrücke das gesuchte Integral leicht vollständig entwickeln lassen.

Für $m=6$ und $n=6$ ist nach §. 64. III. und IV.

$$\int \sin x^6 \cos x^6 \partial x = -\tfrac{1}{12} \sin x^5 \cos x^7 \partial x + \tfrac{5}{12}\int \sin x^4 \cos x^6 \partial x,$$
$$\int \sin x^4 \cos x^6 \partial x = \tfrac{1}{10} \sin x^5 \cos x^5 + \tfrac{5}{10}\int \sin x^4 \cos x^4 \partial x,$$
$$\int \sin x^4 \cos x^4 \partial x = -\tfrac{1}{8} \sin x^3 \cos x^5 + \tfrac{3}{8}\int \sin x^2 \cos x^4 \partial x,$$
$$\int \sin x^2 \cos x^4 \partial x = \tfrac{1}{6} \sin x^3 \cos x^3 + \tfrac{3}{6}\int \sin x^2 \cos x^2 \partial x,$$
$$\int \sin x^2 \cos x^2 \partial x = -\tfrac{1}{4} \sin x \cos x^3 + \tfrac{1}{4}\int \cos x^2 \partial x,$$
$$\int \cos x^2 \partial x = \tfrac{1}{2} \sin x \cos x + \tfrac{1}{2}\int \partial x.$$

Weil $\int \partial x = x$ ist; so lässt sich mittelst der vorhergehenden Ausdrücke das gesuchte Integral wieder vollständig entwickeln.

Für $m=5$ und $n=5$ ist nach §. 64. III. und IV.

$$\int \sin x^5 \cos x^5 \partial x = -\tfrac{1}{10} \sin x^4 \cos x^6 + \tfrac{4}{10}\int \sin x^3 \cos x^5 \partial x,$$
$$\int \sin x^3 \cos x^5 \partial x = \tfrac{1}{8} \sin x^4 \cos x^4 + \tfrac{4}{8}\int \sin x^3 \cos x^3 \partial x,$$
$$\int \sin x^3 \cos x^3 \partial x = -\tfrac{1}{6} \sin x^2 \cos x^4 + \tfrac{2}{6}\int \sin x \cos x^3 \partial x,$$
$$\int \sin x \cos x^3 \partial x = \tfrac{1}{4} \sin x^2 \cos x^2 + \tfrac{2}{4}\int \sin x \cos x \partial x.$$

Weil nun

$$\int \sin x \cos x \partial x = \tfrac{1}{2}\int \sin 2x \partial x = \tfrac{1}{4}\int \sin 2x \partial .2x = -\tfrac{1}{4} \cos 2x$$

ist; so lässt sich mittelst der obigen Ausdrücke das gesuchte Integral vollständig entwickeln.

Bemerken wollen wir noch, dass man bei der Entwickelung des Integrals $\int \sin x^m \cos x^n \partial x$ auch auf eine der beiden folgenden Arten verfahren kann.

Mittelst wiederholter Anwendung der Formel §. 64. III. kann man das gesuchte Integral, jenachdem m eine gerade oder eine ungerade Zahl ist, auf $\int \cos x^n \partial x$ oder auf $\int \sin x \cos x^n \partial x$ zurückführen. Im ersten Falle ist das gesuchte Integral als gefunden zu betrachten, weil $\int \cos x^n \partial x$ aus §. 66. bekannt ist. Im zweiten Falle kann man mittelst der Formel §. 64. IV. das Integral $\int \sin x \cos x^n \partial x$ entweder auf $\int \sin x \partial x$ oder $\int \sin x \cos x \partial x$ zurückführen, jenachdem n eine gerade oder eine ungerade Zahl ist. Da nun die beiden letzten Integrale bekannt sind; so ist auch in diesem Falle das gesuchte Integral als gefunden zu betrachten.

Man kann aber auch mittelst der Formel §. 64. IV. das Integral $\int \sin x^m \cos x^n \partial x$, jenachdem n eine gerade oder eine ungerade Zahl ist, auf $\int \sin x^m \partial x$ oder $\int \sin x^m \cos x \partial x$ zurückführen. Im ersten Falle ist das gesuchte Integral als gefunden zu betrachten, weil $\int \sin x^m \partial x$ aus §. 65. bekannt ist. Im zweiten Falle kann man mittelst der Formel §. 64. III. das Integral $\int \sin x^m \cos x \partial x$, jenachdem m eine gerade oder ungerade Zahl ist, auf das Integral $\int \cos x \partial x$ oder auf das Integral $\int \sin x \cos x \partial x$ zurückführen, so dass also auch in diesem Falle, weil die beiden letzten Integrale bekannt sind, das gesuchte Integral als gefunden zu betrachten ist.

Für $m = n$ ist überhaupt

$$\int \sin x^m \cos x^m \partial x = \frac{1}{2^m}\int \sin 2x^m \partial x = \frac{1}{2^{m+1}}\int \sin 2x^m \partial . 2x,$$

das gesuchte Integral also auf §. 65. zurückgeführt.

§. 70.

Entwickelung des Integrals

$$\int \frac{\partial x}{\sin x^m \cos x^n}.$$

Nach §. 64. V. und VI. ist

$$\int \frac{\partial x}{\sin x^m \cos x^n}$$

$$= -\frac{1}{(m-1)\sin x^{m-1}\cos x^{n-1}} + \frac{m+n-2}{m-1}\int \frac{\partial x}{\sin x^{m-2}\cos x^n}$$

und

$$\int \frac{\partial x}{\sin x^m \cos x^n}$$

$$= \frac{1}{(n-1)\sin x^{m-1}\cos x^{n-1}} + \frac{m+n-2}{n-1}\int \frac{\partial x}{\sin x^m \cos x^{n-2}}.$$

Mittelst der ersten dieser beiden Formeln kann man das gesuchte Integral, jenachdem m eine gerade oder ungerade Zahl ist, auf $\int \frac{\partial x}{\cos x^n}$ oder $\int \frac{\partial x}{\sin x \cos x^n}$ zurückführen. Im ersten Falle ist das gesuchte Integral als gefunden zu betrachten, weil $\int \frac{\partial x}{\cos x^n}$ aus §. 68. bekannt ist. Im zweiten Falle kann man mittelst der zweiten der beiden obigen Relationen $\int \frac{\partial x}{\sin x \cos x^n}$, jenachdem n eine gerade oder eine ungerade Zahl ist, auf $\int \frac{\partial x}{\sin x}$ oder $\int \frac{\partial x}{\sin x \cos x}$ zurückführen. Weil nun

$$\int \frac{\partial x}{\sin x \cos x} = \int \frac{2\partial x}{\sin 2x} = \int \frac{\partial . 2x}{\sin 2x},$$

und also, so wie $\int \frac{\partial x}{\sin x}$, aus §. 67. bekannt ist; so ist auch im zweiten Falle das gesuchte Integral als gefunden zu betrachten.

Man kann aber das gesuchte Integral auch mittelst der zweiten der beiden obigen Relationen, jenachdem n eine gerade oder eine ungerade Zahl ist, auf $\int \frac{\partial x}{\sin x^m}$ oder $\int \frac{\partial x}{\sin x^m \cos x}$

zurückführen. Im ersten Falle ist das gesuchte Integral als gefunden zu betrachten, weil $\int\frac{\partial x}{\sin x^m}$ aus §. 67. bekannt ist. Im zweiten Falle kann man mittelst der ersten der beiden obigen Relationen $\int\frac{\partial x}{\sin x^m \cos x}$, jenachdem m eine gerade oder eine ungerade Zahl ist, auf $\int\frac{\partial x}{\cos x}$ oder $\int\frac{\partial x}{\sin x \cos x}$ zurückführen. Das erste dieser beiden Integrale ist aus §. 68., das zweite aus dem Obigen bekannt.

Für $m = n$ ist auch

$$\int\frac{\partial x}{\sin x^m \cos x^m} = 2^m\int\frac{\partial x}{\sin 2x^m} = 2^{m-1}\int\frac{\partial . 2x}{\sin 2x^m},$$

wodurch das gesuchte Integral auf §. 67. zurückgeführt ist.

§. 71.

Entwickelung des Integrals

$$\int\frac{\sin x^m}{\cos x^n}\partial x.$$

Nach §. 64. III. ist

$$\int\frac{\sin x^m}{\cos x^n}\partial x$$

$$= -\frac{\sin x^{m-1}}{(m-n)\cos x^{n-1}} + \frac{m-1}{m-n}\int\frac{\sin x^{m-2}}{\cos x^n}\partial x.$$

Da diese Relation für $m = n$ nicht gilt; so wollen wir diesen Fall zuerst besonders betrachten, d. h. $\int tang\, x^m \partial x$ zu entwickeln suchen.

Durch Umkehrung der Formel §. 64. I. erhält man

$$\int \sin x^{m+2} \cos x^{n-2} \partial x$$

$$= -\frac{\sin x^{m+1} \cos x^{n-1}}{n-1} + \frac{m+1}{n-1}\int \sin x^m \cos x^n \partial x,$$

und folglich, wenn jetzt $m - 2$ und $- m + 2$ respective für m und n gesetzt wird,

$$\int tang\, x^m \partial x = \frac{1}{m-1} tang\, x^{m-1} - \int tang\, x^{m-2} \partial x.$$

Ist nun

1. m eine gerade Zahl;

so erhält man mittelst dieser Formel

$$\int tang\, x^m \partial x = \frac{tang\, x^{m-1}}{m-1} - \frac{tang\, x^{m-3}}{m-3} + \frac{tang\, x^{m-5}}{m-5} - \ldots$$

$$\ldots - (-1)^{\frac{m}{2}} \cdot \frac{tang\, x}{1} + (-1)^{\frac{m}{2}} x.$$

Ist aber

2. *m* eine ungerade Zahl;

so giebt die obige Relation

$$\int tang\, x^m \partial x = \frac{tang\, x^{m-1}}{m-1} - \frac{tang\, x^{m-3}}{m-3} + \frac{tang\, x^{m-5}}{m-5} - \ldots$$

$$\ldots - (-1)^{\frac{m-1}{2}} \cdot \frac{tang\, x^2}{2} + (-1)^{\frac{m-1}{2}} \int tang\, x \partial x.$$

Weil nun aber

$$\int tang\, x \partial x = \int \frac{\sin x \partial x}{\cos x} = -\int \frac{\partial \cos x}{\cos x} = -\tfrac{1}{2} l . \cos x^2$$

ist; so ist

$$\int tang\, x^m \partial x = \frac{tang\, x^{m-1}}{m-1} - \frac{tang\, x^{m-3}}{m-3} + \frac{tang\, x^{m-5}}{m-5} - \ldots$$

$$\ldots - (-1)^{\frac{m-1}{2}} \cdot \frac{tang\, x^2}{2} - (-1)^{\frac{m-1}{2}} . \tfrac{1}{2} l . \cos x^2.$$

Nachdem auf diese Weise $\int tang\, x^m \partial x$ gefunden ist, kann man mittelst der zu Anfange dieses Paragraphen aufgestellten Relation $\int \frac{\sin x^m}{\cos x^n} \partial x$, wie leicht erhellen wird, immer auf bekannte Integrale reduciren.

§. 72.

Entwickelung des Integrals,

$$\int \frac{\cos x^m}{\sin x^n} \partial x .$$

Nach §. 64. IV. ist

$$\int \frac{\cos x^m}{\sin x^n} \partial x = \frac{\cos x^{m-1}}{(m-n) \sin x^{n-1}} + \frac{m-1}{m-n} \int \frac{\cos x^{m-2}}{\sin x^n} \partial x .$$

Weil diese Relation auf den Fall $m = n$ nicht anwendbar ist; so ist zuerst dieser Fall besonders zu betrachten, d. i. $\int \cot x^m \partial x$ zu entwickeln.

Setzt man in der in §. 71. gefundenen Relation

$$\int \sin x^{m+2} \cos x^{n-2} \partial x$$

$$= - \frac{\sin x^{m+1} \cos x^{n-1}}{n-1} + \frac{m+1}{n-1} \int \sin x^m \cos x^n \partial x$$

für m und n respective $-m$ und m; so erhält man

$$\int \frac{\cos x^{m-2}}{\sin x^{m-2}} \partial x = -\frac{\cos x^{m-1}}{(m-1)\sin x^{m-1}} - \int \frac{\cos x^m}{\sin x^m} \partial x,$$

und folglich, wenn man diese Gleichung umkehrt, d. h. das zweite Integral durch das erste bestimmt,

$$\int \cot x^m \partial x = -\frac{1}{m-1} \cot x^{m-1} - \int \cot x^{m-2} \partial x.$$

Ist nun

1. m eine gerade Zahl;

so giebt diese Relation

$$\int \cot x^m \partial x = -\frac{\cot x^{m-1}}{m-1} + \frac{\cot x^{m-3}}{m-3} - \frac{\cot x^{m-5}}{m-5} + \ldots$$
$$\ldots + (-1)^{\frac{m}{2}} \cdot \frac{\cot x}{1} + (-1)^{\frac{m}{2}} \cdot x.$$

Ist aber

2. m eine ungerade Zahl;

so giebt die obige Relation

$$\int \cot x^m \partial x = -\frac{\cot x^{m-1}}{m-1} + \frac{\cot x^{m-3}}{m-3} - \frac{\cot x^{m-5}}{m-5} + \ldots$$
$$\ldots + (-1)^{\frac{m-1}{2}} \cdot \frac{\cot x^2}{2} + (-1)^{\frac{m-1}{2}} \cdot \int \cot x \, \partial x.$$

Weil nun aber

$$\int \cot x \, \partial x = \int \frac{\cos x \, \partial x}{\sin x} = \int \frac{\partial \sin x}{\sin x} = \tfrac{1}{2} l . \sin x^2$$

ist; so ist

$$\int \cot x^m \partial x = -\frac{\cot x^{m-1}}{m-1} + \frac{\cot x^{m-3}}{m-3} - \frac{\cot x^{m-5}}{m-5} + \ldots$$
$$\ldots + (-1)^{\frac{m-1}{2}} \cdot \frac{\cot x^2}{2} + (-1)^{\frac{m-1}{2}} \cdot \tfrac{1}{2} l . \sin x^2.$$

Nachdem auf diese Weise $\int \cot x^m \partial x$ gefunden ist, kann man, wie leicht erhellen wird, $\int \frac{\cos x^m}{\sin x^n} \partial x$ mittelst der zu Anfange dieses Paragraphen aufgestellten Relation immer auf bekannte Integrale reduciren.

§. 73.

Ausdrücke für die positiven ganzen Potenzen der Sinus und Cosinus durch die Sinus und Cosinus der vielfachen Winkel.

In den im Vorhergehenden entwickelten Formeln sind alle Integrale durch Potenzen der Sinus und Cosinus mit positiven ganzen Exponenten ausgedrückt worden. Will man aber diese Integrale durch Sinus und Cosinus der vielfachen Winkel ausdrücken; so muss man die merkwürdigen allgemeinen Formeln in Anwendung bringen, durch welche die positiven ganzen Potenzen der Sinus und Cosinus durch die Sinus und Cosinus der vielfachen Winkel ausgedrückt werden, und wir wollen daher diese in jeder Beziehung höchst wichtigen Formeln jetzt entwickeln.

Zu dem Ende sey

$$u = \cos x + \sin x\sqrt{-1}, \quad v = \cos x - \sin x\sqrt{-1};$$

so ist

$$2\cos x = u + v, \quad 2\sin x\sqrt{-1} = u - v.$$

Also ist, wenn n eine positive ganze Zahl bezeichnet, nach dem Binomial-Theorem für Potenzen mit positiven ganzen Exponenten

$$2^n \cos x^n = (u+v)^n$$
$$= u^n + n_1 u^{n-1} v + n_2 u^{n-2} v^2 + \ldots + n_{n-1} uv^{n-1} + n_n v^n,$$

und, wenn man u und v gegen einander vertauscht,

$$2^n \cos x^n = (v+u)^n$$
$$= v^n + n_1 v^{n-1} u + n_2 v^{n-2} u^2 + \ldots + n_{n-1} vu^{n-1} + n_n u^n.$$

Durch Addition dieser beiden Ausdrücke von $2^n \cos x^n$ ergiebt sich

$$2^{n+1} \cos x^n = u^n + v^n + n_1 (u^{n-1} v + v^{n-1} u) + n_2 (u^{n-2} v^2 + v^{n-2} u^2) + \ldots$$
$$\ldots + n_{n-1} (uv^{n-1} + vu^{n-1}) + n_n (v^n + u^n).$$

Ein allgemeines Glied dieser Reihe ist $n_k (u^{n-k} v^k + v^{n-k} u^k)$, wo k nicht grösser als n ist. Dieses allgemeine Glied kann man auch auf den Ausdruck $n_k (uv)^k (u^{n-2k} + v^{n-2k})$, oder, weil

$$uv = (\cos x + \sin x\sqrt{-1})(\cos x - \sin x\sqrt{-1}) = \cos x^2 + \sin x^2 = 1$$

ist, auf den noch einfachern Ausdruck $n_k (u^{n-2k} + v^{n-2k})$ bringen. Weil nun

$$n_{n-k} = \frac{n(n-1)\ldots(k+1)}{1.2.3\ldots(n-k)}, \quad n_k = \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{1.2.3\ldots k}$$

ist; so ist

$$\frac{n_k}{n_{n-k}} = \frac{n(n-1)\ldots 2.1}{n(n-1)\ldots 2.1} = 1, \text{ d. i. } n_k = n_{n-k}.$$

Ferner ist für ein beliebiges positives ganzes m

$$u^{-m}+v^{-m}=\frac{1}{u^m}+\frac{1}{v^m}=\frac{u^m+v^m}{(uv)^m}=u^m+v^m,$$

und nach D. §. 88. ist

$$u^m=(\cos x+\sin x\sqrt{-1})^m=\cos mx+\sin mx\sqrt{-1},$$
$$v^m=(\cos x-\sin x\sqrt{-1})^m=\cos mx-\sin mx\sqrt{-1};$$

also $u^m+v^m=2\cos mx$.

1. Ist nun zuerst n eine gerade Zahl; so ist

$$\begin{aligned}2^{n+1}\cos x^n = {} & u^n+v^n + n_n(u^{-n}+v^{-n})\\ & + n_1(u^{n-2}+v^{n-2}) + n_{n-1}(u^{-(n-2)}+v^{-(n-2)})\\ & + n_2(u^{n-4}+v^{n-4}) + n_{n-2}(u^{-(n-4)}+v^{-(n-4)})\\ & \cdots\cdots\cdots\cdots\\ & + n_{\frac{1}{2}n-1}(u^2+v^2) + n_{\frac{1}{2}n+1}(u^{-2}+v^{-2})\\ & + n_{\frac{1}{2}n}(u^0+v^0)\\ = {} & 2(u^n+v^n)+2n_1(u^{n-2}+v^{n-2})+2n_2(u^{n-4}+v^{n-4})+\ldots\\ & \ldots + 2n_{\frac{1}{2}n-1}(u^2+v^2)+2n_{\frac{1}{2}n},\end{aligned}$$

und folglich

$$\begin{aligned}2^{n-1}\cos x^n = {} & \cos nx + n_1\cos(n-2)x + n_2\cos(n-4)x+\ldots\\ & \ldots + n_{\frac{1}{2}n-1}\cos 2x + \tfrac{1}{2}n_{\frac{1}{2}n}.\end{aligned}$$

2. Ist ferner n eine ungerade Zahl; so ist

$$\begin{aligned}2^{n+1}\cos x^n = {} & u^n+v^n + n_n(u^{-n}+v^{-n})\\ & + n_1(u^{n-2}+v^{n-2}) + n_{n-1}(u^{-(n-2)}+v^{-(n-2)})\\ & + n_2(u^{n-4}+v^{n-4}) + n_{n-2}(u^{-(n-4)}+v^{-(n-4)})\\ & \cdots\cdots\cdots\cdots\\ & + n_{\frac{1}{2}(n-1)}(u+v) + n_{\frac{1}{2}(n+1)}(u^{-1}+v^{-1})\\ = {} & 2(u^n+v^n)+2n_1(u^{n-2}+v^{n-2})+2n_2(u^{n-4}+v^{n-4})\ldots\\ & \ldots + 2n_{\frac{1}{2}(n-1)}(u+v);\end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned}2^{n-1}\cos x^n = {} & \cos nx + n_1\cos(n-2)x + n_2\cos(n-4)x+\ldots\\ & \ldots + n_{\frac{1}{2}(n-1)}\cos x.\end{aligned}$$

Nach dem Obigen ist ferner

$$(-1)^{\frac{n}{2}}.\,2^n\sin x^n=(u-v)^n$$
$$=u^n-n_1u^{n-1}v+n_2u^{n-2}v^2-n_3u^{n-3}v^3+\ldots+(-1)^n v^n.$$

1. Ist nun wieder zuerst n eine gerade Zahl; so ist

$$(-1)^{\frac{n}{2}}.2^n \sin x^n = (u-v)^n$$
$$= u^n - n_1 u^{n-1} v + n_2 u^{n-2} v^2 - \ldots - n_{n-1} u v^{n-1} + n_n v^n.$$

Weil aber in diesem Falle $(u-v)^n = (v-u)^n$ ist; so kann man u und v gegen einander vertauschen und erhält auf diese Weise

$$(-1)^{\frac{n}{2}}.2^n \sin x^n = (v-u)^n$$
$$= v^n - n_1 v^{n-1} u + n_2 v^{n-2} u^2 - \ldots - n_{n-1} v u^{n-1} + n_n u^n.$$

Also ist

$$(-1)^{\frac{n}{2}}.2^{n+1} \sin x^n = u^n + v^n - n_1(u^{n-1}v + v^{n-1}u) + n_2(u^{n-2}v^2 + v^{n-2}u^2)$$
$$- \ldots\ldots\ldots - n_{n-1}(uv^{n-1} + vu^{n-1}) + n_n(v^n + u^n)$$
$$= u^n + v^n \qquad + n_n(u^{-n} + v^{-n})$$
$$- n_1(u^{n-2} + v^{n-2}) - n_{n-1}(u^{-(n-2)} + v^{-(n-2)})$$
$$+ n_2(u^{n-4} + v^{n-4}) + n_{n-2}(u^{-(n-4)} + v^{-(n-4)})$$
$$\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot$$
$$+ (-1)^{\frac{n-2}{2}}.n_{\frac{1}{2}n-1}(u^2 + v^2) + (-1)^{\frac{n-2}{2}}.n_{\frac{1}{2}n+1}(u^{-2} + v^{-2})$$
$$+ (-1)^{\frac{n}{2}}.n_{\frac{1}{2}n}(u^0 + v^0)$$
$$= 2(u^n + v^n) - 2n_1(u^{n-2} + v^{n-2}) + 2n_2(u^{n-4} + v^{n-4}) - \ldots$$
$$\ldots + 2(-1)^{\frac{n-2}{2}}.n_{\frac{1}{2}n-1}(u^2 + v^2) + 2(-1)^{\frac{n}{2}}.n_{\frac{1}{2}n};$$

also

$$(-1)^{\frac{n}{2}}.2^{n-1} \sin x^n = \cos nx - n_1 \cos(n-2)x + n_2 \cos(n-4)x - \ldots$$
$$\ldots + (-1)^{\frac{n-2}{2}}.n_{\frac{1}{2}n-1} \cos 2x + \tfrac{1}{2}(-1)^{\frac{n}{2}}.n_{\frac{1}{2}n}.$$

2. Wenn ferner n eine ungerade Zahl ist; so ist, weil

$(-1)^{\frac{n}{2}} = (-1)^{\frac{n-1}{2}}\sqrt{-1}$ ist,

$$(-1)^{\frac{n-1}{2}}.\sqrt{-1}.2^n \sin x^n = (u-v)^n$$
$$= u^n - n_1 u^{n-1} v + n_2 u^{n-2} v^2 - \ldots + n_{n-1} u v^{n-1} - n_n v^n.$$

Weil nun in diesem Falle $(u-v)^n = -(v-u)^n$ ist; so ist auch

$$(-1)^{\frac{n-1}{2}}.\sqrt{-1}.2^n \sin x^n = -(v-u)^n$$
$$= -v^n + n_1 v^{n-1} u - n_2 v^{n-2} u^2 + \ldots - n_{n-1} v u^{n-1} + n_n u^n,$$

und folglich

$$(-1)^{\frac{n-1}{2}}.\sqrt{-1}.2^{n+1}\sin x^n$$
$$= u^n - v^n - n_1(u^{n-1}v - v^{n-1}u) + n_2(u^{n-2}v^2 - v^{n-2}u^2) - \ldots$$
$$\ldots + n_{n-1}(uv^{n-1} - vu^{n-1}) - n_n(v^n - u^n).$$

Ein allgemeines Glied dieser Reihe, ohne Rücksicht auf sein Vorzeichen, ist $n_k(u^{n-k}v^k - v^{n-k}u^k)$, wo k nicht grösser als n ist, und es erhellet nun wieder leicht, dass man dieses allgemeine Glied auch auf den Ausdruck $n_k(uv)^k(u^{n-2k} - v^{n-2k})$, d. i. auf den Ausdruck $n_k(u^{n-2k} - v^{n-2k})$ bringen kann. Also ist

$$(-1)^{\frac{n-1}{2}}.\sqrt{-1}.2^{n+1}\sin x^n = u^n - v^n - n_n(u^{-n} - v^{-n})$$
$$- n_1(u^{n-2} - v^{n-2}) + n_{n-1}(u^{-(n-2)} - v^{-(n-2)})$$
$$+ n_2(u^{n-4} - v^{n-4}) - n_{n-2}(u^{-(n-4)} - v^{-(n-4)})$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$+ (-1)^{\frac{n-1}{2}}.n_{\frac{1}{2}(n-1)}(u - v) - (-1)^{\frac{n-1}{2}}.n_{\frac{1}{2}(n+1)}(u^{-1} - v^{-1}).$$

Nun ist aber

$$u^{-m} - v^{-m} = \frac{1}{u^m} - \frac{1}{v^m} = -\frac{u^m - v^m}{(uv)^m} = -(u^m - v^m).$$

Folglich ist

$$(-1)^{\frac{n-1}{2}}.\sqrt{-1}.2^{n+1}\sin x^n$$
$$= 2(u^n - v^n) - 2n_1(u^{n-2} - v^{n-2}) + 2n_2(u^{n-4} - v^{n-4}) - \ldots$$
$$\ldots + (-1)^{\frac{n-1}{2}}.2n_{\frac{1}{2}(n-1)}(u - v).$$

Weil nun ferner nach D. §. 88.

$$u^m = (\cos x + \sin x\sqrt{-1})^m = \cos mx + \sin mx\sqrt{-1},$$
$$v^m = (\cos x - \sin x\sqrt{-1})^m = \cos mx - \sin mx\sqrt{-1},$$

also $u^m - v^m = 2\sin mx\sqrt{-1}$ ist; so ist, wenn man zugleich auf beiden Seiten mit $4\sqrt{-1}$ dividirt,

$$(-1)^{\frac{n-1}{2}}.2^{n-1}\sin x^n = \sin nx - n_1\sin(n-2)x + n_2\sin(n-4)x - \ldots$$
$$\ldots + (-1)^{\frac{n-1}{2}}.n_{\frac{1}{2}(n-1)}\sin x.$$

§. 74.

Neue Entwickelung von $\int\sin x^n\partial x$ und $\int\cos x^n\partial x$.

Es ist

$$\int\cos ax\,\partial x = \frac{1}{a}\int\cos ax\,\partial.ax = \frac{1}{a}\sin ax,$$
$$\int\sin ax\,\partial x = \frac{1}{a}\int\sin ax\,\partial.ax = -\frac{1}{a}\cos ax.$$

I. Um nun zuvörderst $\int \sin x^n \partial x$ zu entwickeln; so sey

1. n eine gerade Zahl.

Nach §. 73. erhält man in diesem Falle

$$(-1)^{\frac{n}{2}} . 2^{n-1} \int \sin x^n \partial x$$

$$= \frac{1}{n} \sin nx - \frac{n_1}{n-2} \sin(n-2)x + \frac{n_2}{n-4} \sin(n-4)x - \ldots$$

$$\ldots + (-1)^{\frac{n-2}{2}} . \frac{n_{\frac{1}{2}n-1}}{2} \sin 2x + \tfrac{1}{2}(-1)^{\frac{n}{2}} . n_{\frac{1}{2}n} x.$$

Wenn ferner

2. n eine ungerade Zahl

ist; so ist nach §. 73.

$$(-1)^{\frac{n-1}{2}} . 2^{n-1} \int \sin x^n \partial x$$

$$= -\frac{1}{n} \cos nx + \frac{n_1}{n-2} \cos(n-2)x - \frac{n_2}{n-4} \cos(n-4)x + \ldots$$

$$\ldots - (-1)^{\frac{n-1}{2}} . \frac{n_{\frac{1}{2}(n-1)}}{1} \cos x.$$

II. Für $\int \cos x^n \partial x$ ergiebt sich ganz eben so aus §. 73., wenn

1. n eine gerade Zahl

ist:

$$2^{n-1} \int \cos x^n \partial x = \frac{1}{n} \sin nx + \frac{n_1}{n-2} \sin(n-2)x + \frac{n_2}{n-4} \sin(n-4)x + \ldots$$

$$\ldots + \frac{n_{\frac{1}{2}n-1}}{2} \sin 2x + \tfrac{1}{2} n_{\frac{1}{2}n} x;$$

und wenn

2. n eine ungerade Zahl

ist:

$$2^{n-1} \int \cos x^n \partial x = \frac{1}{n} \sin nx + \frac{n_1}{n-2} \sin(n-2)x + \frac{n_2}{n-4} \sin(n-4)x + \ldots$$

$$\ldots + \frac{n_{\frac{1}{2}(n-1)}}{1} \sin x.$$

§. 75.

Entwickelung von $\int x^n \sin x \partial x$ und $\int x^n \cos x \partial x$.

Es wird hinreichend seyn, die Entwickelung jedes dieser beiden Integrale blos an einem Beispiele zu erläutern, da dieselbe sehr einfach ist.

Nach §. 27. ist nämlich z. B.

$$\int x^4 \sin x\partial x = x^4\int \sin x\partial x - 4\int x^3\partial x\int \sin x\partial x$$
$$= -x^4\cos x + 4\int x^3\cos x\partial x$$
$$= -x^4\cos x + 4x^3\int \cos x\partial x - 12\int x^2\partial x\int \cos x\partial x$$
$$= -x^4\cos x + 4x^3\sin x - 12\int x^2\sin x\partial x$$
$$= -x^4\cos x + 4x^3\sin x - 12x^2\int \sin x\partial x + 24\int x\partial x\int \sin x\partial x$$
$$= -x^4\cos x + 4x^3\sin x + 12x^2\cos x - 24\int x\cos x\partial x$$
$$= -x^4\cos x + 4x^3\sin x + 12x^2\cos x - 24x\int \cos x\partial x + 24\int\partial x\int \cos x\partial x$$
$$= -x^4\cos x + 4x^3\sin x + 12x^2\cos x - 24x\sin x + 24\int \sin x\partial x$$
$$= -x^4\cos x + 4x^3\sin x + 12x^2\cos x - 24x\sin x - 24\cos x,$$

und ganz auf ähnliche Art

$$\int x^3\cos x\partial x = x^3\int \cos x\partial x - 3\int x^2\partial x\int \cos x\partial x$$
$$= x^3\sin x - 3\int x^2\sin x\partial x$$
$$= x^3\sin x - 3x^2\int \sin x\partial x + 6\int x\partial x\int \sin x\partial x$$
$$= x^3\sin x + 3x^2\cos x - 6\int x\cos x\partial x$$
$$= x^3\sin x + 3x^2\cos x - 6x\int \cos x\partial x + 6\int\partial x\int \cos x\partial x$$
$$= x^3\sin x + 3x^2\cos x - 6x\sin x + 6\int \sin x\partial x$$
$$= x^3\sin x + 3x^2\cos x - 6x\sin x - 6\cos x.$$

§. 76.

Entwickelung des Integrals

$$\int\frac{\partial x}{a + b\cos x}.$$

Man setze $\cos x = \frac{1-z^2}{1+z^2}$, und nehme z, was offenbar verstattet ist, als positiv oder negativ an, jenachdem $\sin x$ positiv oder negativ ist; so ist

$$\sin x = \frac{2z}{1+z^2},\quad \cos x\partial x = \frac{2(1-z^2)\partial z}{(1+z^2)^2},\quad \partial x = \frac{2\partial z}{1+z^2},$$

und folglich

$$\frac{\partial x}{a+b\cos x} = \frac{2\partial z}{a+b+(a-b)z^2}.$$

Aus der Gleichung $\cos x = \frac{1-z^2}{1+z^2}$ ergiebt sich leicht

$$z^2 = \frac{1-\cos x}{1+\cos x} = \frac{2\sin\frac{1}{2}x^2}{2\cos\frac{1}{2}x^2} = \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}x^2,$$

und folglich $z = \pm\operatorname{tang}\frac{1}{2}x$, wo sich nun noch fragt, welches Zeichen man zu nehmen hat. Führt man aber $+\operatorname{tang}\frac{1}{2}x$ für z in den obigen Ausdruck von $\sin x$ ein; so erhält man

$$\sin x = \pm \frac{2 \tan \frac{1}{2}x}{1+\tan \frac{1}{2}x^2} = \pm 2 \sin \tfrac{1}{2}x \cos \tfrac{1}{2}x = \pm \sin x,$$

und sieht also, dass man das obere Zeichen nehmen, d. i. $z = \tan \frac{1}{2}x$ setzen muss.

Wir unterscheiden nun bei der Integration des gegebenen Differentials drei Fälle.

I. $a = b$.

In diesem Falle ergiebt sich aus dem Obigen auf der Stelle

$$\int \frac{\partial x}{a + a \cos x} = \frac{1}{a}\int \partial z = \frac{1}{a} z = \frac{1}{a} \tan \tfrac{1}{2}x.$$

II. $a^2 > b^2$.

Nach dem Obigen ist

$$\int \frac{\partial x}{a + b \cos x} = 2\int \frac{\partial z}{a+b+(a-b)z^2}.$$

Vergleicht man nun das Integral auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens mit dem in §. 35. betrachteten Integrale; so findet man, dass die dortige Grösse $b^2 - 4ac$ im vorliegenden Falle $-4(a+b)(a-b) = -4(a^2-b^2)$, und folglich < 0 ist. Daher ist nach §. 35. III.

$$\int \frac{\partial z}{a+b+(a-b)z^2} = \frac{1}{\sqrt{a^2-b^2}} \operatorname{Arc tang} \frac{(a-b)z}{\sqrt{a^2-b^2}},$$

und folglich

$$\int \frac{\partial x}{a + b \cos x} = \frac{2}{\sqrt{a^2-b^2}} \operatorname{Arc tang} \frac{(a-b)\tan \frac{1}{2}x}{\sqrt{a^2-b^2}}.$$

III. $a^2 < b^2$.

In diesem Falle ist die Grösse $b^2 - 4ac$ in §. 35. offenbar > 0, und folglich nach §. 35. II.

$$\int \frac{\partial z}{a+b+(a-b)z^2} = \frac{1}{4\sqrt{b^2-a^2}}\, l. \left\{\frac{(a-b)z - \sqrt{b^2-a^2}}{(a-b)z + \sqrt{b^2-a^2}}\right\}^2;$$

also

$$\int \frac{\partial x}{a + b \cos x} = \frac{1}{2\sqrt{b^2-a^2}}\, l. \left\{\frac{(a-b)\tan \frac{1}{2}x - \sqrt{b^2-a^2}}{(a-b)\tan \frac{1}{2}x + \sqrt{b^2-a^2}}\right\}^2,$$

oder

$$\int \frac{\partial x}{a + b \cos x} = \frac{1}{2\sqrt{b^2-a^2}}\, l. \left\{\frac{\sqrt{b^2-a^2} + (b-a)\tan \frac{1}{2}x}{\sqrt{b^2-a^2} - (b-a)\tan \frac{1}{2}x}\right\}^2.$$

Multiplicirt man aber Zähler und Nenner des Bruchs in der Klammer mit seinem Zähler, hebt den dadurch erhaltenen Bruch durch $-a$ auf, und multiplicirt dann Zähler und Nenner mit $\cos \frac{1}{2}x^2$;

so ergiebt sich mittelst sehr bekannter goniometrischer Relationen leicht

$$\int \frac{\partial x}{a+b\cos x} = \frac{1}{2\sqrt{b^2-a^2}} l. \left\{ \frac{b+a\cos x + \sin x\sqrt{b^2-a^2}}{a+b\cos x} \right\}^2.$$

§. 77.

Entwickelung des Integrals

$$\int \frac{(f+g\cos x)\partial x}{(a+b\cos x)^n}.$$

Man setze

$$\int \frac{(f+g\cos x)\partial x}{(a+b\cos x)^n} = \frac{A\sin x}{(a+b\cos x)^{n-1}} + \int \frac{(B+C\cos x)\partial x}{(a+b\cos x)^{n-1}},$$

und suche die unbestimmten Coefficienten A, B, C dieser Gleichung gemäss zu bestimmen. Differentiirt man zu dem Ende die obige Gleichung, dividirt auf beiden Seiten durch ∂x, und schafft dann die Nenner weg; so erhält man die Gleichung

$$f+g\cos x = A\cos x(a+b\cos x) + (n-1)Ab\sin x^2 \\ + (B+C\cos x)(a+b\cos x)$$

oder

$$0 = \left.\begin{array}{l} (n-1)Ab + Aa \\ + Ba + Bb \\ - f + Ca \\ - g \end{array}\right\} \cos x + \left.\begin{array}{r} Ab \\ -(n-1)Ab \\ + Cb \end{array}\right\} \cos x^2,$$

eine Gleichung, welche unabhängig von besondern Werthen von x gelten wird, wenn man die unbestimmten Coefficienten A, B, C den drei Gleichungen

$$(n-1)Ab + Ba - f = 0,$$
$$Aa + Bb + Ca - g = 0,$$
$$-(n-2)A + C = 0$$

gemäss bestimmt.

Da sich nun aus diesen Gleichungen

$$A = \frac{ag-bf}{(n-1)(a^2-b^2)}, \quad B = \frac{af-bg}{a^2-b^2}, \quad C = \frac{(n-2)(ag-bf)}{(n-1)(a^2-b^2)}$$

ergiebt; so ist

$$\int \frac{(f+g\cos x)\partial x}{(a+b\cos x)^n} = \frac{(ag-bf)\sin x}{(n-1)(a^2-b^2)(a+b\cos x)^{n-1}}$$
$$+ \frac{1}{(n-1)(a^2-b^2)} \int \frac{\{(n-1)(af-bg)+(n-2)(ag-bf)\cos x\}\partial x}{(a+b\cos x)^{n-1}}.$$

Nehmen wir jetzt zuerst an, dass $a^2 - b^2$ nicht $= 0$ und $n > 1$ ist; so wird sich mittelst dieser Reductionsformel das gesuchte Integral offenbar immer auf das in §. 76. betrachtete Integral zurückführen lassen. Für $n = 1$ ist aber

$$\int \frac{(f + g\cos x)\partial x}{a + b\cos x} = f\int \frac{\partial x}{a + b\cos x} + g\int \frac{\cos x\,\partial x}{a + b\cos x}$$

$$= f\int \frac{\partial x}{a + b\cos x} + \frac{g}{b}\int \frac{(a + b\cos x - a)\partial x}{a + b\cos x}$$

$$= \frac{gx}{b} - \frac{ag - bf}{b}\int \frac{\partial x}{a + b\cos x},$$

wodurch das gesuchte Integral wieder auf das in §. 76. betrachtete Integral zurückgeführt ist.

Endlich ist nun noch der Fall zu betrachten, wenn $b = \pm a$ ist. Es ist aber

$$\int \frac{(f + g\cos x)\partial x}{(a + a\cos x)^n} = \int \frac{\{f - g + g(1 + \cos x)\}\partial x}{a^n(1 + \cos x)^n}$$

$$= \frac{f - g}{a^n}\int \frac{\partial x}{(1 + \cos x)^n} + \frac{g}{a^n}\int \frac{\partial x}{(1 + \cos x)^{n-1}}$$

$$= \frac{f - g}{2^n a^n}\int \frac{\partial x}{\cos \frac{1}{2}x^{2n}} + \frac{g}{2^{n-1}a^n}\int \frac{\partial x}{\cos \frac{1}{2}x^{2n-2}}$$

$$= \frac{f - g}{2^{n-1}a^n}\int \frac{\partial . \frac{1}{2}x}{\cos \frac{1}{2}x^{2n}} + \frac{g}{2^{n-2}a^n}\int \frac{\partial . \frac{1}{2}x}{\cos \frac{1}{2}x^{2n-2}},$$

wodurch das gesuchte Integral auf das in §. 68. betrachtete Integral zurückgeführt ist. Auf ganz ähnliche Art lässt sich der Fall, wenn $b = -a$ ist, auf §. 67. zurückführen.

Beiläufig bemerken wir hierbei noch, dass, wenn wir $a + b\cos x = u$, $-b\sin x\,\partial x = \partial u$ setzen,

$$\int \frac{\sin x\,\partial x}{a + b\cos x} = -\int \frac{\partial u}{bu} = -\frac{1}{2b}l.u^2 = -\frac{1}{2b}l.(a + b\cos x)^2$$

ist; ein Integral, welches auch zuweilen gebraucht wird.

§. 78.

Integration der Differentiale, welche Kreisbogen enthalten.

Durch X soll im Folgenden immer eine Function von x bezeichnet werden.

I. Nach §. 27. ist

$$\int X \operatorname{Arc\,sin} x\,\partial x = \operatorname{Arc\,sin} x \int X\partial x - \int \partial \operatorname{Arc\,sin} x \int X\partial x.$$

Nach D. §. 68. ist aber

$$\partial \operatorname{Arc\,sin} x = \pm \frac{\partial x}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

unter der Bedingung, dass man das obere oder untere Zeichen nimmt, jenachdem $\cos Arc \sin x$ positiv oder negativ ist, d. i. jenachdem sich der Bogen $Arc \sin x$ im ersten oder vierten, oder im zweiten oder dritten Quadranten endigt. Also ist

$$\int X \, Arc \sin x \, \partial x = Arc \sin x \int X \partial x \mp \int \frac{\partial x \int X \partial x}{\sqrt{1-x^2}},$$

indem das Vorzeichen immer der obigen Bedingung gemäss genommen wird, welches auch im Folgenden stets festzuhalten ist.

Die folgenden Beispiele werden den Gebrauch der vorstehenden allgemeinen Formel erläutern.

1. $\int x^n \, Arc \sin x \, \partial x = \frac{x^{n+1}}{n+1} Arc \sin x \mp \frac{1}{n+1} \int \frac{x^{n+1} \partial x}{\sqrt{1-x^2}};$

also z. B. für $n = 0$

$$\int Arc \sin x \, \partial x = x \, Arc \sin x \mp \int \frac{x \, \partial x}{\sqrt{1-x^2}},$$

oder, wie man leicht findet, wenn man $1 - x^2 = z^2$ setzt,

$$\int Arc \sin x \, \partial x = x \, Arc \sin x \pm \sqrt{1-x^2}.$$

2. $\int \frac{\partial x}{\sqrt{1-x^2}} Arc \sin x = Arc \sin x \int \frac{\partial x}{\sqrt{1-x^2}} \mp \int \frac{\partial x}{\sqrt{1-x^2}} \int \frac{\partial x}{\sqrt{1-x^2}}.$

Aber nach D. §. 68. ist

$$\partial \, Arc \sin x = \pm \frac{\partial x}{\sqrt{1-x^2}}, \quad \int \frac{\partial x}{\sqrt{1-x^2}} = \pm \, Arc \sin x.$$

Also

$$\int \frac{\partial x}{\sqrt{1-x^2}} Arc \sin x = \pm (Arc \sin x)^2 - \int \frac{\partial x}{\sqrt{1-x^2}} Arc \sin x,$$

und folglich

$$\int \frac{\partial x}{\sqrt{1-x^2}} Arc \sin x = \pm \tfrac{1}{2} (Arc \sin x)^2.$$

3. $\int \frac{x^n \partial x}{\sqrt{1-x^2}} Arc \sin x = Arc \sin x \int \frac{x^n \partial x}{\sqrt{1-x^2}} \mp \int \frac{\partial x}{\sqrt{1-x^2}} \int \frac{x^n \partial x}{\sqrt{1-x^2}}.$

Nach §. 28. IV. ist aber

$$\int \frac{x^n \partial x}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{x^{n-1}\sqrt{1-x^2}}{n} + \frac{n-1}{n} \int \frac{x^{n-2} \partial x}{\sqrt{1-x^2}},$$

und folglich

$$\int \frac{\partial x}{\sqrt{1-x^2}} \int \frac{x^n \partial x}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{1}{n^2} x^n + \frac{n-1}{n} \int \frac{\partial x}{\sqrt{1-x^2}} \int \frac{x^{n-2} \partial x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Mit Hülfe dieser Formeln wird man das gesuchte Integral immer zu entwickeln im Stande seyn.

Für $n = 4$ ist z. B.

$$\int\frac{x^4\,\partial x}{\sqrt{1-x^2}}\,Arc\sin x = Arc\sin x\int\frac{x^4\,\partial x}{\sqrt{1-x^2}} \mp \int\frac{\partial x}{\sqrt{1-x^2}}\int\frac{x^4\,\partial x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Aber

$$\int\frac{x^4\,\partial x}{\sqrt{1-x^2}} = -\tfrac{1}{4}x^3\sqrt{1-x^2} + \tfrac{3}{4}\int\frac{x^2\,\partial x}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$= -(\tfrac{1}{4}x^3 + \tfrac{3}{8}x)\sqrt{1-x^2} + \tfrac{3}{8}\int\frac{\partial x}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$= -(\tfrac{1}{4}x^3 + \tfrac{3}{8}x)\sqrt{1-x^2} \pm \tfrac{3}{8}\,Arc\sin x\,;$$

$$\int\frac{\partial x}{\sqrt{1-x^2}}\int\frac{x^4\,\partial x}{\sqrt{1-x^2}} = -\tfrac{1}{16}x^4 + \tfrac{3}{4}\int\frac{\partial x}{\sqrt{1-x^2}}\int\frac{x^2\,\partial x}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$= -\tfrac{1}{16}x^4 - \tfrac{3}{16}x^2 + \tfrac{3}{8}\int\frac{\partial x}{\sqrt{1-x^2}}\int\frac{\partial x}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$= -\tfrac{1}{16}x^4 - \tfrac{3}{16}x^2 \pm \tfrac{3}{8}\int\frac{\partial x}{\sqrt{1-x^2}}\,Arc\sin x$$

$$= -\tfrac{1}{16}x^4 - \tfrac{3}{16}x^2 + \tfrac{3}{16}(Arc\sin x)^2.$$

Also ist

$$\int\frac{x^4\,\partial x}{\sqrt{1-x^2}}\,Arc\sin x$$

$$= \{-(\tfrac{1}{4}x^3 + \tfrac{3}{8}x)\sqrt{1-x^2} \pm \tfrac{3}{16}Arc\sin x\}\,Arc\sin x \pm \tfrac{1}{16}x^4 \pm \tfrac{3}{16}x^2.$$

Für $n = 5$ ist

$$\int\frac{x^5\,\partial x}{\sqrt{1-x^2}}\,Arc\sin x = Arc\sin x\int\frac{x^5\,\partial x}{\sqrt{1-x^2}} \mp \int\frac{\partial x}{\sqrt{1-x^2}}\int\frac{x^5\,\partial x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Aber

$$\int\frac{x^5\,\partial x}{\sqrt{1-x^2}} = -\tfrac{1}{5}x^4\sqrt{1-x^2} + \tfrac{4}{5}\int\frac{x^3\,\partial x}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$= -(\tfrac{1}{5}x^4 + \tfrac{4}{15}x^2)\sqrt{1-x^2} + \tfrac{8}{15}\int\frac{x\,\partial x}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$= -(\tfrac{1}{5}x^4 + \tfrac{4}{15}x^2 + \tfrac{8}{15})\sqrt{1-x^2}\,;$$

$$\int\frac{\partial x}{\sqrt{1-x^2}}\int\frac{x^5\,\partial x}{\sqrt{1-x^2}} = -\tfrac{1}{25}x^5 + \tfrac{4}{5}\int\frac{\partial x}{\sqrt{1-x^2}}\int\frac{x^3\,\partial x}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$= -(\tfrac{1}{25}x^5 + \tfrac{4}{45}x^3) + \tfrac{8}{15}\int\frac{\partial x}{\sqrt{1-x^2}}\int\frac{x\,\partial x}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$= -(\tfrac{1}{25}x^5 + \tfrac{4}{45}x^3 + \tfrac{8}{15}x).$$

Folglich

$$\int \frac{x^3 \partial x}{\sqrt{1-x^2}} Arc \sin x$$

$$= -(\tfrac{1}{5}x^4 + \tfrac{4}{15}x^2 + \tfrac{8}{15})\sqrt{1-x^2}\,.\,Arc \sin x \pm \tfrac{1}{25}x^5 \pm \tfrac{4}{45}x^3 \pm \tfrac{8}{15}x.$$

4. $$\int \frac{\partial x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}} Arc \sin x = Arc \sin x \int \frac{\partial x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}$$
$$\mp \int \frac{\partial x}{\sqrt{1-x^2}} \int \frac{\partial x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Also nach §. 55.

$$\int \frac{\partial x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}} Arc \sin x = \frac{x\,Arc \sin x}{\sqrt{1-x^2}} \mp \int \frac{x \partial x}{1-x^2},$$

d. i., wenn wir das Integral auf der rechten Seite durch die Substitution $1 - x^2 = z$ entwickeln,

$$\int \frac{\partial x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}} Arc \sin x = \frac{x\,Arc \sin x}{\sqrt{1-x^2}} \pm \tfrac{1}{4} l.(1-x^2)^2,$$

oder, weil hier $1 - x^2$ offenbar positiv ist,

$$\int \frac{\partial x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}} Arc \sin x = \frac{x\,Arc \sin x}{\sqrt{1-x^2}} \pm \tfrac{1}{2} l(1-x^2).$$

5. $$\int \frac{x \partial x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}} Arc \sin x = Arc \sin x \int \frac{x \partial x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}$$
$$\mp \int \frac{\partial x}{\sqrt{1-x^2}} \int \frac{x \partial x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}.$$
$$= \frac{Arc \sin x}{\sqrt{1-x^2}} \mp \int \frac{\partial x}{1-x^2} \text{ (§. 57.)}$$
$$= \frac{Arc \sin x}{\sqrt{1-x^2}} \mp \tfrac{1}{4} l \cdot \left(\frac{1+x}{1-x}\right)^2 \text{ (§. 35. II.)}$$
$$= \frac{Arc \sin x}{\sqrt{1-x^2}} \pm \tfrac{1}{2} l \frac{1-x}{1+x}.$$

II. Nach §. 27. ist ferner

$$\int X\,Arc \cos x\,\partial x = Arc \cos x \int X \partial x - \int \partial Arc \cos x \int X \partial x,$$

und folglich nach D. §. 69.

$$\int X\,Arc \cos x\,\partial x = Arc \cos x \int X \partial x \pm \int \frac{\partial x \int X \partial x}{\sqrt{1-x^2}},$$

wo man das obere oder untere Zeichen zu nehmen hat, jenachdem $\sin Arc \cos x$ positiv oder negativ ist, d. h. jenachdem der Bogen $Arc \cos x$ sich im ersten oder zweiten, oder im dritten oder vierten Quadranten endigt.

So ist z. B.

$$\int\frac{\partial x}{\sqrt{1-x^2}}\,Arc\cos x = Arc\cos x\int\frac{\partial x}{\sqrt{1-x^2}} \pm \int\frac{\partial x}{\sqrt{1-x^2}}\int\frac{\partial x}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$= \mp\,(Arc\cos x)^2 - \int\frac{\partial x}{\sqrt{1-x^2}}\,Arc\cos x\,,$$

$$\int\frac{\partial x}{\sqrt{1-x^2}}\,Arc\cos x = \mp\,\tfrac{1}{2}(Arc\cos x)^2\,.$$

III. Ferner ist nach §. 27. und D. §. 70.

$$\int X\,Arc\tang x\,\partial x = Arc\tang x\int X\partial x - \int\frac{\partial x\int X\partial x}{1+x^2}\,.$$

Also ist z. B.

$$\int x^n\,Arc\tang x\,\partial x = \frac{x^{n+1}}{n+1}\,Arc\tang x - \frac{1}{n+1}\int\frac{x^{n+1}\partial x}{1+x^2}\,.$$

Ferner ist

$$\int\frac{\partial x}{1+x^2}\,Arc\tang x = Arc\tang x\int\frac{\partial x}{1+x^2} - \int\frac{\partial x}{1+x^2}\int\frac{\partial x}{1+x^2}$$

$$= (Arc\tang x)^2 - \int\frac{\partial x}{1+x^2}\,Arc\tang x,$$

und folglich

$$\int\frac{\partial x}{1+x^2}\,Arc\tang x = \tfrac{1}{2}(Arc\tang x)^2\,.$$

Eben so ist

$$\int\frac{x^2\partial x}{1+x^2}\,Arc\tang x = Arc\tang x\int\frac{x^2\partial x}{1+x^2} - \int\frac{\partial x}{1+x^2}\int\frac{x^2\partial x}{1+x^2}.$$

Aber

$$\int\frac{x^2\partial x}{1+x^2} = \int\frac{(1+x^2-1)\partial x}{1+x^2} = \int\partial x - \int\frac{\partial x}{1+x^2} = x - Arc\tang x.$$

Also

$$\int\frac{x^2\partial x}{1+x^2}\,Arc\tang x = (x - Arc\tang x)\,Arc\tang x - \int\frac{x\,\partial x}{1+x^2}$$

$$+ \int\frac{\partial x}{1+x^2}\,Arc\tang x,$$

und folglich nach §. 35. III. und dem Vorhergehenden

$$\int\frac{x^2\partial x}{1+x^2}\,Arc\tang x = (x - \tfrac{1}{2}Arc\tang x)\,Arc\tang x - \tfrac{1}{2}\,l\,(1+x^2).$$

Auf ähnliche Art wie bei den vorigen Beispielen ist

$$\int \frac{\partial x}{(1+x^2)^2} Arc\,tang\,x = Arc\,tang\,x \int \frac{\partial x}{(1+x^2)^2} - \int \frac{\partial x}{1+x^2} \int \frac{\partial x}{(1+x^2)^2}.$$

Nach §. 37. ist aber

$$\int \frac{\partial x}{(1+x^2)^2} = \frac{x}{2(1+x^2)} + \tfrac{1}{2} \int \frac{\partial x}{1+x^2} = \frac{x}{2(1+x^2)} + \tfrac{1}{2} Arc\,tang\,x$$

Also ist

$$\int \frac{\partial x}{(1+x^2)^2} Arc\,tang\,x = \left\{ \frac{x}{2(1+x^2)} + \tfrac{1}{2} Arc\,tang\,x \right\} Arc\,tang\,x - \tfrac{1}{2} \int \frac{x\partial x}{(1+x^2)^2} - \tfrac{1}{2} \int \frac{\partial x}{1+x^2} Arc\,tang\,x$$

$$= \left\{ \frac{x}{2(1+x^2)} + \tfrac{1}{4} Arc\,tang\,x \right\} Arc\,tang\,x - \tfrac{1}{2} \int \frac{x\partial x}{(1+x^2)^2}$$

$$= \left\{ \frac{x}{2(1+x^2)} + \tfrac{1}{4} Arc\,tang\,x \right\} Arc\,tang\,x + \frac{1}{4(1+x^2)},$$

nach §. 38., oder, wenn man das Integral auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens durch die Substitution $1 + x^2 = z$ entwickelt.

IV. Nach §. 27. und D. §. 71. ist auch

$$\int X\,Arc\,cot\,x\,\partial x = Arc\,cot\,x \int X\partial x + \int \frac{\partial x \int X\partial x}{1+x^2}.$$

Also z. B.

$$\int \frac{\partial x}{1+x^2} Arc\,cot\,x = Arc\,cot\,x \int \frac{\partial x}{1+x^2} + \int \frac{\partial x}{1+x^2} \int \frac{\partial x}{1+x^2}$$

$$= -(Arc\,cot\,x)^2 - \int \frac{\partial x}{1+x^2} Arc\,cot\,x,$$

und folglich

$$\int \frac{\partial x}{1+x^2} Arc\,cot\,x = -\tfrac{1}{2}(Arc\,cot\,x)^2.$$

Es wird nun schon von selbst erhellen, wie man sich bei der Entwickelung der Integrale von $X Arc\,sec\,x\partial x$, $X Arc\,cosec\,x\partial x$, $X Arc\,sinv\,x\,\partial x$ und $X Arc\,cosv\,x\,\partial x$ zu verhalten hat.

Siebentes Kapitel.

Integration der Differentiale, welche Logarithmen und Exponentialgrössen enthalten.

§. 79.

Allgemeine Reductionsformel für Differentiale, die Logarithmen enthalten.

Wir nehmen an, dass X und Z Functionen von x sind; auch soll Z, damit lZ reell sey, immer als positiv angenommen werden. Unter diesen Voraussetzungen ergiebt sich aus §. 27. und einer bekannten Formel der Differentialrechnung auf der Stelle die Gleichung

$$\int X l Z \partial x = l Z \int X \partial x - \int \frac{\partial Z \int X \partial x}{Z},$$

welche bei der Integration der Differentiale, die Logarithmen enthalten, fast immer in Anwendung gebracht werden muss.

Für das Differential $\frac{\partial x}{x\sqrt{x}} l \frac{1}{1-x}$, wo x positiv und kleiner als die Einheit seyn soll, giebt die obige allgemeine Gleichung z. B.

$$\int \frac{\partial x}{x\sqrt{x}} l \frac{1}{1-x} = l \frac{1}{1-x} \int \frac{\partial x}{x\sqrt{x}} - \int \frac{\partial x}{1-x} \int \frac{\partial x}{x\sqrt{x}},$$

oder, weil $\int \frac{\partial x}{x\sqrt{x}} = \int x^{-\frac{3}{2}} \partial x = -\frac{2}{\sqrt{x}}$ ist,

$$\int \frac{\partial x}{x\sqrt{x}} l \frac{1}{1-x} = -\frac{2}{\sqrt{x}} l \frac{1}{1-x} + 2 \int \frac{\partial x}{(1-x)\sqrt{x}}.$$

Für $x = y^2$ ergiebt sich aber

$$\int \frac{\partial x}{(1-x)\sqrt{x}} = 2 \int \frac{\partial y}{1-y^2} = \tfrac{1}{2} l . \left(\frac{1+y}{1-y}\right)^2 \text{ (§. 35. II.)},$$

oder auch, weil unter den gemachten Voraussetzungen $\frac{1+y}{1-y}$ offenbar positiv ist,

$$\int \frac{\partial x}{(1-x)\sqrt{x}} = l \frac{1+y}{1-y} = l \frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}},$$

und folglich

$$\int \frac{\partial x}{x\sqrt{x}} l \frac{1}{1-x} = -\frac{2}{\sqrt{x}} l \frac{1}{1-x} + 2 l \frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}.$$

§. 80.

Entwickelung des Integrals $\int X(lx)^n \partial x$.

Angenommen wird, dass x positiv sey. Aus §. 27. und bekannten Formeln der Differentialrechnung ergiebt sich

$$\int X(lx)^n \partial x = (lx)^n \int X \partial x - n \int \frac{\partial x}{x} (lx)^{n-1} \int X \partial x .$$

Setzen wir nun der Kürze wegen

$$\int X \partial x = X_1, \quad \int \frac{X_1 \partial x}{x} = X_2, \quad \int \frac{X_2 \partial x}{x} = X_3, \ldots$$

$$\int \frac{X_{k-1} \partial x}{x} = X_k ;$$

so ergeben sich aus der obigen Gleichung folgende Gleichungen:

$$\int X(lx)^n \partial x = X_1 (lx)^n - n \int \frac{X_1}{x} (lx)^{n-1} \partial x ,$$

$$\int \frac{X_1}{x} (lx)^{n-1} \partial x = X_2 (lx)^{n-1} - (n-1) \int \frac{X_2}{x} (lx)^{n-2} \partial x ,$$

$$\int \frac{X_2}{x} (lx)^{n-2} \partial x = X_3 (lx)^{n-2} - (n-2) \int \frac{X_3}{x} (lx)^{n-3} \partial x ,$$

u. s. w.

$$\int \frac{X_{k-1}}{x} (lx)^{n-k+1} \partial x = X_k (lx)^{n-k+1} - (n-k+1) \int \frac{X_k}{x} (lx)^{n-k} \partial x .$$

Mittelst dieser Gleichungen erhält man nach gehöriger Substitution:

$$\int X (lx)^n \partial x = X_1 (lx)^n - n X_2 (lx)^{n-1} + n(n-1) X_3 (lx)^{n-2} - \ldots$$
$$\ldots + (-1)^{k-1} . n(n-1) \ldots (n-k+2) X_k (lx)^{n-k+1}$$
$$+ (-1)^k . n(n-1) \ldots (n-k+1) \int \frac{X_k}{x} (lx)^{n-k} \partial x .$$

Setzen wir nun, unter der Voraussetzung, dass n eine positive ganze Zahl ist, $k = n+1$; so erhalten wir

$$\int X(lx)^n \partial x = X_1 (lx)^n - n X_2 (lx)^{n-1} + n(n-1) X_3 (lx)^{n-2} - \ldots$$
$$\ldots + (-1)^n . n(n-1) \ldots 1 X_{n+1} .$$

Für $X = x^m$ ist z. B.

$$X_1 = \frac{x^{m+1}}{m+1}, \quad X_2 = \frac{x^{m+1}}{(m+1)^2}, \quad X_3 = \frac{x^{m+1}}{(m+1)^3}, \ldots$$

$$X_{n+1} = \frac{x^{m+1}}{(m+1)^{n+1}} ;$$

und folglich

$$\int x^m (lx)^n \partial x = \left\{ \begin{array}{l} \frac{(lx)^n}{m+1} - \frac{n(lx)^{n-1}}{(m+1)^2} + \frac{n(n-1)(lx)^{n-2}}{(m+1)^3} - \ldots \\ \ldots + (-1)^n . \frac{n(n-1) \ldots 2.1}{(m+1)^{n+1}} \end{array} \right\} x^{m+1} .$$

Der Fall, wenn $n = -1$ ist, muss besonders betrachtet werden.

In diesem Falle ist aber

$$X_1 = \int \frac{\partial x}{x} = lx,$$

$$X_2 = \int lx \frac{\partial x}{x} = lx \int \frac{\partial x}{x} - \int \frac{\partial x}{x} \int \frac{\partial x}{x} = (lx)^2 - \int lx \frac{\partial x}{x}$$

$$= (lx)^2 - X_2 = \tfrac{1}{2}(lx)^2,$$

$$X_3 = \tfrac{1}{2} \int (lx)^2 \frac{\partial x}{x} = \tfrac{1}{2}(lx)^2 \int \frac{\partial x}{x} - \int lx \frac{\partial x}{x} \int \frac{\partial x}{x}$$

$$= \tfrac{1}{2}(lx)^3 - \int (lx)^2 \frac{\partial x}{x} = \tfrac{1}{2}(lx)^3 - 2X_3 = \frac{1}{2.3}(lx)^3,$$

$$X_4 = \frac{1}{2.3} \int (lx)^3 \frac{\partial x}{x} = \frac{1}{2.3}(lx)^3 \int \frac{\partial x}{x} - \tfrac{1}{2} \int (lx)^2 \frac{\partial x}{x} \int \frac{\partial x}{x}$$

$$= \frac{1}{2.3}(lx)^4 - \tfrac{1}{2} \int (lx)^3 \frac{\partial x}{x} = \frac{1}{2.3}(lx)^4 - 3X_4 = \frac{1}{2.3.4}(lx)^4,$$

u. s. w.

Wie man auf diese Art weiter gehen kann, liegt deutlich vor Augen. Es ist also, nach dem Obigen

$$\int (lx)^n \frac{\partial x}{x} = \left\{ \begin{array}{l} 1 - \frac{n}{2} + \frac{n(n-1)}{2.3} - \frac{n(n-1)(n-2)}{2.3.4} + \ldots. \\ \ldots\ldots + (-1)^n . \frac{n(n-1)\ldots 1}{2.3.4..(n+1)} \end{array} \right\} (lx)^{n+1},$$

und folglich, wenn wir die eingeklammerte Reihe der Kürze wegen $= N$ setzen,

$$\int_a^x (lx)^n \frac{\partial x}{x} = N\left\{(lx)^{n+1} - (la)^{n+1}\right\}.$$

Man kann aber auf eine sehr einfache Weise noch einen andern Ausdruck für dieses Integral finden. Es ist nämlich

$$\int (lx)^n \frac{\partial x}{x} = \int (lx)^n \partial\, lx = \frac{1}{n+1}(lx)^{n+1},$$

und folglich

$$\int_a^x (lx)^n \frac{\partial x}{x} = \frac{1}{n+1}\{(lx)^{n+1} - (la)^{n+1}\}.$$

Durch Vergleichung der beiden hier gefundenen Ausdrücke dieses Integrals ergiebt sich die bemerkenswerthe Summation

$$\frac{1}{n+1} = 1 - \frac{n}{2} + \frac{n(n-1)}{2.3} - \frac{n(n-1)(n-2)}{2.3.4} + \ldots$$

$$+ (-1)^n . \frac{n(n-1)\ldots 1}{2.3.\ldots(n+1)}$$

$$= 1 - \tfrac{1}{2}.\frac{n}{1} + \tfrac{1}{3}.\frac{n(n-1)}{1.2} - \tfrac{1}{4}.\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} + \ldots$$
$$+ (-n)^n.\frac{1}{n+1}.\frac{n(n-1)\ldots 1}{1.2\ldots n}$$
$$= 1 - \tfrac{1}{2}n_1 + \tfrac{1}{3}n_2 - \tfrac{1}{4}n_3 + \ldots + (-1)^n.\frac{1}{n+1}n_n.$$

§. 81.

Entwickelung des Integrals

$$\int\frac{X\partial x}{(lx)^n}.$$

Nach §. 27. ist

$$\int\frac{X\partial x}{(lx)^n} = \int Xx\frac{\partial x}{x(lx)^n} = Xx\int\frac{\partial x}{x(lx)^n} - \int\partial.Xx\int\frac{\partial x}{x(lx)^n},$$

wobei wir wieder x als positiv annehmen. Da nun aber

$$\int\frac{\partial x}{x(lx)^n} = \int(lx)^{-n}\partial lx = -\frac{1}{(n-1)(lx)^{n-1}}$$

ist; so ist

$$\int\frac{X\partial x}{(lx)^n} = -\frac{Xx}{(n-1)(lx)^{n-1}} + \frac{1}{n-1}\int\frac{\partial.Xx}{(lx)^{n-1}}.$$

Für

$$\partial.Xx = X_1\partial x,\ \partial.X_1x = X_2\partial x,\ \partial.X_2x = X_3\partial x,\ \ldots$$
$$\partial.X_{k-1}x = X_k\partial x$$

erhalten wir also

$$\int\frac{X\partial x}{(lx)^n} = -\frac{Xx}{(n-1)(lx)^{n-1}} + \frac{1}{n-1}\int\frac{X_1\partial x}{(lx)^{n-1}},$$
$$\int\frac{X_1\partial x}{(lx)^{n-1}} = -\frac{X_1x}{(n-2)(lx)^{n-2}} + \frac{1}{n-2}\int\frac{X_2\partial x}{(lx)^{n-2}},$$
$$\int\frac{X_2\partial x}{(lx)^{n-2}} = -\frac{X_2x}{(n-3)(lx)^{n-3}} + \frac{1}{n-3}\int\frac{X_3\partial x}{(lx)^{n-3}},$$

u. s. w.

$$\int\frac{X_{k-1}\partial x}{(lx)^{n-k+1}} = -\frac{X_{k-1}x}{(n-k)(lx)^{n-k}} + \frac{1}{n-k}\int\frac{X_k\partial x}{(lx)^{n-k}},$$

und folglich nach gehöriger Substitution

$$\int\frac{X\partial x}{(lx)^n}$$
$$= -\frac{Xx}{(n-1)(lx)^{n-1}} - \frac{X_1x}{(n-1)(n-2)(lx)^{n-2}} - \frac{X_2x}{(n-1)(n-2)(n-3)(lx)^{n-3}} - \ldots$$
$$\ldots - \frac{X_{k-1}x}{(n-1)(n-2)\ldots(n-k)(lx)^{n-k}} + \frac{1}{(n-1)(n-2)\ldots(n-k)}\int\frac{X_k\partial x}{(lx)^{n-k}};$$

also, wenn wir, vorausgesetzt, dass n eine positive ganze Zahl ist, $k = n - 1$ setzen:

$$\int\frac{X\partial x}{(lx)^n}$$

$$= -\frac{Xx}{(n-1)(lx)^{n-1}} - \frac{X_1 x}{(n-1)(n-2)(lx)^{n-2}} - \frac{X_2 x}{(n-1)(n-2)(n-3)(lx)^{n-3}} - \ldots$$

$$\ldots\ldots - \frac{X_{n-2}x}{(n-1)(n-2)\ldots 1\, lx} + \frac{1}{(n-1)(n-2)\ldots 1}\int\frac{X_{n-1}\partial x}{lx}.$$

Für $X = x^m$ ist z. B.

$$\int\frac{x^m\partial x}{(lx)^n}$$

$$= -\frac{x^{m+1}}{(n-1)(lx)^{n-1}} - \frac{(m+1)x^{m+1}}{(n-1)(n-2)(lx)^{n-2}} - \frac{(m+1)^2 x^{m+1}}{(n-1)(n-2)(n-3)(lx)^{n-3}} - \ldots$$

$$\ldots\ldots - \frac{(m+1)^{n-2}x^{m+1}}{(n-1)(n-2)\ldots 1\, lx} + \frac{(m+1)^{n-1}}{(n-1)(n-2)\ldots 1}\int\frac{x^m\partial x}{lx},$$

so dass sich also das gesuchte Integral immer auf $\int\frac{x^m\partial x}{lx}$ zurückführen lässt.

Für $m = -1$ erhält man aus der gefundenen Formel

$$\int\frac{\partial x}{x(lx)^n} = -\frac{1}{(n-1)(lx)^{n-1}},$$

wo aber der Fall, wenn $n = 1$ ist, noch besonders betrachtet werden muss. Setzt man zu dem Ende $lx = u$; so ist $\frac{\partial x}{x} = \partial u$, und folglich

$$\int\frac{\partial x}{x\,lx} = \int\frac{\partial u}{u} = \tfrac{1}{2}l.u^2 = \tfrac{1}{2}l.(lx)^2.$$

Setzt man $x^{m+1} = z$; so ist

$$(m+1)x^m\partial x = \partial z, \quad (m+1)\,lx = lz,$$

und folglich

$$\int\frac{x^m\partial x}{lx} = \int\frac{(m+1)x^m\partial x}{(m+1)\,lx} = \int\frac{\partial z}{lz}.$$

Auf dieses Integral kann also nach dem Vorhergehenden das Integral von $\frac{x^m\partial x}{(lx)^n}$ im Allgemeinen immer zurückgeführt werden, und wir würden uns also jetzt zunächst mit der nähern Betrachtung des in Rede stehenden Integrals, oder, was dasselbe ist, des Integrals $\int\frac{\partial x}{lx}$ zu beschäftigen haben, werden aber erst weiter unten auf diesen Gegenstand zurückkommen, indem wir jetzt zuvörderst auch Differentiale, welche Exponentialgrössen enthalten, zu integriren lehren wollen.

§. 82.

Allgemeine Formeln für Differentiale, die Exponentialgrössen enthalten.

Es sey X eine Function von x, a eine positive constante Grösse.

Weil nach D. §. 57. $\partial . a^x = a^x la \partial x$ ist; so ist umgekehrt

$$\int a^x \partial x = \frac{a^x}{la}, \quad \int e^x \partial x = e^x.$$

Auch erhellet nun leicht, dass

$$\int a^{ax} \partial x = \frac{a^{ax}}{ala}, \quad \int e^{ax} \partial x = \frac{e^{ax}}{a}$$

ist.

Nach §. 27. ist

$$\int X a^x \partial x = X \int a^x \partial x - \int \partial X \int a^x \partial x,$$

und folglich nach dem Vorhergehenden

$$\int X a^x \partial x = \frac{1}{la} X a^x - \frac{1}{la} \int a^x \partial X.$$

Setzen wir nun

$$\partial X = X_1 \partial x, \quad \partial X_1 = X_2 \partial x, \quad \partial X_2 = X_3 \partial x, \ldots$$
$$\partial X_{k-1} = X_k \partial x;$$

so erhalten wir

$$\int X a^x \partial x = \frac{1}{la} X a^x - \frac{1}{la} \int X_1 a^x \partial x,$$

$$\int X_1 a^x \partial x = \frac{1}{la} X_1 a^x - \frac{1}{la} \int X_2 a^x \partial x,$$

$$\int X_2 a^x \partial x = \frac{1}{la} X_2 a^x - \frac{1}{la} \int X_3 a^x \partial x,$$

u. s. w.

$$\int X_{k-1} a^x \partial x = \frac{1}{a} X_{k-1} a^x - \frac{1}{la} \int X_k a^x \partial x,$$

und folglich nach gehöriger Substitution

$$1. \quad \int X a^x \partial x = \frac{1}{la} X a^x - \frac{1}{(la)^2} X_1 a^x + \frac{1}{(la)^3} X_2 a^x - \ldots$$
$$\ldots + (-1)^{k-1} \cdot \frac{1}{(la)^k} X_{k-1} a^x + (-1)^k \cdot \frac{1}{(la)^k} \int X_k a^x \partial x.$$

Mittelst dieser Formel wird sich, wenn die Differentiation der Function X irgend einmal auf ein constantes Differential führt, das gegebene Differential immer integriren lassen.

Nach §. 27. ist aber auch

$$\int X a^x \partial x = a^x \int X \partial x - \int \partial . a^x \int X \partial x$$
$$= a^x \int X \partial x - la \int a^x \partial x \int X \partial x.$$

Setzen wir nun

$$\int X \partial x = Z, \int Z \partial x = Z_1, \int Z_1 \partial x = Z_2, \ldots \int Z_{k-1} \partial x = Z_k;$$

so erhalten wir

$$\int X a^x \partial x = a^x Z - la \int Z a^x \partial x,$$
$$\int Z a^x \partial x = a^x Z_1 - la \int Z_1 a^x \partial x,$$
$$\int Z_1 a^x \partial x = a^x Z_2 - la \int Z_2 a^x \partial x,$$

u. s. w.

$$\int Z_{k-1} a^x \partial x = a^x Z_k - la \int Z_k a^x \partial x,$$

und folglich nach gehöriger Substitution

2. $$\int X a^x \partial x = a^x Z - la . a^x Z_1 + (la)^2 . a^x Z_2 - \ldots .$$
$$\ldots + (-1)^k (la)^k . a^x Z_k + (-1)^{k+1} (la)^{k+1} \int Z_k a^x \partial x.$$

Mittelst dieser Formel wird man das gegebene Differential nur dann integriren können, wenn sich die Integrale Z, Z_1, Z_2, Z_3, ... sämmtlich entwickeln lassen.

§. 83.

Entwickelung des Integrals $\int a^x x^n \partial x$.

Wir nehmen an, dass n eine positive ganze Zahl sey, und werden also die Formel 1. in §. 82. in Anwendung zu bringen haben.

Setzen wir also $X = x^n$; so ist

$$X_k = n(n-1) \ldots (n-k+1) x^{n-k},$$

und folglich

$$\int a^x x^n \partial x =$$
$$a^x \left\{ \begin{array}{l} \frac{x^n}{la} - \frac{n x^{n-1}}{(la)^2} + \frac{n(n-1) x^{n-2}}{(la)^3} - \frac{n(n-1)(n-2) x^{n-3}}{(la)^4} + \ldots . \\ \quad .. + (-1)^{k-1} . \frac{n(n-1)..(n-k+2) x^{n-k+1}}{(la)^k} \\ \quad + (-1)^k . \frac{n(n-1)..(n-k+1)}{(la)^k} \int a^x x^{n-k} \partial x \end{array} \right\};$$

also für $k = n$:

$$\int a^x x^n \partial x =$$
$$a^x \left\{ \frac{x^n}{la} - \frac{n x^{n-1}}{(la)^2} + \frac{n(n-1) x^{n-2}}{(la)^3} - \ldots + (-1)^n . \frac{n(n-1) \ldots 1}{(la)^{n+1}} \right\}.$$

§. 84.

Entwickelung des Integrals

$$\int\frac{a^x\partial x}{x^n}.$$

Für $X=x^{-n}$ erhält man, um die Formel 2. in §. 82. auf das gesuchte Integral anzuwenden, ohne Schwierigkeit

$$Z_k=\frac{(-1)^{k+1}}{(n-1)(n-2)..(n-k-1)x^{n-k-1}},$$

und folglich

$$\int\frac{a^x\partial x}{x^n}$$

$$=-\frac{a^x}{(n-1)x^{n-1}}-\frac{a^x la}{(n-1)(n-2)x^{n-2}}-\frac{a^x(la)^2}{(n-1)(n-2)(n-3)x^{n-3}}-\ldots$$

$$\ldots-\frac{a^x(la)^k}{(n-1)(n-2)..(n-k-1)x^{n-k-1}}+\frac{(la)^{k+1}}{(n-1)(n-2)..(n-k-1)}\int\frac{a^x\partial x}{x^{n-k-1}};$$

also für $k=n-2$:

$$\int\frac{a^x\partial x}{x^n}$$

$$=-\frac{a^x}{(n-1)x^{n-1}}-\frac{a^x la}{(n-1)(n-2)x^{n-2}}-\frac{a^x(la)^2}{(n-1)(n-2)(n-3)x^{n-3}}-\ldots$$

$$\ldots-\frac{a^x(la)^{n-2}}{(n-1)(n-2)\ldots1x}+\frac{(la)^{n-1}}{(n-1)(n-2)\ldots1}\int\frac{a^x\partial x}{x}.$$

Mittelst dieser Formel kann folglich das gesuchte Integral immer auf $\int\frac{a^x\partial x}{x}$ zurückgeführt werden. Dieses Integral ist aber kein anderes als das Integral, auf welches wir in §. 81. geführt wurden. Setzen wir nämlich $a^x=z$; so ist $a^x la\partial x=\partial z$, $xla=lz$, und folglich

$$\frac{a^x\partial x}{x}=\frac{\partial z}{lz},\ \int\frac{a^x\partial x}{x}=\int\frac{\partial z}{lz}.$$

Daher werden wir uns nun mit dem Integral $\int\frac{\partial x}{lx}$ zu beschäftigen haben.

§. 85.

Ueber das Integral $\int\frac{\partial x}{lx}$.

Unter der Voraussetzung, dass x positiv ist, setze man $x=e^y$; so ist $\partial x=e^y\partial y$, $lx=y$, und folglich $\frac{\partial x}{lx}=\frac{e^y\partial y}{y}$. Nach D. §. 118. ist aber für jedes reelle y

$$\frac{e^y \partial y}{y} = \frac{\partial y}{y} + \frac{\partial y}{1} + \frac{y \partial y}{1.2} + \frac{y^2 \partial y}{1.2.3} + \frac{y^3 \partial y}{1 \ldots 4} + \ldots,$$

und folglich, weil $y = lx$, für $x = a$, also $y = la$ ist, nach §. 8. für jedes positive x und jedes positive a

$$\int_a^x \frac{\partial x}{lx} = \int_{la}^{lx} \frac{e^y \partial y}{y}$$

$$= \tfrac{1}{2} l . \left(\frac{lx}{la}\right)^2 + \frac{lx - la}{1} . \tfrac{1}{1} + \frac{(lx)^2 - (la)^2}{1.2} . \tfrac{1}{2} + \frac{(lx)^3 - (la)^3}{1.2.3} . \tfrac{1}{3}$$

$$+ \frac{(lx)^4 - (la)^4}{1.2.3.4} . \tfrac{1}{4} + \ldots\ldots.$$

Das Integral $\int_0^x \frac{\partial x}{lx}$ nennt man den Integrallogarithmus, und bezeichnet es, wie auch im Folgenden geschehen soll, gewöhnlich durch $li.x$. In dieser Bezeichnung ist nach dem Vorhergehenden

$$li.x = C + \tfrac{1}{2} l.(lx)^2 + \frac{lx}{1} . \tfrac{1}{1} + \frac{(lx)^2}{1.2} . \tfrac{1}{2} + \frac{(lx)^3}{1.2.3} . \tfrac{1}{3} + \ldots,$$

wo aber die Bestimmung der Constante C besondere Schwierigkeit macht, da sich dieselbe mittelst des aus dem Vorhergehenden sich ergebenden Ausdrucks

$$C = -\tfrac{1}{2} l.(lo)^2 - \frac{lo}{1} . \tfrac{1}{1} - \frac{(lo)^2}{1.2} . \tfrac{1}{2} - \frac{(lo)^3}{1.2.3} . \tfrac{1}{3} - \ldots$$

offenbar nicht bestimmen lässt. Unter den verschiedenen Methoden, welche zu dieser Bestimmung in Vorschlag gebracht worden sind, scheint uns die folgende eine der einfachsten und für unsern gegenwärtigen Zweck passendsten zu seyn.

Aus dem Obigen ergiebt sich, wenn wir e^{-x} für x setzen,

$$li.e^{-x} = C + \tfrac{1}{2} l.x^2 - \tfrac{1}{1} . \frac{x}{1} + \tfrac{1}{2} . \frac{x^2}{1.2} - \tfrac{1}{3} . \frac{x^3}{1.2.3} + \ldots$$

wo x positiv und negativ seyn kann. Nach D. §. 118. ist aber

$$e^{-x} = 1 - \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^4}{1 \ldots 4} - \ldots,$$

und folglich

$$\frac{e^{-x} - 1}{x} \partial x = -\frac{\partial x}{1} + \frac{x \partial x}{1.2} - \frac{x^2 \partial x}{1.2.3} + \frac{x^3 \partial x}{1 \ldots 4} - \ldots;$$

also

$$\int_0^x \frac{e^{-x} - 1}{x} \partial x = -\tfrac{1}{1} . \frac{x}{1} + \tfrac{1}{2} . \frac{x^2}{1.2} - \tfrac{1}{3} . \frac{x^3}{1.2.3} + \ldots,$$

und daher nach dem Obigen

$$li.e^{-x} = C + \tfrac{1}{2} l.x^2 + \int_0^x \frac{e^{-x} - 1}{x} \partial x.$$

Nach dem allgemeinen Begriffe eines bestimmten Integrals ist aber offenbar $li.0 = li.e^{-\infty} = 0$. Also ist

$$0 = C + l\infty + \int_0^\infty \frac{e^{-x}-1}{x}\partial x;$$

folglich

$$C = -l\infty - \int_0^\infty \frac{e^{-x}-1}{x}\partial x,$$

oder, wenn wir durch

$$lim\left\{ln + \int_0^n \frac{e^{-x}-1}{x}\partial x\right\}$$

die Gränze bezeichnen, welcher die eingeklammerte Grösse sich nähert, wenn n in's Unendliche wächst,

$$C = -lim\left\{ln + \int_0^n \frac{e^{-x}-1}{x}\partial x\right\}.$$

Nach dem Binomischen Lehrsatze ist nun, wenn jetzt n eine positive ganze Zahl bezeichnet,

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

$$= 1 + \frac{1}{1} + \left(1-\frac{1}{n}\right).\frac{1}{1.2} + \left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right).\frac{1}{1.2.3} + \ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots + \left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{n-1}{n}\right).\frac{1}{1\ldots n},$$

und folglich, weil bekanntlich

$$e = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{1.2.3.4} + \ldots\ldots$$

ist, offenbar immer

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < e.$$

Die Grösse

$$S_k = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \ldots + \frac{1}{1\ldots k}$$

lässt sich, wenn man nur k gross genug nimmt, der Grösse e beliebig nahe bringen.

Die Grösse

$$\Sigma_{n,k} = 1 + \frac{1}{1} + \left(1-\frac{1}{n}\right).\frac{1}{1.2} + \left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right).\frac{1}{1.2.3} + \ldots$$

$$\ldots + \left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{k-1}{n}\right).\frac{1}{1\ldots k}$$

lässt sich, wenn man nur n gross genug nimmt, der Grösse S_k beliebig nahe bringen.

Also nähert sich, wenn n und k wachsen, die Grösse $\Sigma_{n,k}$ der Grösse e, und kann derselben beliebig nahe gebracht werden, wenn man nur k und n gross genug nimmt.

Nimmt man aber, was offenbar verstattet ist, $n > k$; so ist augenscheinlich

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n > \Sigma_{n,k},$$

und folglich

$$\Sigma_{n,k} < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < e,$$

d. i. $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ zwischen $\Sigma_{n,k}$ und e enthalten.

Daher nähert sich offenbar auch $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, wenn n wächst, der Grösse e, und kann derselben, wenn man nur n gross genug nimmt, beliebig nahe gebracht werden, oder es ist

$$lim\left\{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right\} = e.$$

Setzen wir nun, unter der Voraussetzung, dass n grösser als die Einheit ist,

$$1 - \frac{1}{n} = \frac{1}{1+m},$$

wo also m positiv ist; so ist $n = \frac{1+m}{m}$, und folglich

$$\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = \left(\frac{1}{1+m}\right)^{\frac{1+m}{m}} = \left\{\frac{1}{(1+m)^{\frac{1}{m}}}\right\}^{1+m}.$$

Wenn n sich dem Unendlichen nähert, nähert m sich der Null, und es ist also nach dem Vorhergehenden offenbar

$$lim\left\{\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n\right\} = \frac{1}{e} = e^{-1}.$$

Folglich ist, immer unter der Voraussetzung, dass n sich dem Unendlichen nähert, mit Beziehung der obern und untern Zeichen auf einander,

$$lim\left\{\left(1 \pm \frac{1}{n}\right)^n\right\} = e^{\pm 1}.$$

Also ist offenbar auch

$$lim\left\{\left(1 \pm \frac{x}{n}\right)^{\frac{n}{x}}\right\} = e^{\pm 1}.$$

Aber, wie leicht erhellen wird,

$$lim\left\{\left(1 \pm \frac{x}{n}\right)^{\frac{n}{x}}\right\} = \left\{lim\left(1 \pm \frac{x}{n}\right)^n\right\}^{\frac{1}{x}}$$

Also

$$\left\{lim.\left(1 \pm \frac{x}{n}\right)^n\right\}^{\frac{1}{x}} = e^{\pm 1},$$

und folglich

$$lim\left\{\left(1 \pm \frac{x}{n}\right)^n\right\} = e^{\pm x}.$$

Setzen wir nun $1 - \frac{x}{n} = z$; so ist

$$\frac{\left(1 - \frac{x}{n}\right)^n - 1}{x}\partial x = \frac{1 - z^n}{1 - z}\partial z,$$

und folglich, weil für $x = 0$ und $x = n$ respective $z = 1$ und $z = 0$ ist,

$$\int_0^n \frac{\left(1 - \frac{x}{n}\right)^n - 1}{x}\partial x = \int_1^0 \frac{1 - z^n}{1 - z}\partial z;$$

also nach dem Obigen

$$lim\int_0^n \frac{e^{-x} - 1}{x}\,\partial x = lim\int_1^0 \frac{1 - z^n}{1 - z}\partial z,$$

und daher

$$C = -\,lim\left\{ln + \int_1^0 \frac{1 - z^n}{1 - z}.\partial z\right\}.$$

Nun ist aber

$$\frac{1 - z^n}{1 - z}\partial z = (1 + z + z^2 + z^3 + \ldots + z^{n-1})\partial z;$$

also

$$\int_1^0 \frac{1 - z^n}{1 - z}\partial z = -\left(1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{n}\right),$$

und folglich

$$C = lim\left(1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{n} - ln\right).$$

Es erhellet leicht, dass man n sehr gross annehmen müsste, wenn man mittelst dieser Formel C nur mit erträglicher Genauigkeit finden wollte. Ausführlichere Untersuchungen über diesen Gegenstand würden uns aber an diesem Orte zu weit führen, und wir bemerken daher bloss noch, dass der italienische Mathematiker Mascheroni für C den folgenden Werth gefunden hat:

$$C = 0{,}577215\ 664901\ 532860\ 618112.\ ^{*)}$$

---

*) Man kann über die Berechnung der Constante C auch Folgendes merken. Nach dem Obigen ist, wenn wir

$$f(x) = \tfrac{1}{2}l.x^2 - \tfrac{1}{1}.\frac{x}{1} + \tfrac{1}{2}.\frac{x^2}{1.2} - \tfrac{1}{3}.\frac{x^3}{1.2.3} + \ldots.$$

setzen, $li.e^{-x} = C + f(x)$, und folglich $li.e^{-\infty} = C + f(\infty)$, oder, weil nach dem Obigen $li.e^{-\infty} = 0$ ist, $C = -f(\infty)$. Nun ist aber, wie man leicht findet, wenn man e^{-x} in eine Reihe entwickelt,

$$\int_a^x \frac{\partial x}{xe^x} = f(x) - f(a) = \varphi(x),$$

§. 86.

Entwickelung der Integrale einiger Differentiale, welche Exponential- und Kreisfunctionen enthalten.

I. $\int e^{ax} \sin x^n \partial x$ und $\int e^{ax} \cos x^n \partial x$.

Nach §. 27. und §. 82. ist

$$\int e^{ax} \sin x^n \partial x = \sin x^n \int e^{ax} \partial x - \int \partial . \sin x^n \int e^{ax} \partial x$$

$$= \frac{1}{a} e^{ax} \sin x^n - \frac{n}{a} \int e^{ax} \sin x^{n-1} \cos x \partial x$$

$$= \frac{1}{a} e^{ax} \sin x^n - \frac{n}{a} \sin x^{n-1} \cos x \int e^{ax} \partial x + \frac{n}{a} \int \partial . \sin x^{n-1} \cos x \int e^{ax} \partial x$$

$$= \frac{1}{a} e^{ax} \sin x^n - \frac{n}{a^2} e^{ax} \sin x^{n-1} \cos x + \frac{n(n-1)}{a^2} \int e^{ax} \sin x^{n-2} \cos x^2 \partial x$$
$$- \frac{n}{a^2} \int e^{ax} \sin x^n \partial x$$

$$= \frac{e^{ax} \sin x^{n-1} (a \sin x - n \cos x)}{a^2} + \frac{n(n-1)}{a^2} \int e^{ax} \sin x^{n-2} \partial x$$
$$- \frac{n^2}{a^2} \int e^{ax} \sin x^n \partial x,$$

und folglich
$$\int e^{ax} \sin x^n \partial x$$
$$= \frac{e^{ax} \sin x^{n-1} (a \sin x - n \cos x)}{a^2 + n^2} + \frac{n(n-1)}{a^2 + n^2} \int e^{ax} \sin x^{n-2} \partial x.$$

Auf ganz ähnliche Art ist nach §. 27. und §. 82.

$$\int e^{ax} \cos x^n \partial x = \cos x^n \int e^{ax} \partial x - \int \partial . \cos x^n \int e^{ax} \partial x$$

$$= \frac{1}{a} e^{ax} \cos x^n + \frac{n}{a} \int e^{ax} \cos x^{n-1} \sin x \partial x$$

$$= \frac{1}{a} e^{ax} \cos x^n + \frac{n}{a} \cos x^{n-1} \sin x \int e^{ax} \partial x$$
$$- \frac{n}{a} \int \partial . \cos x^{n-1} \sin x \int e^{ax} \partial x$$

---

und folglich $\varphi'(x) = \frac{1}{xe^x}$. Setzen wir aber $\psi(x) = \frac{1}{a}(e^{-a} - e^{-x})$; so ist $\psi'(x) = \frac{1}{ae^x}$. Nehmen wir also an, dass x und a beide positiv sind, und dass $x > a$ ist; so sind $\varphi'(x)$ und $\psi'(x)$ beide positiv, und $\psi'(x)$ ist grösser als $\varphi'(x)$. Hieraus sieht man, dass, wenn x von a an stetig in's Unendliche wächst, die Functionen $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ von Null an stetig wachsen, dass aber, weil $\varphi'(x) < \psi'(x)$ ist, $\varphi(x)$ langsamer wie $\psi(x)$ wächst. Also ist, weil $\psi(\infty) = \frac{1}{ae^a}$ ist, offenbar

$$\varphi(\infty) < \frac{1}{ae^a}, \quad \text{d. i. } f(\infty) - f(a) < \frac{1}{ae^a}.$$

Berechnet man also den Werth von $f(x)$ mittelst der obigen Reihe für einen hinreichend grossen Werth a von x, und setzt $f(\infty) = f(a) + \varepsilon$; so ist dadurch $f(\infty)$ bis auf einen Fehler ε, der positiv und kleiner als $\frac{1}{ae^a}$ ist, gefunden. Nimmt man z. B. $a = 10$, so ist $\varepsilon < \frac{1}{10 . e^{10}}$, d. i. $\varepsilon < 0,00001$, und man findet also durch diese Rechnung den Werth von $f(\infty)$ bis zur fünften Decimalstelle genau.

$$= \frac{1}{a} e^{ax} \cos x^n + \frac{n}{a^2} e^{ax} \cos x^{n-1} \sin x$$

$$+ \frac{n(n-1)}{a^2} \int e^{ax} \cos x^{n-2} \sin x^2 \partial x - \frac{n}{a^2} \int e^{ax} \cos x^n \partial x$$

$$= \frac{e^{ax} \cos x^{n-1} (a \cos x + n \sin x)}{a^2} + \frac{n(n-1)}{a^2} \int e^{ax} \cos x^{n-2} \partial x$$

$$- \frac{n^2}{a^2} \int e^{ax} \cos x^n \partial x,$$

und folglich $\int e^{ax} \cos x^n \partial x$

$$= \frac{e^{ax} \cos x^{n-1} (a \cos x + n \sin x)}{a^2 + n^2} + \frac{n(n-1)}{a^2 + n^2} \int e^{ax} \cos x^{n-2} \partial x.$$

Mittelst der beiden hier gefundenen Reductionsformeln kann man die gesuchten Integrale, jenachdem n eine gerade oder eine ungerade Zahl ist, auf $\int e^{ax} \partial x = \frac{1}{a} e^{ax}$, oder respective auf $\int e^{ax} \sin x \, \partial x$ und $\int e^{ax} \cos x \, \partial x$ zurückführen. Für $n = 1$ ergiebt sich aber aus den beiden Reductionsformeln selbst

$$\int e^{ax} \sin x \, \partial x = \frac{e^{ax} (a \sin x - \cos x)}{a^2 + 1}, \quad \int e^{ax} \cos x \, \partial x = \frac{e^{ax} (a \cos x + \sin x)}{a^2 + 1},$$

und die beiden gesuchten Integrale werden sich also in allen Fällen finden lassen.

II. $\int e^{ax} (\sin bx)^n \partial x$ und $\int e^{ax} (\cos bx)^n \partial x$.

Für $bx = z$ wird

$$\int e^{ax} (\sin bx)^n \partial x = \frac{1}{b} \int e^{\frac{a}{b} z} \sin z^n \partial z,$$

$$\int e^{ax} (\cos bx)^n \partial x = \frac{1}{b} \int e^{\frac{a}{b} z} \cos z^n \partial z,$$

wodurch die gesuchten Integrale auf die in I. betrachteten Formen zurückgeführt sind, und daher immer gefunden werden können.

In dem Falle $n = 1$ erhält man aus diesen Formeln und aus I. leicht

$$\int e^{ax} \sin bx \, \partial x = \frac{e^{ax} (a \sin bx - b \cos bx)}{a^2 + b^2},$$

$$\int e^{ax} \cos bx \, \partial x = \frac{e^{ax} (a \cos bx + b \sin bx)}{a^2 + b^2}.$$

III. $\int x^n e^{ax} \sin bx \, \partial x$ und $\int x^n e^{ax} \cos bx \, \partial x$.

Nach §. 27. und dem Vorhergehenden ist

$$\int x^n e^{ax} \sin bx \, \partial x$$

$$= x^n \int e^{ax} \sin bx \, \partial x - n \int x^{n-1} \partial x \int e^{ax} \sin bx \, \partial x$$

$$= x^n \int e^{ax} \sin bx \, \partial x - \frac{na}{a^2 + b^2} \int x^{n-1} e^{ax} \sin bx \, \partial x$$

$$+ \frac{nb}{a^2 + b^2} \int x^{n-1} e^{ax} \cos bx \, \partial x,$$

$$\int x^n e^{ax} \cos bx\,\partial x$$
$$= x^n \int e^{ax} \cos bx\,\partial x - n\int x^{n-1}\partial x \int e^{ax} \cos bx\,\partial x$$
$$= x^n \int e^{ax} \cos bx\,\partial x - \frac{na}{a^2+b^2}\int x^{n-1} e^{ax} \cos bx\,\partial x$$
$$- \frac{nb}{a^2+b^2}\int x^{n-1} e^{ax} \sin bx\,\partial x.$$

Mittelst dieser Formeln kann man die gesuchten Integrale immer auf die in II. betrachteten Integrale zurückführen.

Achtes Kapitel.

Anwendung der Integralrechnung auf die Theorie der in einer Ebene liegenden Curven oder der sogenannten Curven von einfacher Krümmung.

A. Quadratur.

§. 87.

Erklärung. Wir denken uns eine auf ein beliebiges recht- oder schiefwinkliges Coordinatensystem bezogene Curve. Der Coordinatenwinkel sey α. a und b sollen zwei beliebige Abscissen, a' und b' die entsprechenden Ordinaten, und a soll kleiner als b seyn. Ist nun, wie wir im Folgenden immer annehmen wollen, die Curve zwischen den Punkten aa' und bb' stetig; so wird von dem Theile $b-a$ der Abscissenaxe, von den beiden Ordinaten a' und b', und von dem zwischen den Punkten aa' und bb' liegenden Bogen der Curve eine gewisse ebene Figur begränzt, die man sich durch Bewegung der Ordinate vom Endpunkte der Abscisse a bis zum Endpunkte der Abscisse b, vorausgesetzt, dass bei dieser Bewegung die Ordinate sich selbst immer parallel bleibt, entstanden denken kann. Diese Figur kann aus mehreren auf der Seite der positiven und negativen Ordinaten, d. i. oberhalb und unterhalb der Abscissenaxe liegenden Theilen bestehen. Den Flächeninhalt eines jeden auf der Seite der positiven Ordinaten liegenden Theils, in welchem also alle Ordinaten positiv sind, wollen wir im Folgenden als positiv, dagegen den Flächenraum eines jeden auf der Seite der negativen Ordinaten liegenden Theils, in welchem also alle Ordinaten negativ sind, als negativ betrachten. Unter dem Flächenraume der von dem Theile $b-a$ der Abscissenaxe, von den beiden Ordinaten a' und b', und von dem zwischen den Punkten aa' und bb' liegenden Bogen der Curve begränzten ebenen Figur werden wir

im Folgenden immer die Summe der Flächenräume aller einzelnen, auf beiden Seiten der Abscissenaxe liegenden Theile dieser Figur, vorausgesetzt, dass man jeden dieser Flächenräume mit dem ihm nach den vorher gegebenen Bestimmungen zukommenden Zeichen nimmt, verstehen. Die Bestimmung des Flächenraumes der von dem Theile $b - a$ der Abscissenaxe, von den beiden Ordinaten a' und b', und von dem zwischen den Punkten aa' und bb' liegenden Bogen der gegeben Curve begränzten ebenen Figur heisst die Quadratur der Curve.

§. 88.

Aufgabe. Es seyen x, y die recht- oder schiefwinkligen Coordinaten eines beliebigen Punktes einer gegebenen Curve; der Coordinatenwinkel sey α. Man soll den Flächenraum v des von der Abscisse x, der dem Anfange der Coordinaten entsprechenden Ordinate, der Ordinate y, und dem zwischen den Endpunkten dieser beiden Ordinaten liegenden Bogen der Curve begränzten ebenen Figur bestimmen.

Auflösung. Der gesuchte Flächenraum ist unstreitig eine Function von x, und es wird sich also, wenn x sich um Δx ändert, y um Δy, v um Δv ändern.

Die Veränderung Δx der Abscisse denken wir uns immer der Null sehr nahe kommend, und unterscheiden nun die folgenden Fälle.

I. y positiv.

1. x positiv. In diesem Falle nimmt v offenbar zu und ab, wenn x respective zu- und abnimmt, d. i. Δv ist mit Δx gleichzeitig positiv und negativ; die Summe $2y + \Delta y$ der Ordinaten y und $y + \Delta y$ ist positiv, weil diese beiden Ordinaten selbst positiv sind; $\sin \alpha$ ist immer positiv. Also ist mit desto grösserer Genauigkeit, je näher Δx der Null kommt,

$$\Delta v = \tfrac{1}{2} \sin \alpha . (2y + \Delta y) \Delta x,$$

wie sogleich erhellen wird, wenn man nur überlegt, dass der absolute Werth von Δv dem Flächenraume des von Δx, y, $y + \Delta y$ und der die Endpunkte der Ordinaten y und $y + \Delta y$ verbindenden Sehne der Curve eingeschlossenen Trapeziums, dessen Höhe durch den absoluten Werth des Products $\Delta x \sin \alpha$ arithmetisch ausgedrückt wird, offenbar desto näher kommt, je näher Δx der Null kommt.

2. x negativ. In diesem Falle nimmt v offenbar ab und zu, wenn x respective zu- und abnimmt, d. i. Δv ist negativ oder positiv, wenn Δx respective positiv oder negativ ist; die Summe $2y + \Delta y$ der Ordinaten y und $y + \Delta y$ ist wieder positiv, weil diese Ordinaten selbst positiv sind; $\sin \alpha$ ist immer positiv. Also

ist nach einer ganz ähnlichen Betrachtung wie vorher mit desto grösserer Genauigkeit, je näher Δx der Null kommt,

$$\Delta v = -\tfrac{1}{2} \sin\alpha . (2y + \Delta y) \Delta x .$$

II. y negativ.

1. x positiv. In diesem Falle nimmt v offenbar ab und zu, wenn x respective zu- und abnimmt, d. i. Δv ist negativ oder positiv, wenn Δx respective positiv oder negativ ist; die Summe $2y + \Delta y$ der Ordinaten y und $y + \Delta y$ ist negativ, weil diese beiden Ordinaten selbst negativ sind; $\sin\alpha$ ist immer positiv. Also ist nach einer ganz ähnlichen Betrachtung wie oben mit desto grösserer Genauigkeit, je näher Δx der Null kommt,

$$\Delta v = \tfrac{1}{2} \sin\alpha . (2y + \Delta y) \Delta x .$$

2. x negativ. In diesem Falle nimmt v offenbar zu und ab, wenn x respective zu- und abnimmt, d. i. Δv ist positiv oder negativ, wenn Δx respective positiv oder negativ ist; die Summe $2y + \Delta y$ der Ordinaten y und $y + \Delta y$ ist negativ, weil diese Ordinaten selbst negativ sind; $\sin\alpha$ ist immer positiv. Also ist nach einer ganz ähnlichen Betrachtung wie oben mit desto grösserer Genauigkeit, je näher Δx der Null kommt,

$$\Delta v = -\tfrac{1}{2} \sin\alpha . (2y + \Delta y) \Delta x .$$

Im Allgemeinen ist folglich mit desto grösserer Genauigkeit, je näher Δx der Null kommt,

$$\Delta v = \pm \tfrac{1}{2} \sin\alpha . (2y + \Delta y) \Delta x ,$$

oder

$$\frac{\Delta v}{\Delta x} = \pm \sin\alpha . (y + \tfrac{1}{2} \Delta y) ,$$

unter der Bedingung, dass man das obere oder untere Zeichen nimmt, jenachdem x positiv oder negativ ist.

Bezeichnet man nun, wie gewöhnlich, die Gränze, welcher $\frac{\Delta v}{\Delta x}$ sich nähert, wenn Δx sich der Null nähert, durch $Lim \frac{\Delta v}{\Delta x}$; so ist offenbar

$$Lim \frac{\Delta v}{\Delta x} = \pm y \sin\alpha ,$$

d. i. nach dem allgemeinen Begriffe des Differentialquotienten

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \pm y \sin\alpha ;$$

also $\partial v = \pm \sin\alpha . y \partial x$, und folglich

$$v = \pm \sin\alpha \int y \partial x + C ,$$

wo in beiden Fällen die willkührliche Constante C offenbar so bestimmt werden muss, dass v für $x = 0$ verschwindet.

Dies giebt nach §. 3. auf der Stelle

$$v = \pm \sin\alpha \int_0^x y\,\partial x,$$

indem man immer das obere oder untere Zeichen nimmt, jenachdem x positiv oder negativ ist.

§. 89.

Aufgabe. Es seyen a und b die Abscissen zweier beliebigen Punkte A und B einer Curve; der Coordinatenwinkel sey α, und die Abscisse a sey kleiner als b. Man soll den Flächenraum v der von dem Theile $b-a$ der Abscissenaxe, den beiden Ordinaten der Punkte A und B, und dem zwischen den Punkten A und B liegenden Bogen der Curve begränzten ebenen Figur bestimmen.

Auflösung. 1. Wenn a und b beide positiv sind; so ist, weil nach der Voraussetzung a kleiner als b ist, nach §. 88. offenbar

$$v = \sin\alpha \int_0^b y\,\partial x - \sin\alpha \int_0^a y\,\partial x = \sin\alpha \left\{ \int_0^b y\,\partial x - \int_0^a y\,\partial x \right\},$$

oder nach §. 3.

$$v = \sin\alpha \left\{ \int_a^0 y\,\partial x + \int_0^b y\,\partial x \right\},$$

und folglich nach §. 3.

$$v = \sin\alpha \int_a^b y\,\partial x.$$

2. Wenn a und b beide negativ sind; so ist, weil nach der Voraussetzung a kleiner als b ist, nach §. 88. offenbar

$$v = -\sin\alpha \int_0^a y\,\partial x + \sin\alpha \int_0^b y\,\partial x = \sin\alpha \left\{ \int_0^b y\,\partial x - \int_0^a y\,\partial x \right\},$$

oder nach §. 3.

$$v = \sin\alpha \left\{ \int_a^0 y\,\partial x + \int_0^b y\,\partial x \right\},$$

und folglich nach §. 3.

$$v = \sin\alpha \int_a^b y\,\partial x.$$

3. Wenn endlich a negativ, b positiv ist; so ist nach §. 88. offenbar

$$v = -\sin\alpha \int_0^a y\,\partial x + \sin\alpha \int_0^b y\,\partial x = \sin\alpha \left\{ \int_0^b y\,\partial x - \int_0^a y\,\partial x \right\},$$

oder nach §. 3.

$$v = \sin\alpha\left\{\int_a^o y\partial x + \int_o^b y\partial x\right\},$$

und folglich nach §. 3.

$$v = \sin\alpha\int_a^b y\partial x\,.$$

Also ist in allen Fällen

$$v = \sin\alpha\int_a^b y\partial x\,,$$

wenn nur, wie hierbei immer angenommen wird, die Abscisse a kleiner wie die Abscisse b ist.

Für ein rechtwinkliges Coordinatensystem ist $\alpha = 90^\circ$, und folglich $v = \int_a^b y\partial x$.

§. 90.

Die im vorhergehenden Paragraphen entwickelte allgemeine Formel wollen wir nun auf einige specielle Fälle anwenden.

1. Die Parabel. Die Gleichung der Parabel zwischen rechtwinkligen Coordinaten, den Scheitel als Anfang der Abscissen angenommen, ist bekanntlich $y^2 = px$. Also ist

$$\int y\partial x = p^{\frac{1}{2}}\int x^{\frac{1}{2}}\partial x = \tfrac{2}{3}p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}}\,.$$

Bezeichnet nun v den Flächenraum der von der Abscisse x, der Ordinate y, und dem zwischen dem Scheitel und dem Punkte xy liegenden Bogen der Parabel begränzten ebenen Figur; so ist nach §. 89.

$$v = \int_o^x y\partial x = \tfrac{2}{3}p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}} = \tfrac{2}{3}x\sqrt{px} = \tfrac{2}{3}xy,$$

und v beträgt also immer zwei Drittheile des unter der Abscisse x und der Ordinate y enthaltenen Rechtecks.

2. Die Ellipse. Die Gleichung der Ellipse zwischen rechtwinkligen Coordinaten, ihren Mittelpunkt als Anfang der Abscissen angenommen, ist bekanntlich

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1,$$

und folglich

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2},$$

wo, wenn y, wie im Folgenden geschehen soll, als positiv betrachtet wird, die Quadratwurzel positiv genommen werden muss.

Nehmen wir nun auch die Abscisse x als positiv an, und bezeichnen den Flächenraum der von der Abscisse x, dem posi-

tiven Theile der Nebenaxe, der Ordinate y, und dem zwischen dem Endpunkte des positiven Theils der Nebenaxe und dem Punkte xy liegenden Bogen der Ellipse begränzten ebenen Figur durch v; so ist nach §. 89.

$$v = \frac{b}{a}\int_0^x \sqrt{a^2 - x^2}\,.\,\partial x.$$

Denken wir uns jetzt, wie Fig. 1. zeigt, über der Axe $AB = 2a$ der Ellipse als Durchmesser einen Kreis beschrieben, und bezeichnen, wenn $CP = x$, $PQ = y$ ist, den Flächenraum des Stücks $CPD'Q'$ dieses Kreises durch v'; so ist, wie leicht erhellen wird, nach §. 89.

$$v' = \int_0^x \sqrt{a^2 - x^2}\,.\,\partial x.$$

Also ist

$$v = \frac{b}{a} v'.$$

Zieht man aber den Radius CQ' des beschriebenen Kreises; so erhellet mittelst einiger bekannten geometrischen Elementarsätze sehr leicht die Richtigkeit der Gleichung

$$v' = \tfrac{1}{2}xy + \tfrac{1}{2}a^2 \, Arc\sin\frac{x}{a},$$

oder

$$v' = \tfrac{1}{2}x\sqrt{a^2 - x^2} + \tfrac{1}{2}a^2 \, Arc\sin\frac{x}{a},$$

oder

$$v' = \tfrac{1}{2}x\sqrt{a^2 - x^2} + \tfrac{1}{2}a^2 \, Arc\tang\frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}},$$

wo offenbar keiner der beiden Bogen

$$Arc\sin\frac{x}{a} \text{ und } Arc\tang\frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}$$

$\frac{1}{2}\pi$ übersteigt.

Folglich ist nach dem Obigen

$$v = \frac{bx}{2a}\sqrt{a^2 - x^2} + \tfrac{1}{2}ab \, Arc\sin\frac{x}{a}$$

oder

$$v = \frac{bx}{2a}\sqrt{a^2 - x^2} + \tfrac{1}{2}ab \, Arc\tang\frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}.$$

Für den elliptischen Quadranten Q ist $x = a$, und folglich, wie aus jeder der beiden vorigen Formeln leicht geschlossen wird, $Q = \frac{1}{4}ab\pi$; also, wenn E den Flächeninhalt der ganzen Ellipse bezeichnet, $E = ab\pi$.

3. Die Hyperbel. Wir wollen zuvörderst die Hyperbel zwischen ihren Asymptoten betrachten.

Zu dem Ende nehmen wir in *Fig.* 2. C als Anfang der Coordinaten, CK als den positiven Theil der Abscissenaxe, CL als den positiven Theil der Ordinatenaxe an, und bezeichnen den Asymptotenwinkel durch α.

Ist nun Q ein Punkt der Hyperbel und $CR = x$, $RQ = y$; so ist nach der Theorie der Kegelschnitte bekanntlich, wenn a und b die beiden Halbaxen sind,

$$xy = \frac{a^2 + b^2}{4},$$

oder, wenn wir der Kürze wegen $\frac{a^2+b^2}{4} = k^2$ setzen, $xy = k^2$.

Die Coordinaten des Scheitels A sind $CB = AB = \frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2} = k$. Also ist, wenn wir $ABRQ = v$ setzen, nach §. 89.

$$v = \sin\alpha \int_k^x \frac{k^2\partial x}{x} = k^2 \sin\alpha \int_k^x \frac{\partial x}{x},$$

und folglich, wie leicht erhellen wird,

$$v = k^2 \sin\alpha\, l\frac{x}{k},$$

oder

$$v = \tfrac{1}{4}(a^2+b^2)\sin\alpha\, l\frac{2x}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Bei der gleichseitigen Hyperbel ist $\alpha = 90^\circ$, $a = b$, und folglich

$$v = k^2 l\frac{x}{k} = \tfrac{1}{2}a^2 l\frac{x\sqrt{2}}{a}.$$

Für $k = CB = AB = 1$ ist bei der gleichseitigen Hyperbel $v = lx$, d. i. $ABRQ = l.\ CR$. Wegen dieser Beziehung der durch l bezeichneten natürlichen Logarithmen zur gleichseitigen Hyperbel werden dieselben auch hyperbolische Logarithmen (D. §. 56.) genannt.

Zieht man CQ; so hat die Figur CAQ mit $ABRQ$ immer gleichen Flächeninhalt, wie auf folgende Art leicht gezeigt werden kann. Es ist

$$CAQ = CARQ - CRQ,\quad ABRQ = CARQ - ABC.$$

Nach der Gleichung der Hyperbel zwischen ihren Asymptoten ist aber $CR.\ RQ = CB.\ AB$, also nach einem bekannten geometrischen Satze $\Delta CRQ = \Delta ABC$, und folglich nach dem Vorhergehenden $CAQ = ABRQ$, wie behauptet wurde. Also ist auch immer

$$CAQ = k^2 \sin\alpha\, l\frac{x}{k} = \tfrac{1}{4}(a^2+b^2)\sin\alpha\, l\frac{2x}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Nun lässt sich, wenn PQ auf der Hauptaxe der Hyperbel senkrecht steht, auch die Grösse der Figur $APQ = u$ leicht bestimmen. Setzen wir nämlich $AP = x'$, $PQ = y'$; so ist

$$u = CPQ - CAQ = \tfrac{1}{2}(a+x')y' - k^2 \sin\alpha . l\,\frac{x}{k}.$$

Ferner ist

$$AB:RQ = CR:BC = x:k\,,$$
$$AB:RQ = AD:QS = b:PS-y',$$

und folglich

$$x:k = b:PS-y',\quad \frac{x}{k} = \frac{b}{PS-y'}.$$

Weil nun aber offenbar

$$a:b = a+x':PS,\quad PS = \frac{b(a+x')}{a}$$

ist; so ist

$$\frac{x}{k} = \frac{ab}{b(a+x')-ay'},$$

und folglich nach dem Vorhergehenden

$$u = \tfrac{1}{2}(a+x')y' - k^2 \sin\alpha\, l\,\frac{ab}{b(a+x')-ay'}.$$

Aus dieser Gleichung wollen wir nun noch den Winkel α eliminiren. Es ist aber in dem rechtwinkligen Dreiecke CAD

$$\frac{b}{a} = tang\tfrac{1}{2}\alpha,\quad \frac{b^2}{a^2} = \frac{\sin\tfrac{1}{2}\alpha^2}{1-\sin\tfrac{1}{2}\alpha^2};$$

also

$$\sin\tfrac{1}{2}\alpha^2 = \frac{b^2}{a^2+b^2},\quad \cos\tfrac{1}{2}\alpha^2 = \frac{a^2}{a^2+b^2},$$

und folglich

$$\sin\alpha = 2\sin\tfrac{1}{2}\alpha\cos\tfrac{1}{2}\alpha = \frac{2ab}{a^2+b^2},\quad k^2\sin\alpha = \tfrac{1}{2}ab.$$

Also ist nach dem Obigen

$$u = \tfrac{1}{2}(a+x')y' - \tfrac{1}{2}ab\,l\,\frac{ab}{b(a+x')-ay'},$$

oder, weil nach der Theorie der Hyperbel $y' = \frac{b}{a}\sqrt{2ax'+x'^2}$ ist,

$$u = \frac{b(a+x')\sqrt{2ax'+x'^2}}{2a} - \tfrac{1}{2}ab\,l\,\frac{a}{a+x'-\sqrt{2ax'+x'^2}},$$

oder

$$u = \frac{b(a+x')\sqrt{(2a+x')x'}}{2a} - \tfrac{1}{2}ab\,l\,\frac{a+x'+\sqrt{(2a+x')x'}}{a}.$$

Nimmt man den Mittelpunkt der Hyperbel als Anfang der Coordinaten an, und bezeichnet die Coordinaten des Punktes Q in Bezug auf dieses System durch x, y; so ist $a+x' = x$, $(2a+x')x' = (x+a)(x-a) = x^2-a^2$, und folglich

$$u = \frac{bx}{2a}\sqrt{x^2-a^2} - \tfrac{1}{2}ab\,l\,\frac{x+\sqrt{x^2-a^2}}{a},$$

oder auch

$$u = \frac{bx}{2a}\sqrt{x^2-a^2} - \tfrac{1}{4}ab\,l\frac{x+\sqrt{x^2-a^2}}{x-\sqrt{x^2-a^2}},$$

oder auch

$$u = \tfrac{1}{2}xy - \tfrac{1}{4}ab\,l\frac{\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}}{\dfrac{x}{a}-\dfrac{y}{b}},$$

oder auch nach der ersten der vorstehenden drei Gleichungen

$$u = \tfrac{1}{2}xy - \tfrac{1}{2}ab\,l\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right).$$

4. Die Cycloide. Nach D. §. 192. ist, wenn in D. *Fig.* 4. AB als Axe, A als Anfang der Abscissen angenommen wird,

$$AP = x = r(\varphi - \sin\varphi),\quad PQ = y = r(1-\cos\varphi),$$

wo φ dieselbe Bedeutung wie a. a. O. hat. Weil nun

$$\partial x = r(1-\cos\varphi)\partial\varphi$$

ist; so ist

$$y\partial x = r^2(1-\cos\varphi)^2\partial\varphi = r^2(1-2\cos\varphi+\cos\varphi^2)\partial\varphi,$$

und folglich

$$\int y\partial x = r^2\varphi - 2r^2\sin\varphi + r^2\int\cos\varphi^2\partial\varphi\,.$$

Aber

$$\int\cos\varphi^2\partial\varphi = \tfrac{1}{2}\int(1+\cos2\varphi)\partial\varphi = \tfrac{1}{2}\varphi + \tfrac{1}{4}\int\cos2\varphi\,\partial.2\varphi = \tfrac{1}{2}\varphi + \tfrac{1}{4}\sin2\varphi.$$

Also ist

$$\int y\partial x = r^2(\tfrac{3}{2}\varphi - 2\sin\varphi + \tfrac{1}{4}\sin2\varphi) + C.$$

Setzen wir nun $APQ = v$; so ist nach §. 89.

$$v = \int_0^x y\partial x = \int_0^\varphi y\partial x = r^2(\tfrac{3}{2}\varphi - 2\sin\varphi + \tfrac{1}{4}\sin2\varphi).$$

Für die ganze Cycloide $ASB = F$ ist $\varphi = 2\pi$, und folglich $F = 3r^2\pi$, so dass also der Flächeninhalt der ganzen Cycloide drei Mal so gross wie der Inhalt des erzeugenden Kreises ist.

5. Die logarithmische Linie. Nach D. §. 194. ist $y = \log x$ die Gleichung der logarithmischen Linie. In D. *Fig.* 5. ist $AE = 1$. Sollen wir nun für $AQ = x$, $PQ = y$, wo also $x > 1$ ist, den Flächeninhalt v von PEQ bestimmen; so haben wir nach §. 89.

$$v = \int_1^x y\partial x = \int_1^x \log x\,\partial x.$$

Aber

$$\int\log x\,\partial x = \log x\int\partial x - \int\partial\log x\int\partial x = x\log x - \frac{x}{lb},$$

und folglich

$$v = x\,log\,x - \frac{x}{lb} + \frac{1}{lb}.$$

Setzen wir ferner den ganzen zwischen der logarithmischen Linie und dem Theile AC der Ordinatenaxe enthaltenen Raum $= u$; so ist nach §. 89.

$$u = \int_0^1 y\partial x = \int_0^1 log\,x\partial x,$$

und folglich nach dem Vorhergehenden, weil nach D. §. 150. die Grösse $x\,log\,x$ für $x = 0$ verschwindet, $u = -\frac{1}{lb}$. Also ist der durch u bezeichnete Raum eine endliche völlig bestimmte Grösse. Das Zeichen vor dem Bruche $\frac{1}{lb}$ kann nach dem, was in §. 87. beigebracht worden ist, nicht auffallen.

B. Rectification.

§. 91.

Erklärung. Die Bestimmung der Länge eines zwischen zwei durch ihre Coordinaten gegebenen Punkten einer auf ein beliebiges Coordinatensystem bezogenen Curve liegenden Bogens dieser Curve, wobei alle Bogen als positiv betrachtet werden, heisst die Rectification der gegebenen Curve.

Im Folgenden werden wir der Einfachheit wegen das Coordinatensystem immer rechtwinklig annehmen.

§. 92.

Aufgabe. Es seyen x, y die Coordinaten eines beliebigen Punktes einer gegebenen Curve. Man soll die Länge s des zwischen dem Endpunkte der dem Anfange der Coordinaten entsprechenden Ordinate und dem Punkte xy liegenden Bogens dieser Curve bestimmen, vorausgesetzt, dass dieselbe zwischen den beiden in Rede stehenden Punkten stetig ist.

Auflösung. s ist offenbar eine Function von x, und es wird sich also, wenn x sich um Δx verändert, y um Δy, s um Δs verändern. Nach Principien der analytischen Geometrie ist mit desto grösserer Genauigkeit, je näher Δx der Null kommt,

$$\Delta s^2 = (x + \Delta x - x)^2 + (y + \Delta y - y)^2,$$

d. i. $\Delta s^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2$ oder

$$\left(\frac{\Delta s}{\Delta x}\right)^2 = 1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2.$$

Ist nun

1. x positiv;

so nimmt s mit x offenbar gleichzeitig zu und ab, d. i. Δs ist mit Δx gleichzeitig positiv und negativ. Also ist mit desto grösserer Genauigkeit, je näher Δx der Null kommt,

$$\frac{\Delta s}{\Delta x} = \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2},$$

die Quadratwurzel immer positiv genommen.

Ist ferner

2. x negativ;

so nimmt s offenbar ab und zu, wenn x respective zu- und abnimmt, d. i. Δs ist negativ und positiv, wenn Δx respective positiv und negativ ist. Also ist in diesem Falle mit desto grösserer Genauigkeit, je näher Δx der Null kommt,

$$\frac{\Delta s}{\Delta x} = -\sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2},$$

die Quadratwurzel immer positiv genommen.

Ueberhaupt ist folglich mit desto grösserer Genauigkeit, je näher Δx der Null kommt,

$$\frac{\Delta s}{\Delta x} = \pm\sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2},$$

unter der Bedingung, dass man das obere oder untere Zeichen nimmt, jenachdem x positiv oder negativ ist.

Also ist, unter der Voraussetzung, dass Δx sich der Null nähert, offenbar

$$Lim\frac{\Delta s}{\Delta x} = \pm\sqrt{1 + Lim\left\{\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2\right\}}.$$

Nach dem allgemeinen Begriffe des Differentialquotienten ist aber

$$Lim\frac{\Delta s}{\Delta x} = \frac{\partial s}{\partial x},\quad Lim\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\partial y}{\partial x},$$

und folglich, weil offenbar

$$Lim\left\{\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2\right\} = \left(Lim\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2$$

ist,

$$\frac{\partial s}{\partial x} = \pm\sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2},\quad \partial s = \pm\,\partial x\sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2},$$

unter der Bedingung, dass man das obere oder untere Zeichen nimmt, jenachdem x positiv oder negativ ist*).

---

*) Man vergleiche hiermit die in D. §. 219. gegebene Entwickelung.

Also ist

$$s = \pm \int \partial x \sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2} + C,$$

und die Constante C offenbar so zu bestimmen, dass s für $x = 0$ verschwindet.

Diess giebt nach §. 3. auf der Stelle

$$s = \pm \int_0^x \partial x \sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2},$$

indem man immer das obere oder untere Zeichen nimmt, jenachdem x positiv oder negativ ist.

§. 93.

Aufgabe. Es seyen a und b die Abscissen zweier beliebigen Punkte A und B einer zwischen diesen Punkten stetigen Curve, und die Abscisse a sey kleiner als b. Man soll die Länge s des zwischen den beiden Punkten A und B liegenden Bogens dieser Curve bestimmen.

Auflösung. Mittelst einer der in §. 89. gegebenen ganz ähnlichen Auseinandersetzung ergiebt sich aus §. 92. in völliger Allgemeinheit

$$s = \int_a^b \partial x \sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2}.$$

§. 94.

Die im vorigen Paragraphen entwickelte allgemeine Formel wollen wir nun bei der Rectification einiger Curven anwenden.

1. Die Parabel. Die Gleichung der Parabel ist $y^2 = px$. Der zwischen ihrem Scheitel und dem Punkte xy, wo natürlich x positiv ist, liegende Bogen sey s; so ist nach §. 93.

$$s = \int_0^x \partial x \sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2}.$$

Weil nun

$$2y\frac{\partial y}{\partial x} = p, \quad \frac{\partial y}{\partial x} = \frac{p}{2y} = \frac{p}{2\sqrt{px}} = \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{p}{x}}$$

ist; so ist

$$s = \int_0^x \partial x \sqrt{1 + \frac{p}{4x}}.$$

Für

$$\sqrt{1 + \frac{p}{4x}} = z, \quad x = \frac{p}{4(z^2 - 1)}$$

ist aber

$$\int \partial x \sqrt{1+\frac{p}{4x}} = \int z\partial x = zx - \int x\partial z = zx - \frac{p}{4}\int \frac{\partial z}{z^2-1}$$
$$= zx - \frac{p}{8}\int \frac{\partial z}{z-1} + \frac{p}{8}\int \frac{\partial z}{z+1} = zx - \frac{p}{8}\, l\, \frac{z-1}{z+1} + C$$
$$= x\sqrt{1+\frac{p}{4x}} - \frac{p}{8}\, l\, \frac{\sqrt{4x+p} - 2\sqrt{x}}{\sqrt{4x+p} + 2\sqrt{x}} + C,$$

und folglich

$$s = x\sqrt{1+\frac{p}{4x}} - \frac{p}{8}\, l\, \frac{\sqrt{4x+p}-2\sqrt{x}}{\sqrt{4x+p}+2\sqrt{x}}$$
$$= x\sqrt{1+\frac{p}{4x}} + \frac{p}{8}\, l\, \frac{\sqrt{4x+p}+2\sqrt{x}}{\sqrt{4x+p}-2\sqrt{x}},$$

oder auch

$$s = x\sqrt{1+\frac{p}{4x}} - \frac{p}{4}\, l\, \frac{\sqrt{4x+p} - 2\sqrt{x}}{\sqrt{p}}$$
$$= x\sqrt{1+\frac{p}{4x}} + \frac{p}{4}\, l\, \frac{\sqrt{4x+p} + 2\sqrt{x}}{\sqrt{p}}.$$

Für $\frac{1}{4}p = a$, $p = 4a$ wird

$$s = \sqrt{x(a+x)} - al\frac{\sqrt{a+x} - \sqrt{x}}{\sqrt{a}}$$
$$= \sqrt{x(a+x)} + al\frac{\sqrt{a+x} + \sqrt{x}}{\sqrt{a}},$$

oder, wenn wir den Radius vector des Punktes xy durch v bezeichnen,

$$s = \sqrt{xv} - al\,\frac{\sqrt{v} - \sqrt{x}}{\sqrt{a}} = \sqrt{xv} + al\frac{\sqrt{v} + \sqrt{x}}{\sqrt{a}}.$$

Ist jetzt unter der Voraussetzung, dass $x' > x$ ist, s der zwischen den Punkten xy und $x'y'$, deren Vectoren v und v' seyn mögen, liegende Bogen der Parabel; so ist

$$s = \sqrt{x'v'} - \sqrt{xv} - al\frac{\sqrt{v'} - \sqrt{x'}}{\sqrt{v} - \sqrt{x}}$$
$$= \sqrt{x'v'} - \sqrt{xv} + al\frac{\sqrt{v'} + \sqrt{x'}}{\sqrt{v} + \sqrt{x}}.$$

2. **Die Ellipse.** Die Gleichung der Ellipse ist

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1,$$

und folglich

$$\frac{x}{a^2} + \frac{y}{b^2}.\frac{\partial y}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{b^2 x}{a^2 y};$$

also

$$1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2=\frac{b^4x^2+a^4y^2}{a^4y^2}=\frac{a^4-(a^2-b^2)x^2}{a^2(a^2-x^2)},$$

oder, wenn wir

$$\frac{a^2-b^2}{a^2}=\varepsilon^2$$

setzen,

$$1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2=\frac{a^2-\varepsilon^2x^2}{a^2-x^2}.$$

Setzen wir nun, was bei der Ellipse offenbar verstattet ist, $\frac{x}{a}=\sin\varphi$, $x=a\sin\varphi$; so ist $\partial x=a\cos\varphi\,\partial\varphi$, und folglich, wie man leicht findet,

$$\partial x\sqrt{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2}=a\,\partial\varphi\sqrt{1-\varepsilon^2\sin\varphi^2}.$$

Unter der Voraussetzung, dass x positiv ist, ist also nach §. 93., wenn man den Bogen s vom Scheitel der kleinen Axe der Ellipse an rechnet,

$$s=\int_0^x\partial x\sqrt{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2}=a\int_0^\varphi\partial\varphi\sqrt{1-\varepsilon^2\sin\varphi^2}.$$

Weil nun immer $\varepsilon^2\sin\varphi^2<1$ ist, so kann man die Wurzelgrösse $\sqrt{1-\varepsilon^2\sin\varphi^2}$ nach dem Binomischen Lehrsatze in eine convergirende Reihe entwickeln, und dann das in §. 8. bewiesene Theorem anwenden. Dadurch erhält man

$$\frac{s}{a}=\varphi-\tfrac{1}{2}\varepsilon^2\int_0^\varphi\sin\varphi^2\partial\varphi-\frac{1}{2.4}\varepsilon^4\int_0^\varphi\sin\varphi^4\partial\varphi$$
$$-\frac{1.3}{2.4.6}\varepsilon^6\int_0^\varphi\sin\varphi^6\partial\varphi-\frac{1.3.5}{2.4.6.8}\varepsilon^8\int_0^\varphi\sin\varphi^8\partial\varphi-\ldots;$$

also nach §. 65. 1.

$$\frac{s}{a}=\varphi$$
$$-\tfrac{1}{2}\varepsilon^2\{\tfrac{1}{2}\varphi-\tfrac{1}{2}\sin\varphi\cos\varphi\}$$
$$-\frac{1}{2.4}\varepsilon^4\left\{\frac{1.3}{2.4}\varphi-\left(\frac{3}{2.4}\sin\varphi+\tfrac{1}{4}\sin\varphi^3\right)\cos\varphi\right\}$$
$$-\frac{1.3}{2.4.6}\varepsilon^6\left\{\frac{1.3.5}{2.4.6}\varphi-\left(\frac{3.5}{2.4.6}\sin\varphi+\frac{5}{4.6}\sin\varphi^3+\tfrac{1}{6}\sin\varphi^5\right)\cos\varphi\right\}$$
$$-\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Für den elliptischen Quadranten Q ist $x=a$, also $\varphi=\frac{1}{2}\pi$, und folglich

$$Q=\tfrac{1}{2}a\pi\left\{1-(\tfrac{1}{2})^2.\frac{\varepsilon^2}{1}-\left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2.\frac{\varepsilon^4}{3}-\left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^2.\frac{\varepsilon^6}{5}-\ldots\right\}.$$

Ist also P der ganze Umfang der Ellipse, so ist

$$P=2a\pi\left\{1-\tfrac{1}{1}(\tfrac{1}{2}\varepsilon)^2-\tfrac{1}{3}\left(\frac{1.3}{2.4}\varepsilon^2\right)^2-\tfrac{1}{5}\left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\varepsilon^3\right)^2-\ldots\right\}.$$

3. Die Hyperbel. Die Gleichung der Hyperbel ist

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2-\left(\frac{y}{b}\right)^2=1,$$

und folglich

$$\frac{x}{a^2}-\frac{y}{b^2}\cdot\frac{\partial y}{\partial x}=0,\quad \frac{\partial y}{\partial x}=\frac{b^2x}{a^2y},$$

also

$$1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2=\frac{b^4x^2+a^4y^2}{a^4y^2}=\frac{a^4-(a^2+b^2)x^2}{a^2(a^2-x^2)},$$

oder, wenn wir

$$\frac{a^2+b^2}{a^2}=\varepsilon^2$$

setzen,

$$1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2=\frac{a^2-\varepsilon^2x^2}{a^2-x^2}.$$

Setzen wir nun, was bei der Hyperbel offenbar verstattet ist, $\frac{x}{a}=sec\,\varphi$, $\frac{a}{x}=cos\,\varphi$; so ist $\partial x=\frac{a\,sin\,\varphi}{cos\,\varphi^2}\partial\varphi$, und folglich, wie man leicht findet,

$$\partial x\sqrt{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2}=a\varepsilon\,sec\,\varphi^2\,\partial\varphi\sqrt{1-\frac{1}{\varepsilon^2}cos\,\varphi^2}.$$

Unter der Voraussetzung, dass x positiv ist, ist also nach §. 93., wenn man den Bogen s vom Scheitel der Hyperbel an rechnet,

$$s=\int_a^x\partial x\sqrt{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2}=a\varepsilon\int_0^\varphi sec\,\varphi^2\,\partial\varphi\sqrt{1-\frac{1}{\varepsilon^2}cos\,\varphi^2}.$$

Weil nun immer $\frac{1}{\varepsilon^2}cos\,\varphi^2<1$ ist; so kann man wieder die Wurzelgrösse $\sqrt{1-\frac{1}{\varepsilon^2}cos\,\varphi^2}$ nach dem Binomischen Lehrsatze in eine convergirende Reihe entwickeln, und dann das in §. 8. bewiesene Theorem anwenden. Dadurch erhält man

$$\frac{s}{a\varepsilon}=\int_0^\varphi sec\,\varphi^2\,\partial\varphi-\tfrac{1}{2}\cdot\frac{1}{\varepsilon^2}\int_0^\varphi\partial\varphi-\frac{1}{2.4}\cdot\frac{1}{\varepsilon^4}\int_0^\varphi cos\,\varphi^2\,\partial\varphi$$
$$-\frac{1.3}{2.4.6}\cdot\frac{1}{\varepsilon^6}\int_0^\varphi cos\,\varphi^4\,\partial\varphi-\frac{1.3.5}{2.4.6.8}\cdot\frac{1}{\varepsilon^8}\int_0^\varphi cos\,\varphi^6\,\partial\varphi-\ldots;$$

also nach §. 68. 1. und §. 66. 1.

$$\frac{s}{a\varepsilon} = tang\,\varphi - \tfrac{1}{2} \cdot \frac{1}{\varepsilon^2}\varphi$$

$$- \frac{1}{2.4} \cdot \frac{1}{\varepsilon^4}\left\{\tfrac{1}{2}\varphi + \tfrac{1}{2}\cos\varphi \sin\varphi\right\}$$

$$- \frac{1.3}{2.4.6} \cdot \frac{1}{\varepsilon^6}\left\{\frac{1.3}{2.4}\varphi + \left(\frac{3}{2.4}\cos\varphi + \tfrac{1}{4}\cos\varphi^3\right)\sin\varphi\right\}$$

$$- \frac{1.3.5}{2.4.6.8} \cdot \frac{1}{\varepsilon^8}\left\{\frac{1.3.5}{2.4.6}\varphi + \left(\frac{3.6}{2.4.6}\cos\varphi + \frac{5}{4.6}\cos\varphi^3 + \tfrac{1}{6}\cos\varphi^5\right)\sin\varphi\right\}$$

$$- \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot$$

4. Die Cycloide. Die Gleichungen der Cycloide sind, wenn man in D. *Fig.* 4. *AB* als Axe, *A* als Anfang der Abscissen annimmt, nach D. §. 192.

$$AP = x = r(\varphi - \sin\varphi), \quad PQ = y = r(1 - \cos\varphi);$$

folglich

$$\partial x = r(1 - \cos\varphi)\partial\varphi, \quad \partial y = r\sin\varphi\,\partial\varphi, \quad \frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\sin\varphi}{1 - \cos\varphi};$$

also

$$1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 = \frac{2}{1 - \cos\varphi},$$

und folglich

$$\partial x\sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2} = r\partial\varphi\sqrt{2(1 - \cos\varphi)} = 2r\sin\tfrac{1}{2}\varphi\partial\varphi.$$

Rechnet man nun den Bogen s vom Punkte A an; so ist nach §. 93.

$$s = \int_0^x \partial x\sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2} = 2r\int_0^\varphi \sin\tfrac{1}{2}\varphi\partial\varphi.$$

Für $\frac{1}{2}\varphi = \psi$ ist $\partial\varphi = 2\partial\psi$, und folglich

$$\int \sin\tfrac{1}{2}\varphi\partial\varphi = 2\int \sin\psi\partial\psi = -2\cos\psi = -2\cos\tfrac{1}{2}\varphi.$$

Also ist

$$\int_0^\varphi \sin\tfrac{1}{2}\varphi\partial\varphi = -2\cos\tfrac{1}{2}\varphi + 2 = 2(1 - \cos\tfrac{1}{2}\varphi) = 4\sin\tfrac{1}{4}\varphi^2,$$

und folglich $s = 8r\sin\frac{1}{4}\varphi^2$.

Für die ganze Cycloide ist $\varphi = 2\pi$; und folglich die Länge der ganzen Cycloide $= 8r$, so dass also die Länge der ganzen Cycloide acht Mal so gross ist wie der Halbmesser des erzeugenden Kreises.

5. Die Neilische Parabel. Diese krumme Linie, deren Gleichung $y'^3 = ax'^2$ ist, ist die erste, welche rectificirt worden ist, von einem englischen Mathematiker Wilhelm Neil, der seine Entdeckung, die viel Aufsehen erregte, im Jahre 1657

bekannt machte. Verändert man die Coordinaten und setzt $x' = y$, $y' = x$; so wird die Gleichung $y^2 = \frac{1}{a}x^3$, und folglich

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{3}{2}\sqrt{\frac{x}{a}}, \quad 1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 = \frac{4a + 9x}{4a}.$$

Also, wenn man den Bogen s vom Anfange der Coordinaten an rechnet, nach §. 93., da x, unter der Voraussetzung, dass a positiv ist, offenbar bloss positiv seyn kann,

$$s = \int_0^x \partial x \sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2} = \frac{1}{2\sqrt{a}} \int_0^x \partial x \sqrt{4a + 9x}.$$

Für $4a + 9x = z$ ist $\partial x = \frac{1}{9}\partial z$, und folglich

$$\int \partial x \sqrt{4a + 9x} = \frac{1}{9}\int z^{\frac{1}{2}} \partial z = \frac{2}{27} z^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{27}(4a + 9x)^{\frac{3}{2}}.$$

Also ist

$$s = \frac{1}{27\sqrt{a}} \left\{(4a + 9x)^{\frac{3}{2}} - 8a^{\frac{3}{2}}\right\} = \frac{8a}{27}\left\{\left(1 + \frac{9x}{4a}\right)^{\frac{3}{2}} - 1\right\}.$$

C. Cubatur der durch Umdrehung ebener Curven um feste Axen entstandenen Körper.

§. 95.

Erklärung. Wir wollen uns jetzt den Körper vorstellen, welcher durch die Umdrehung einer beliebigen Curve um die Abscissenaxe entstanden ist. Sind nun, unter Voraussetzung rechtwinkliger Coordinaten, a und b die Abscissen, a' und b' die entsprechenden Ordinaten zweier Punkte der gegebenen Curve, zwischen denen dieselbe stetig ist; so kann man den cubischen Inhalt des von zwei kreisförmigen Grundflächen begränzten Körpers zu bestimmen verlangen, welcher, vorausgesetzt, dass a kleiner als b ist, durch die Umdrehung der von dem Theile $b - a$ der Abscissenaxe, den beiden Ordinaten a' und b', und dem zwischen den beiden Punkten aa', bb' liegenden Bogen der gegebenen Curve begränzten ebenen Figur um die Abscissenaxe entsteht. Die Auflösung dieser allgemeinen Aufgabe nennt man die Cubatur des durch die Umdrehung der gegebenen Curve um die Abscissenaxe entstandenen Körpers.

§. 96.

Aufgabe. Es seyen x, y die rechtwinkligen Coordinaten eines beliebigen Punktes einer gegebenen Curve. Man soll den cubischen Inhalt V des von zwei kreisförmigen Grundflächen begränzten Körpers bestimmen, welcher durch die Umdrehung der *von der* Abscisse x, der dem Anfange der Abscissen

entsprechenden Ordinate, der Ordinate y, und dem zwischen den Endpunkten dieser beiden Ordinaten liegenden Bogen der gegebenen Curve begränzten ebenen Figur um die Abscissenaxe entsteht.

Auflösung. V ist offenbar eine Function von x, und es wird sich also, wenn x sich um Δx verändert, y um Δy, V um ΔV verändern.

Ist nun

1. x positiv;

so nimmt V mit x gleichzeitig zu und ab, d. i. ΔV ist positiv oder negativ, wenn Δx respective positiv oder negativ ist. Also ist mit desto grösserer Genauigkeit, je näher Δx der Null kommt,

$$\Delta V = \tfrac{1}{3}\{y^2 + y(y+\Delta y) + (y+\Delta y)^2\}\pi\Delta x,$$

oder

$$\Delta V = (y^2 + y\Delta y + \tfrac{1}{3}\Delta y^2)\pi\Delta x,$$

oder

$$\frac{\Delta V}{\Delta x} = y^2\pi + \pi y\Delta y + \tfrac{1}{3}\pi\Delta y^2,$$

wie sogleich erhellen wird, wenn man nur überlegt, dass der absolute Werth von ΔV dem körperlichen Inhalte des geraden abgestumpften Kegels, welcher durch die Umdrehung des von Δx, von y und $y+\Delta y$, und der die Endpunkte dieser beiden Ordinaten verbindenden Sehne der gegebenen Curve begränzten Trapeziums um die Abscissenaxe entsteht, offenbar desto näher kommt, je näher Δx der Null kommt.

Ist ferner

2. x negativ;

so nimmt V offenbar ab und zu, wenn x respective zu- und abnimmt, d. i. ΔV ist negativ oder positiv, wenn Δx respective positiv oder negativ ist, und nach einer ganz ähnlichen Betrachtung wie vorher ist folglich mit desto grösserer Genauigkeit, je näher Δx der Null kommt,

$$\Delta V = -\tfrac{1}{3}\{y^2 + y(y+\Delta y) + (y+\Delta y)^2\}\pi\Delta x,$$

oder

$$\Delta V = -(y^2 + y\Delta y + \tfrac{1}{3}\Delta y^2)\pi\Delta x,$$

oder

$$\frac{\Delta V}{\Delta x} = -y^2\pi - \pi y\Delta y - \tfrac{1}{3}\pi\Delta y^2.$$

Ueberhaupt ist also mit desto grösserer Genauigkeit, je näher Δx der Null kommt,

$$\frac{\Delta V}{\Delta x} = \pm y^2\pi \pm \pi y\Delta y \pm \tfrac{1}{3}\pi\Delta y^2,$$

unter der Bedingung, dass man die obern oder untern Zeichen nimmt, jenachdem x positiv oder negativ ist.

Hieraus ergiebt sich nach einer aus dem Obigen hinreichend bekannten Schlussweise

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \pm y^2 \pi, \quad \partial V = \pm \pi y^2 \partial x,$$

und folglich

$$V = \pm \pi \int_0^x y^2 \partial x,$$

immer unter der Bedingung, dass man das obere oder untere Zeichen nimmt, jenachdem x positiv oder negativ ist.

§. 97.

Aufgabe. Es seyen a und b die Abscissen zweier beliebigen Punkte A und B einer gegebenen Curve, und a sey kleiner als B. Man soll den cubischen Inhalt V des Körpers bestimmen, welcher durch die Umdrehung der von dem Theile $b-a$ der Abscissenaxe, den Ordinaten der Punkte A und B und dem zwischen diesen beiden Punkten liegenden Bogen der gegebenen Curve begränzten ebenen Figur um die Abscissenaxe entsteht.

Auflösung. Mittelst einer der in §. 89. angestellten ganz ähnlichen Betrachtung ergiebt sich aus §. 96.

$$V = \pi \int_a^b y^2 \partial x.$$

§. 98.

Die allgemeine Formel des vorigen Paragraphen wenden wir nun wieder auf einige Beispiele an.

1. Parabolisches Konoid. Für das Parabolische Konoid ist $y^2 \partial x = px \partial x$, und folglich, wenn wir den Anfang der Coordinaten als Anfangspunkt annehmen,

$$V = p\pi \int_0^x x \partial x = \tfrac{1}{2} p \pi x^2 = \tfrac{1}{2} \pi x y^2.$$

2. Elliptisches und Hyperbolisches Konoid. Nehmen wir den Scheitel der Hauptaxe als Anfang der Coordinaten und als Anfangspunkt des Körpers V an; so ist

$$V = \int_0^x y^2 \partial x = \pi \int_0^x \left(px \mp \frac{px^2}{2a}\right) \partial x,$$

wo das obere Zeichen für das Elliptische, das untere für das Hyperbolische Konoid gilt. Weil nun

$$\int_0^x \left(px \mp \frac{px^2}{2a}\right) \partial x =$$

$$p \int_0^x x \partial x \mp \frac{p}{2a} \int_0^x x^2 \partial x = \tfrac{1}{2} px^2 \mp \frac{px^3}{6a}$$

ist; so ist

$$V = \tfrac{1}{2} p\pi x^2 \left(1 \mp \frac{x}{3a}\right) = \frac{b^2 \pi x^2}{a} \left(1 \mp \frac{x}{3a}\right).$$

Setzt man den cubischen Inhalt des ganzen Elliptischen Konoids $= E$; so ist $E = 2p\pi a^2 (1 - \tfrac{2}{3}) = \tfrac{2}{3} pa^2 \pi = \tfrac{4}{3} ab^2 \pi$. Für den körperlichen Inhalt K einer mit dem Halbmesser a beschriebenen Kugel erhält man hieraus $K = \tfrac{4}{3} a^3 \pi$, ein schon aus den Elementen der Geometrie bekannter Ausdruck.

Der Inhalt eines Segments einer mit dem Halbmesser a beschriebenen Kugel von der Höhe x ergiebt sich aus dem Vorhergehenden $= a\pi x^2 \left(1 - \frac{x}{3a}\right) = \pi x^2 (a - \tfrac{1}{3} x)$.

Ist P der Inhalt eines zwischen zwei Parallelkreisen, deren Halbmesser ϱ, ϱ' sind, und deren Entfernung von einander e ist, enthaltenen Stücks einer mit dem Halbmesser a beschriebenen Kugel; so ist, wenn $e = x' - x$ ist, nach dem Vorhergehenden

$$\begin{aligned} P &= \pi\{x'^2 (a - \tfrac{1}{3} x') - x^2 (a - \tfrac{1}{3} x)\} \\ &= \tfrac{1}{3}\pi \{3a(x'^2 - x^2) - (x'^3 - x^3)\} \\ &= \tfrac{1}{3}\pi (x' - x)\{3a(x' + x) - x'^2 - x'x - x^2\}. \end{aligned}$$

Aber

$$\varrho'^2 = 2ax' - x'^2, \quad \varrho^2 = 2ax - x^2,$$

und folglich

$$\begin{aligned} 3(\varrho^2 + \varrho'^2) + e^2 &= 6a(x' + x) - 3(x'^2 + x^2) + (x' - x)^2 \\ &= 2\{3a(x' + x) - x'^2 - x'x - x^2\}. \end{aligned}$$

Also

$$P = \tfrac{1}{6} \pi e \{3(\varrho^2 + \varrho'^2) + e^2\}.$$

3. Durch Umdrehung einer Cycloide um die Basis erzeugter Körper. Wir nehmen den Punkt A (D. *Fig.* 4.) als Anfang der Coordinaten und als Anfangspunkt des Körpers V an. Dann ist

$$x = r(\varphi - \sin\varphi), \quad y = r(1 - \cos\varphi), \quad V = \pi \int_0^x y^2 \partial x.$$

Weil nun $\partial x = r(1 - \cos\varphi)\partial\varphi$ ist; so ist

$$V = r^3 \pi \int_0^\varphi (1 - \cos\varphi)^3 \partial\varphi.$$

Aber

$$\int_0^\varphi (1 - \cos\varphi)^3 \partial\varphi =$$

$$\varphi - 3\int_0^\varphi \cos\varphi\, \partial\varphi + 3\int_0^\varphi \cos\varphi^2\, \partial\varphi - \int_0^\varphi \cos\varphi^3\, \partial\varphi,$$

und folglich nach §. 66.

$$V = r^3 \pi (\tfrac{5}{2}\varphi - \tfrac{11}{3} \sin\varphi + \tfrac{3}{2} \sin\varphi\cos\varphi - \tfrac{1}{3} \sin\varphi\cos\varphi^2).$$

Für den durch die Umdrehung der ganzen Cycloide um AB entstandenen Körper ist $\varphi = 2\pi$, und folglich der Inhalt dieses Körpers $= 5r^3\pi^2$.

4. **Durch Umdrehung einer Cycloide um ihre Axe erzeugter Körper.** Wir nehmen die Axe SC (D. *Fig.* 4.) als Abscissenaxe, den Scheitel S der Cycloide als Anfang der Coordinaten und als Anfangspunkt des Körpers V an. Dann ist $V = \pi\int_0^x y^2\partial x$. Nun erhellet aber leicht, dass

$$x = 2r - r(1-\cos\varphi) = r(1+\cos\varphi),$$
$$y = r\pi - r(\varphi - \sin\varphi) = r(\pi - \varphi + \sin\varphi),$$

oder, wenn wir $\pi - \varphi = \theta$ setzen,

$$x = r(1-\cos\theta), \quad y = r(\theta + \sin\theta),$$

und folglich

$$\partial x = r\sin\theta\partial\theta, \quad y^2\partial x = r^3(\theta + \sin\theta)^2\sin\theta\partial\theta$$

ist. Weil nun für $x = 0$ offenbar $\theta = \pi - \pi = 0$ ist; so ist

$$V = r^3\pi\int_0^\theta(\theta + \sin\theta)^2\sin\theta\partial\theta.$$

Es ist aber

$$\int_0^\theta(\theta + \sin\theta)^2\sin\theta\partial\theta =$$

$$\int_0^\theta\theta^2\sin\theta\partial\theta + 2\int_0^\theta\theta\sin\theta^2\partial\theta + \int_0^\theta\sin\theta^3\partial\theta$$

und nach §. 75. und §. 65.

$$\int_0^\theta\theta^2\sin\theta\partial\theta = -\theta^2\cos\theta + 2\theta\sin\theta + 2\cos\theta - 2,$$

$$\int_0^\theta\sin\theta^3\partial\theta = -\tfrac{1}{3}\sin\theta^2\cos\theta - \tfrac{2}{3}\cos\theta + \tfrac{2}{3}$$
$$= -\tfrac{1}{6}\sin\theta\sin 2\theta - \tfrac{2}{3}\cos\theta + \tfrac{2}{3}.$$

Weil nun ferner

$$\int\theta\sin\theta^2\partial\theta = \tfrac{1}{2}\int\theta(1-\cos 2\theta)\partial\theta = \tfrac{1}{4}\theta^2 - \tfrac{1}{2}\int\theta\cos 2\theta\partial\theta$$
$$= \tfrac{1}{4}\theta^2 - \tfrac{1}{2}\theta\int\cos 2\theta\partial\theta + \tfrac{1}{2}\int\partial\theta\int\cos 2\theta\partial\theta$$
$$= \tfrac{1}{4}\theta^2 - \tfrac{1}{4}\theta\sin 2\theta + \tfrac{1}{4}\int\sin 2\theta\partial\theta$$
$$= \tfrac{1}{4}\theta^2 - \tfrac{1}{4}\theta\sin 2\theta - \tfrac{1}{8}\cos 2\theta,$$

und folglich

$$\int_0^\theta\theta\sin\theta^2\partial\theta = \tfrac{1}{4}\theta^2 - \tfrac{1}{4}\theta\sin 2\theta - \tfrac{1}{8}\cos 2\theta + \tfrac{1}{8}$$

ist; so ist

$$V = r^3\pi\left\{\begin{matrix}\tfrac{1}{2}\theta^2(1-2\cos\theta) + \tfrac{1}{2}\theta(4\sin\theta - \sin 2\theta) \\ + \tfrac{4}{3}\cos\theta - \tfrac{1}{4}\cos 2\theta - \tfrac{1}{6}\sin\theta\sin 2\theta - \tfrac{13}{12}\end{matrix}\right\}.$$

Um den Inhalt des durch die Umdrehung der ganzen Cycloide um die Axe SC erzeugten Körpers zu finden, kann man sowohl $\varphi = 0$, als auch $\varphi = 2\pi$, d. i. sowohl $\theta = \pi$, als auch $\theta = -\pi$ setzen, und erhält in beiden Fällen den Inhalt des in Rede stehenden Körpers $= r^3\pi(\frac{3}{2}\pi^2 - \frac{8}{3})$.

D. Complanation der durch Umdrehung ebener Curven um feste Axen entstandenen Körper.

§. 99.

Erklärung. Unter der Voraussetzung eines rechtwinkligen Coordinatensystems seyen a, b die Abscissen und a', b' die Ordinaten zweier beliebigen Punkte A, B einer zwischen diesen beiden Punkten stetigen Curve, und a sey kleiner als b. Denkt man sich nun die von dem Theile $b-a$ der Abscissenaxe, von den Ordinaten a' und b', und von dem Bogen AB der gegebenen Curve begränzte ebene Figur um die Abscissenaxe gedreht; so wird der Bogen AB eine gewisse krumme Fläche beschreiben. Jeder von einem Bogen der gegebenen krummen Linie, dessen Punkte sämmtlich positive Ordinaten haben, beschriebene Theil dieser krummen Fläche soll im Folgenden als positiv; dagegen jeder von einem Bogen der gegebenen krummen Linie, dessen Punkte sämmtlich negative Ordinaten haben, beschriebene Theil als negativ betrachtet werden. Die Summe aller nach dieser Bestimmung mit ihren gehörigen Zeichen genommenen Theile der von AB beschriebenen krummen Fläche heisst der Inhalt oder Flächenraum dieser krummen Fläche, und dessen Bestimmung wird gewöhnlich die Complanation des mit der von AB beschriebenen krummen Fläche zugleich beschriebenen Körpers genannt.

§. 100.

Aufgabe. Es seyen x, y die rechtwinkligen Coordinaten eines beliebigen Punktes B einer zwischen diesem Punkte und dem Anfange A der Coordinaten stetigen Curve. Man soll den Flächenraum S der krummen Fläche bestimmen, welche von dem Bogen AB beschrieben wird, wenn sich die von der Abscisse x, den Ordinaten der Punkte A und B, und dem Bogen AB begränzte ebene Figur um die Abscissenaxe herum dreht.

Auflösung. Der gesuchte Flächenraum ist offenbar eine Function von x, und es wird sich also, wenn x sich um Δx ändert, y um Δy, S um ΔS ändern.

Sey nun

I. y positiv.

1. x positiv. In diesem Falle nimmt S offenbar zu und ab, wenn x respective zu- und abnimmt, d. i. ΔS ist mit Δx

$$\int \partial x \sqrt{p+4x} = \tfrac{1}{4}\int u^{\frac{1}{2}} \partial u = \tfrac{1}{6} u^{\frac{3}{2}} = \tfrac{1}{6}\sqrt{(p+4x)^3}\,.$$

Also ist

$$S = \tfrac{1}{6}\pi\{\sqrt{p(p+4x)^3} - p^2\} = \tfrac{4}{3}\pi\{\sqrt{p(x+\tfrac{1}{4}p)^3} - \tfrac{1}{8}p^2\},$$

oder, wenn man den Radius vector des Punktes xy durch v be-zeichnet,

$$S = \tfrac{4}{3}\pi\{\sqrt{pv^3} - \tfrac{1}{8}p^2\}.$$

3. **Elliptisches Konoid.** Nimmt man die kleine Axe der Ellipse als Axe der Abscissen und also auch als Drehungsaxe an; so ist

$$\left(\frac{x}{b}\right)^2 \quad \left(\frac{y}{a}\right)^2 = 1$$

die Gleichung der Ellipse, und folglich

$$\frac{x}{b^2} + \frac{y}{a^2}\cdot\frac{\partial y}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{a^2 x}{b^2 y},$$

$$1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 = \frac{a^4 x^2 + b^4 y^2}{b^4 y^2};$$

$$y\partial x\sqrt{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2} = \frac{\partial x}{b^2}\sqrt{a^4 x^2 + b^4 y^2} = \frac{a}{b^2}\partial x\sqrt{b^4 + (a^2 - b^2)x^2}$$

oder, wenn wir $\frac{b^4}{a^2 - b^2} = k^2$ setzen,

$$y\partial x\sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2} = \frac{a}{k}\partial x\sqrt{k^2 + x^2}.$$

Also ist nach §. 56. und §. 54. I.

$$S = 2\pi\int_0^x y\,\partial x\sqrt{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2}.$$

und folglich

$$S = \frac{a\pi x}{k}\sqrt{k^2+x^2} + a\pi k l\frac{x+\sqrt{k^2+x^2}}{k}.$$

Für $x = b$ erhält man aus dieser Formel, wenn E die halbe Oberfläche des durch die Umdrehung der Ellipse um die kleine Axe erzeugten elliptischen Sphäroids bezeichnet,

$$E = a^2\pi + \frac{ab^2\pi}{\sqrt{a^2-b^2}}\,l\frac{a+\sqrt{a^2-b^2}}{b}.$$

Um die für S gefundene allgemeine Formel zur numerischen Berechnung bequem einzurichten, setze man $tang\,\varphi = \frac{x}{k}$; so ist $\sqrt{k^2+x^2} = k\sec\varphi$, und

$$\frac{x+\sqrt{k^2+x^2}}{k} = tang\,\varphi + \sec\varphi = \frac{1+\sin\varphi}{\cos\varphi} = \frac{1+\cos(90^0-\varphi)}{\sin(90^0-\varphi)}$$

$$= \frac{2\cos(45^0-\frac{1}{2}\varphi)^2}{2\sin(45^0-\frac{1}{2}\varphi)\cos(45^0-\frac{1}{2}\varphi)} = \cot(45^0-\tfrac{1}{2}\varphi) = tang(45^0+\tfrac{1}{2}\varphi).$$

Also ist

$$S = ak\pi\{tang\,\varphi\sec\varphi + l\,tang(45^0+\tfrac{1}{2}\varphi)\},$$

oder, wenn M den Modulus der briggischen Logarithmen bezeichnet,

$$S = \frac{ak\pi}{M}\{M\,tang\,\varphi\sec\varphi + \log tang(45^0+\tfrac{1}{2}\varphi)\}.$$

Diese Formeln sind bei der Berechnung der Oberfläche der Erde von Wichtigkeit, wenn man dieselbe als ein elliptisches Sphäroid betrachtet.

Nimmt man die grosse Axe der Ellipse als Axe der Abscissen, und also auch als Drehungsaxe an; so ist

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$$

die Gleichung der Ellipse, und folglich

$$\frac{x}{a^2} + \frac{y}{b^2}\cdot\frac{\partial y}{\partial x} = 0,\quad \frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{b^2x}{a^2y},$$

$$1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 = \frac{a^4y^2+b^4x^2}{a^4y^2};$$

$$y\partial x\sqrt{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2} = \frac{\partial x}{a^2}\sqrt{a^4y^2+b^4x^2} = \frac{b\partial x}{a^2}\sqrt{a^4-(a^2-b^2)x^2},$$

oder, wenn wir $\frac{a^4}{a^2-b^2} = k^2$ setzen,

$$y\partial x\sqrt{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2} = \frac{b\partial x}{k}\sqrt{k^2-x^2}.$$

Rechnet man nun, unter der Voraussetzung, dass x positiv ist, die Fläche S vom Scheitel der kleinen Axe an; so ist nach §. 56. und §. 54. II.

$$S = \frac{b\pi x}{k}\sqrt{k^2-x^2} + b\pi k\int_0^x \frac{\partial x}{\sqrt{k^2-x^2}}$$

$$= \frac{b\pi x}{k}\sqrt{k^2-x^2} + b\pi k \, Arc\,tang \frac{x}{\sqrt{k^2-x^2}},$$

wo, wie man sich leicht überzeugen wird, für $Arc\,tang \frac{x}{\sqrt{k^2-x^2}}$ der kleinste Bogen zu nehmen ist, dessen Tangente $\frac{x}{\sqrt{k^2-x^2}}$ ist.

Da nun

$$Arc\,tang \frac{x}{\sqrt{k^2-x^2}} = Arc\,sin \frac{\frac{x}{\sqrt{k^2-x^2}}}{\sqrt{1+\frac{x^2}{k^2-x^2}}} = Arc\,sin \frac{x}{k}.$$

ist; so ist

$$S = \frac{b\pi x}{k}\sqrt{k^2-x^2} + b\pi k \, Arc\,sin \frac{x}{k},$$

wo $Arc\,sin \frac{x}{k}$ nicht grösser als $\frac{1}{2}\pi$ zu nehmen ist.

Setzt man $\frac{x}{k} = sin\,\varphi$; so wird

$$S = b\pi k \sin\varphi \cos\varphi + b\pi k\varphi = b\pi k(\varphi + \tfrac{1}{2}\sin 2\varphi).$$

Für $x = a$ erhält man, wenn jetzt E die halbe Oberfläche des durch die Umdrehung der Ellipse um die grosse Axe erzeugten elliptischen Sphäroids bezeichnet,

$$E = b^2\pi + \frac{a^2 b\pi}{\sqrt{a^2-b^2}} Arc\,sin \sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}} = b^2\pi + \frac{a^2 b\pi}{\sqrt{a^2-b^2}} Arc\,cos \frac{b}{a}.$$

4. Hyperbolisches Konoid. Nehmen wir die Hauptaxe als Abscissen-, und also auch als Drehungsaxe an; so ist

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$$

die Gleichung der Hyperbel, und folglich

$$\frac{x}{a^2} - \frac{y}{b^2}\cdot\frac{\partial y}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial y}{\partial x} = \frac{b^2 x}{a^2 y},$$

$$1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 = \frac{a^4 y^2 + b^4 x^2}{a^4 y^2};$$

$$y\partial x\sqrt{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2} = \frac{\partial x}{a^2}\sqrt{a^4y^2+b^4x^2} = \frac{b\partial x}{a^2}\sqrt{(a^2+b^2)x^2-a^4},$$

oder, wenn wir $\frac{a^4}{a^2+b^2} = k^2$ setzen,

$$y\partial x\sqrt{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2}=\frac{b\partial x}{k}\sqrt{x^2-k^2},$$

und folglich, wenn man, unter der Voraussetzung, dass x positiv und natürlich grösser als a ist, die Fläche S vom Scheitel des Zweigs der Hyperbel, in welchem die Abscissen positiv sind, an rechnet:

$$S=2\pi\int_a^x y\partial x\sqrt{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2}=\frac{2b\pi}{k}\int_a^x\partial x\sqrt{x^2-k^2}.$$

Also ist nach §. 56.

$$S=\frac{b\pi}{k}\left\{x\sqrt{x^2-k^2}-a\sqrt{a^2-k^2}-k^2\int_a^x\frac{\partial x}{\sqrt{x^2-k^2}}\right\}$$

$$=\frac{b\pi}{a^2}\left\{x\sqrt{(a^2+b^2)x^2-a^4}-a^2b\right\}-b\pi k\int_a^x\frac{\partial x}{\sqrt{x^2-k^2}},$$

und folglich nach §. 54. I.

$$S=\frac{b\pi}{a^2}\left\{x\sqrt{(a^2+b^2)x^2-a^4}-a^2b\right\}-b\pi kl\frac{x+\sqrt{x^2-k^2}}{a+\sqrt{a^2-k^2}}$$

$$=\frac{b\pi}{a^2}\left\{x\sqrt{(a^2+b^2)x^2-a^4}-a^2b\right\}$$

$$-\frac{a^2b\pi}{\sqrt{a^2+b^2}}l\frac{x\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{(a^2+b^2)x^2-a^4}}{a(b+\sqrt{a^2+b^2})}.$$

5. Durch Umdrehung einer Cycloide um die Basis erzeugter Körper. In diesem Falle ist wie in §. 94. 4.

$$\partial x\sqrt{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2}=2r\sin\tfrac{1}{2}\varphi\partial\varphi,$$

und folglich

$$y\partial x\sqrt{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2}$$

$$=2r^2(\sin\tfrac{1}{2}\varphi-\sin\tfrac{1}{2}\varphi\cos\varphi)\partial\varphi=r^2(3\sin\tfrac{1}{2}\varphi-\sin\tfrac{3}{2}\varphi)\partial\varphi.$$

Rechnet man nun die Fläche S von dem Punkte A (D. *Fig.* 4.) an; so ist

$$S=2\pi\int_0^x y\partial x\sqrt{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2}=2r^2\pi\left(3\int_0^\varphi\sin\tfrac{1}{2}\varphi\partial\varphi-\int_0^\varphi\sin\tfrac{3}{2}\varphi\partial\varphi\right).$$

Aber

$$\int_0^\varphi\sin\tfrac{1}{2}\varphi\partial\varphi=2(1-\cos\tfrac{1}{2}\varphi),\quad\int_0^\varphi\sin\tfrac{3}{2}\varphi\partial\varphi=\tfrac{2}{3}(1-\cos\tfrac{3}{2}\varphi).$$

Also

$$S=4r^2\pi(\tfrac{1}{3}\cos\tfrac{3}{2}\varphi-3\cos\tfrac{1}{2}\varphi+\tfrac{8}{3}).$$

Für die Oberfläche des durch die Umdrehung der ganzen Cycloide um die Basis erzeugten Körpers ist $\varphi=2\pi$, und diese Oberfläche folglich $=\frac{64}{3}r^2\pi$.

6. **Durch die Umdrehung einer Cycloide um ihre Axe erzeugter Körper.** Wie in §. 98. 4. ist, für $\pi - \varphi = \theta$,

$$x = r(1 - \cos\theta), \quad y = r(\theta + \sin\theta),$$

und folglich, wie man leicht findet,

$$1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 = \frac{2(1 + \cos\theta)}{\sin\theta^2} = \frac{1}{\sin\frac{1}{2}\theta^2};$$

also

$$y\partial x\sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2} = \frac{r^2(\theta + \sin\theta)\sin\theta\,\partial\theta}{\sin\frac{1}{2}\theta} = 2r^2(\theta + \sin\theta)\cos\tfrac{1}{2}\theta\,\partial\theta$$

$$= 2r^2(\theta\cos\tfrac{1}{2}\theta + \tfrac{1}{2}\sin\tfrac{3}{2}\theta + \tfrac{1}{2}\sin\tfrac{1}{2}\theta)\partial\theta.$$

Rechnet man nun die Fläche S vom Scheitel der Cycloide an; so ist

$$S = 4r^2\pi\left(\int_0^\theta \theta\cos\tfrac{1}{2}\theta\,\partial\theta + \tfrac{1}{2}\int_0^\theta \sin\tfrac{3}{2}\theta\,\partial\theta + \tfrac{1}{2}\int_0^\theta \sin\tfrac{1}{2}\theta\,\partial\theta\right).$$

Aber

$$\int\theta\cos\tfrac{1}{2}\theta\,\partial\theta = \theta\int\cos\tfrac{1}{2}\theta\,\partial\theta - \int\partial\theta\int\cos\tfrac{1}{2}\theta\,\partial\theta$$

$$= 2\theta\sin\tfrac{1}{2}\theta - 2\int\sin\tfrac{1}{2}\theta\,\partial\theta = 2\theta\sin\tfrac{1}{2}\theta + 4\cos\tfrac{1}{2}\theta.$$

Also

$$S = 4r^2\pi(2\theta\sin\tfrac{1}{2}\theta + 3\cos\tfrac{1}{2}\theta - \tfrac{1}{3}\cos\tfrac{3}{2}\theta - \tfrac{8}{3}).$$

Für die Oberfläche des durch die Umdrehung der ganzen Cycloide um ihre Axe erzeugten Körpers ist $\theta = \pi$, und folglich diese Oberfläche $= \frac{4}{3}r^2\pi(6\pi - 8) = \frac{8}{3}r^2\pi(3\pi - 4)$.

Neuntes Kapitel.

Von den bestimmten Integralen.

§. 103.

Lehrsatz. Unter der Voraussetzung, dass die Function X von x zwischen den Gränzen $x = a$ und $x = b$ stetig ist, denke man sich die Differenz $b - a$ in eine gewisse Anzahl, z. B. n, gleicher Theile getheilt, und bezeichne, für $\frac{b-a}{n} = i$, d. i. $b = a + ni$, die den Werthen

$$a, \; a+i, \; a+2i, \; a+3i, \; \ldots \; a+ni$$

von x entsprechenden Werthe von X respective durch

$$X_0, \; X_1, \; X_2, \; X_3, \; \ldots\ldots \; X_n;$$

so ist

$$\int_a^b X\partial x = X_0 i + X_1 i + X_2 i + X_3 i + \ldots + X_n i$$

oder

$$\int_a^b X\partial x = \{X_0 + X_1 + X_2 + X_3 + \ldots + X_n\}i,$$

mit desto grösserer Genauigkeit, je grösser n ist.

Beweis. I. Wir wollen zuerst annehmen, dass die Function X von $x = a$ bis $x = b$ entweder immer zu- oder immer abnimmt, übrigens positiv und negativ seyn kann.

Ist nun zuvörderst $a < b$; so denke man sich

$$X_0,\ X_1,\ X_2,\ X_3,\ \ldots.\ X_n$$

als die den Abscissen

$$a,\ a + i,\ a + 2i,\ a + 3i,\ \ldots\ a + ni$$

entsprechenden rechtwinkligen Ordinaten einer stetigen Curve, und bezeichne den Flächenraum der von dieser Curve, den Ordinaten X_0 und X_n, und dem Theile $a + ni - a = b - a$ der Abscissenaxe begränzten ebenen Figur durch v; so ist nach §. 89.

$$v = \int_a^b X\partial x.$$

Nun ziehe man durch die Endpunkte der Ordinaten

$$X_0,\ X_1,\ X_2,\ X_3,\ \ldots.\ X_{n-1}$$

bis respective zu den nächst folgenden Ordinaten

$$X_1,\ X_2,\ X_3,\ X_4,\ \ldots.\ X_n,$$

und durch die Endpunkte der Ordinaten

$$X_1,\ X_2,\ X_3,\ X_4,\ \ldots.\ X_n$$

bis respective zu den nächst vorhergehenden Ordinaten

$$X_0,\ X_1,\ X_2,\ X_3,\ \ldots.\ X_{n-1}$$

Parallelen mit der Abscissenaxe, und bezeichne die Summe der auf diese Weise entstehenden Rechtecke im ersten Falle durch Σ, im zweiten durch Σ', indem man, was wohl zu beachten ist, den Flächenraum jedes auf der Seite der positiven Ordinaten liegenden Rechtecks als positiv, dagegen den Flächenraum jedes auf der Seite der negativen Ordinaten liegenden Rechtecks als negativ betrachtet; so ist offenbar

$$\Sigma = \{X_0 + X_1 + X_2 + X_3 + \ldots + X_{n-1}\}i$$

und

$$\Sigma' = \{X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + \ldots + X_n\}i.$$

Unter den gemachten Voraussetzungen ist aber, wie leicht erhellen wird, mit Beziehung der obern und untern Zeichen auf einander immer,

$$\Sigma \gtrless v \lessgtr \Sigma',$$

so dass also v immer zwischen Σ und Σ' liegt.

Da nun

$$\Sigma' - \Sigma = (X_n - X_0)\,i = \frac{(X_n - X_0)(b-a)}{n}$$

ist, und

$$\frac{(X_n - X_0)(b-a)}{n},$$

weil der Zähler dieses Bruchs eine constante Grösse ist, der Null beliebig nahe gebracht werden kann, wenn man nur n gross genug nimmt; so können die Grössen Σ und Σ' einander bis zu jedem beliebigen Grade nahe gebracht werden, wenn man nur n gross genug nimmt. Also kann nach dem Vorhergehenden offenbar auch die Grösse Σ der Grösse $v = \int_a^b X\partial x$ bis zu jedem beliebigen Grade nahe gebracht werden, wenn man nur n gross genug nimmt.

Für

$$S = \{X_0 + X_1 + X_2 + X_3 + \ldots + X_n\}\,i$$

ist

$$S - \Sigma = X_n i = \frac{X_n(b-a)}{n},$$

so dass also offenbar auch die Grössen S und Σ einander beliebig nahe gebracht werden können, wenn man nur n gross genug nimmt.

Daher kann nach dem Vorhergehenden auch die Grösse

$$\{X_0 + X_1 + X_2 + X_3 + \ldots + X_n\}\,i$$

dem Integral $\int_a^b X\partial x$ beliebig nahe gebracht werden, wenn man nur n gross genug nimmt, wie bewiesen werden sollte.

Ist ferner $a > b$; so ist nach dem so eben Bewiesenen

$$\int_b^a X\partial x = \left\{X_n + X_{n-1} + X_{n-2} + \ldots + X_1 + X_0\right\}\frac{a-b}{n},$$

mit desto grösserer Genauigkeit, je grösser n ist.

Weil nun aber

$$\left\{X_n + X_{n-1} + X_{n-2} + \ldots + X_1 + X_0\right\}\frac{a-b}{n}$$
$$= -\left\{X_0 + X_1 + X_2 + X_3 + \ldots + X_n\right\}\frac{b-a}{n},$$
$$= -\left\{X_0 + X_1 + X_2 + X_3 + \ldots + X_n\right\}i,$$

und nach §. 3.

$$\int_b^a X\partial x = -\int_a^b X\partial x$$

ist; so ist offenbar auch in diesem Falle

$$\int_a^b X\partial x = \left\{X_0 + X_1 + X_2 + X_3 + \ldots + X_n\right\} i,$$

mit desto grösserer Genauigkeit, je grösser n ist, wie bewiesen werden sollte.

II. Wenn die Voraussetzung, dass die Function X von $x = a$ bis $x = b$ entweder immer zu-, oder immer abnimmt, nicht erfüllt ist, kann man sich das Intervall $b - a$ offenbar immer in mehrere andere Intervalle $\alpha - a$, $\alpha_1 - \alpha$, $\alpha_2 - \alpha_1$, $\ldots \alpha_k - \alpha_{k-1}$, $b - \alpha_k$ getheilt denken, in deren jedem die Function X entweder immer zu- oder immer abnimmt, woraus, weil nach §. 3.

$$\int_a^b X\partial x =$$

$$\int_a^\alpha X\partial x + \int_\alpha^{\alpha_1} X\partial x + \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} X\partial x + \ldots + \int_{\alpha_{k-1}}^{\alpha_k} X\partial x + \int_{\alpha_k}^b X\partial x$$

ist, sich nach I. leicht ergiebt, dass der zu beweisende Satz auch in diesem Falle gilt.

§. 104.

Aufgabe. Den Werth des Integrals

$$\int_0^\infty \frac{x^{m-1}\partial x}{1+x^n}$$

zu bestimmen, unter der Voraussetzung, dass $m-1$ kleiner als n ist.

Auflösung. Wenn λ die ungerade Zahl bezeichnet, welche zunächst kleiner als n ist; so ist nach §. 42.

$$\frac{n}{2}\int \frac{x^{m-1}\partial x}{1+x^n}$$

$$= -\cos\frac{m\pi}{n}\, l\sqrt{1 - 2x\cos\frac{\pi}{n} + x^2} + \sin\frac{m\pi}{n}\, Arc\,tang\frac{x\sin\frac{\pi}{n}}{1-\cos x\frac{\pi}{n}}$$

$$- \cos\frac{3m\pi}{n}\, l\sqrt{1 - 2x\cos\frac{3\pi}{n} + x^2} + \sin\frac{3m\pi}{n}\, Arc\,tang\frac{x\sin\frac{3\pi}{n}}{1-x\cos\frac{3\pi}{n}}$$

$$-\cos\frac{5m\pi}{n}\, l\sqrt{1-2x\cos\frac{5\pi}{n}+x^2}+\sin\frac{5m\pi}{n}\operatorname{Arctang}\frac{x\sin\frac{5\pi}{n}}{1-x\cos\frac{5\pi}{n}}$$

. . . .

$$-\cos\frac{\lambda m\pi}{n}\, l\sqrt{1-2x\cos\frac{\lambda\pi}{n}+x^2}+\sin\frac{\lambda m\pi}{n}\operatorname{Arctang}\frac{x\sin\frac{\lambda\pi}{n}}{1-x\cos\frac{\lambda\pi}{n}},$$

wenn man nur in dem Falle eines ungeraden n der Reihe auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens noch das Glied

$$(-1)^{m-1}\cdot\tfrac{1}{4}l.(1+x)^2$$

beifügt.

Für $x=0$ verschwinden offenbar, n mag gerade oder ungerade seyn, alle Glieder der Reihe auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens.

Weil nun, unter der Voraussetzung, dass x positiv ist,

$$l\sqrt{1-2x\cos\frac{k\pi}{n}+x^2} = lx + l\sqrt{1-\frac{2}{x}\cos\frac{k\pi}{n}+\frac{1}{x^2}},$$

und

$$\tfrac{1}{4}l.(1+x)^2=\tfrac{1}{2}l(1+x)=\tfrac{1}{2}lx+\tfrac{1}{2}l\left(1+\frac{1}{x}\right)$$

ist; so ist für $x=\infty$ offenbar

$$l\sqrt{1-2x\cos\frac{k\pi}{n}+x^2}=lx,\quad \tfrac{1}{4}l.(1+x)^2=\tfrac{1}{2}lx,$$

und folglich die Summe der logarithmischen Theile in obiger Gleichung für $x=\infty$

$$-\left\{\cos\frac{m\pi}{n}+\cos\frac{3m\pi}{n}+\cos\frac{5m\pi}{n}+\ldots+\cos\frac{\lambda m\pi}{n}\right\}lx,$$

oder

$$-\left\{\cos\frac{m\pi}{n}+\cos\frac{3m\pi}{n}+\cos\frac{5m\pi}{n}+\ldots+\cos\frac{\lambda m\pi}{n}\right\}lx+(-1)^{m-1}\cdot\tfrac{1}{2}lx,$$

jenachdem n eine gerade oder eine ungerade Zahl ist.

Setzen wir aber

$$S=\cos\frac{m\pi}{n}+\cos\frac{3m\pi}{n}+\cos\frac{5m\pi}{n}+\ldots+\cos\frac{\lambda m\pi}{n};$$

so ist

$$2S\sin\frac{m\pi}{n}$$

$$=\sin\frac{2m\pi}{n}+\sin\frac{4m\pi}{n}+\sin\frac{6m\pi}{n}+\ldots+\sin\frac{(\lambda-1)m\pi}{n}+\sin\frac{(\lambda+1)m\pi}{n}$$

$$-\sin\frac{2m\pi}{n}-\sin\frac{4m\pi}{n}-\sin\frac{6m\pi}{n}-\ldots-\sin\frac{(\lambda-1)m\pi}{n}.$$

Ist nun n gerade, so ist $\lambda = n - 1$, $\lambda + 1 = n$, also $\sin\frac{(\lambda+1)m\pi}{n} = 0$, und folglich $S = 0$; also

$$-\left\{\cos\frac{m\pi}{n} + \cos\frac{3m\pi}{n} + \cos\frac{5m\pi}{n} + \ldots + \cos\frac{\lambda m\pi}{n}\right\} lx = 0.$$

Ist dagegen n ungerade, so ist $\lambda = n - 2$, $\lambda + 1 = n - 1$, und folglich

$$2S\sin\frac{m\pi}{n} = \sin\left(m\pi - \frac{m\pi}{n}\right) = -\cos m\pi\sin\frac{m\pi}{n} = (-1)^{m-1}\sin\frac{m\pi}{n},$$

d. i. $S = (-1)^{m-1}.\frac{1}{2}$. Also ist in diesem Falle

$$-\left\{\cos\frac{m\pi}{n} + \cos\frac{3m\pi}{n} + \cos\frac{5m\pi}{n} + \ldots + \cos\frac{\lambda m\pi}{n}\right\} lx + (-1)^{m-1}.\tfrac{1}{2}lx$$
$$= -(-1)^{m-1}.\tfrac{1}{2}lx + (-1)^{m-1}.\tfrac{1}{2}lx = 0,$$

und man sieht also, dass, n mag gerade oder ungerade seyn, die Summe der logarithmischen Theile in unserer obigen Hauptgleichung für $x = \infty$ verschwindet.

Weil ferner

$$Arc\tang\frac{x\sin\frac{k\pi}{n}}{1 - x\cos\frac{k\pi}{n}} = Arc\tang\frac{\sin\frac{k\pi}{n}}{\frac{1}{x} - \cos\frac{k\pi}{n}}$$

ist; so ist für $x = \infty$ offenbar

$$Arc\tang\frac{x\sin\frac{k\pi}{n}}{1 - x\cos\frac{k\pi}{n}} = Arc\tang\left(-\tang\frac{k\pi}{n}\right) = \pi - \frac{k\pi}{n},$$

und folglich für $x = \infty$ die Summe der die Kreisbogen enthaltenden Theile in unserer obigen Hauptgleichung, wenn wir von jetzt an der Kürze wegen $\frac{\pi}{n} = \theta$, $\pi = n\theta$ setzen,

$$(\pi - \theta)\sin m\theta + (\pi - 3\theta)\sin 3m\theta + (\pi - 5\theta)\sin 5m\theta + \ldots$$
$$\ldots + (\pi - \lambda\theta)\sin\lambda m\theta$$
$$= \pi\{\sin m\theta + \sin 3m\theta + \sin 5m\theta + \ldots + \sin\lambda m\theta\}$$
$$- \frac{\pi}{n}\{\sin m\theta + 3\sin 3m\theta + 5\sin 5m\theta + \ldots + \lambda\sin\lambda m\theta\}.$$

Weil nun nach dem Obigen

$$\cos m\theta + \cos 3m\theta + \cos 5m\theta + \ldots + \cos\lambda m\theta = \frac{\sin(\lambda+1)m\theta}{2\sin m\theta}$$

ist; so ist, wenn man diese Gleichung in Bezug auf θ als veränderliche Grösse differentiirt,

$$-m\{\sin m\theta+3\sin 3m\theta+5\sin 5m\theta+\ldots+\lambda\sin\lambda m\theta\}$$
$$=\frac{(\lambda+1)m\cos(\lambda+1)m\theta\sin m\theta-m\sin(\lambda+1)m\theta\cos m\theta}{2\sin m\theta^2}$$
$$=\frac{\lambda m\cos(\lambda+1)m\theta}{2\sin m\theta}-\frac{m\sin\lambda m\theta}{2\sin m\theta^2},$$

und folglich

$$\sin m\theta+3\sin 3m\theta+5\sin 5m\theta+\ldots+\lambda\sin\lambda m\theta$$
$$=\frac{\sin\lambda m\theta}{2\sin m\theta^2}-\frac{\lambda\cos(\lambda+1)m\theta}{2\sin m\theta}.$$

Für

$$\Sigma=\sin m\theta+\sin 3m\theta+\sin 5m\theta+\ldots+\sin\lambda m\theta$$

ist ferner

$$2\Sigma\sin m\theta$$
$$=1-\cos 2m\theta-\cos 4m\theta-\ldots-\cos(\lambda-1)m\theta-\cos(\lambda+1)m\theta$$
$$+\cos 2m\theta+\cos 4m\theta+\ldots+\cos(\lambda-1)m\theta$$

und folglich

$$\Sigma=\frac{1-\cos(\lambda+1)m\theta}{2\sin m\theta}:$$

Ist nun n eine gerade Zahl, so ist $\lambda=n-1$, und folglich für $x=\infty$ die Summe der die Kreisbogen enthaltenden Theile in unserer obigen Hauptgleichung

$$=\frac{\pi(1-\cos mn\theta)}{2\sin m\theta}-\frac{\pi}{n}\left\{\frac{\sin m(n-1)\theta}{2\sin m\theta^2}-\frac{(n-1)\cos mn\theta}{2\sin m\theta}\right\}$$
$$=\frac{\pi(1-\cos m\pi)}{2\sin m\theta}-\frac{\pi}{n}\left\{\frac{\sin(m\pi-m\theta)}{2\sin m\theta^2}-\frac{(n-1)\cos m\pi}{2\sin m\theta}\right\}$$
$$=\frac{\pi(1-\cos m\pi)}{2\sin m\theta}-\frac{\pi}{n}\left\{-\frac{\cos m\pi}{2\sin m\theta}-\frac{(n-1)\cos m\pi}{2\sin m\theta}\right\}$$
$$=\frac{\pi(1-\cos m\pi)}{2\sin m\theta}+\frac{\pi\cos m\pi}{2\sin m\theta}=\frac{\pi}{2\sin m\theta}=\frac{\pi}{2\sin\frac{m\pi}{n}}.$$

Ist dagegen n eine ungerade Zahl, so ist $\lambda=n-2$, und folglich für $x=\infty$ die Summe der die Kreisbogen enthaltenden Theile in unserer obigen Hauptgleichung

$$=\frac{\pi\{1-\cos m(n-1)\theta\}}{2\sin m\theta}-\frac{\pi}{n}\left\{\frac{\sin m(n-2)\theta}{2\sin m\theta^2}-\frac{(n-2)\cos m(n-1)\theta}{2\sin m\theta}\right\}$$
$$=\frac{\pi(1-\cos m\pi\cos m\theta)}{2\sin m\theta}-\frac{\pi}{n}\left\{\frac{\sin m(n-1)\theta\cos m\theta}{2\sin m\theta^2}-\frac{(n-1)\cos m(n-1)\theta}{2\sin m\theta}\right\}{}^{*)}$$
$$=\frac{\pi(1-\cos m\pi\cos m\theta)}{2\sin m\theta}-\frac{\pi}{n}\left\{-\frac{\cos m\pi\cos m\theta}{2\sin m\theta}-\frac{(n-1)\cos m\pi\cos m\theta}{2\sin m\theta}\right\}$$
$$=\frac{\pi(1-\cos m\pi\cos m\theta)}{2\sin m\theta}+\frac{\pi\cos m\pi\cos m\theta}{2\sin m\theta}=\frac{\pi}{2\sin m\theta}=\frac{\pi}{2\sin\frac{m\pi}{n}}.$$

---

*) Es ist hierbei $\sin m(n-2)\theta=\sin\{m(n-1)-m\}\theta$ gesetzt worden.

Für $x = \infty$ ist also, n mag gerade oder ungerade seyn, die Summe der die Kreisbogen enthaltenden Theile in unserer obigen Hauptgleichung immer $= \frac{\pi}{2\sin\frac{m\pi}{n}}$, und folglich, wie sich nun aus dem Vorhergehenden unmittelbar ergiebt,

$$\frac{n}{2}\int_0^\infty \frac{x^{m-1}\partial x}{1+x^n} = \frac{\pi}{2\sin\frac{m\pi}{n}},$$

also

$$\int_0^\infty \frac{x^{m-1}\partial x}{1+x^n} = \frac{\pi}{n\sin\frac{m\pi}{n}},$$

das gesuchte Integral demnach hierdurch gefunden.

§. 105.

Aufgabe. Das bestimmte Integral

$$\int_0^1 x^{m-1}(1-x^n)^{\frac{p}{n}-1}\partial x,$$

wo m, n, p positive ganze Zahlen seyn sollen, und $m>0$ angenommen wird, durch ein Product mit unendlich vielen Factoren darzustellen.

Auflösung. Für $1-x^n = X$ ist nach §. 28. III.

$$\int x^{m-1}X^{\frac{p}{n}-1}\partial x = \frac{x^m X^{\frac{p}{n}}}{m} + \frac{m+p}{m}\int x^{m+n-1}X^{\frac{p}{n}-1}\partial x,$$

und folglich

$$\int_0^1 x^{m-1}X^{\frac{p}{n}-1}\partial x = \frac{m+p}{m}\int_0^1 x^{m+n-1}X^{\frac{p}{n}-1}\partial x.$$

Durch wiederholte Anwendung dieser Formel erhält man

$$\int_0^1 x^{m-1}X^{\frac{p}{n}-1}\partial x =$$

$$\frac{m+p}{m}\cdot\frac{m+p+n}{m+n}\cdot\frac{m+p+2n}{m+2n}\cdots\frac{m+p+in}{m+in}\int_0^1 x^{m+(i+1)n-1}X^{\frac{p}{n}-1}\partial x,$$

und ganz eben so, wenn auch k eine positive ganze Zahl bezeichnet, die grösser als Null ist,

$$\int_0^1 x^{k-1}X^{\frac{p}{n}-1}\partial x$$

$$= \frac{k+p}{k}\cdot\frac{k+p+n}{k+n}\cdot\frac{k+p+2n}{k+2n}\cdots\frac{k+p+in}{k+in}\int_0^1 x^{k+(i+1)n-1}X^{\frac{p}{n}-1}\partial x.$$

Setzen wir nun $(i+1)n = \theta$, $x^{m+\theta} = t$; so ist

$$x^{m+\theta-1}\partial x = \frac{1}{m+\theta}\partial t,\quad x^{k+\theta-1}\partial x = \frac{1}{m+\theta}t^{\frac{k-m}{m+\theta}}\partial t,$$

und folglich, wenn wir

$$(1-t^{\frac{n}{m+\theta}})^{\frac{p}{n}-1} = T$$

setzen, da für $x=0$, $x=1$ respective $t=0$, $t=1$ ist,

$$\int_0^1 x^{m+(i+1)n-1}X^{\frac{p}{n}-1}\partial x$$

$$=\int_0^1 x^{m+\theta-1}X^{\frac{p}{n}-1}\partial x = \frac{1}{m+\theta}\int_0^1 T\partial t,$$

$$\int_0^1 x^{k+(i+1)n-1}X^{\frac{p}{n}-1}\partial x$$

$$=\int_0^1 x^{k+\theta-1}X^{\frac{p}{n}-1}\partial x = \frac{1}{m+\theta}\int_0^1 Tt^{\frac{k-m}{m+\theta}}\partial t;$$

also

$$\frac{\int_0^1 x^{m+(i+1)n-1}X^{\frac{p}{n}-1}\partial x}{\int_0^1 x^{k+(i+1)n-1}X^{\frac{p}{n}-1}\partial x} = \frac{\int_0^1 T\partial t}{\int_0^1 Tt^{\frac{k-m}{m+\theta}}\partial t}.$$

Wenn aber i, und folglich θ wächst; so nähert sich die Potenz $t^{\frac{k-m}{m+\theta}}$ immer mehr und mehr der Einheit, und kann derselben beliebig nahe gebracht werden, wenn man nur i gross genug werden lässt. Also nähert sich, wie sehr leicht aus §. 103. erhellet, wenn i wächst, das Integral $\int_0^1 Tt^{\frac{k+m}{m+\theta}}\partial t$ immer mehr und mehr dem Integrale $\int_0^1 T\partial t$, und kann demselben beliebig nahe gebracht werden, wenn man nur i gross genug werden lässt. Folglich nähert sich der Bruch

$$\frac{\int_0^1 x^{m+(i+1)n-1}X^{\frac{p}{n}-1}\partial x}{\int_0^1 x^{k+(i+1)n-1}X^{\frac{p}{n}-1}\partial x},$$

wenn i wächst, der Einheit, und kann derselben beliebig nahe gebracht werden, wenn man nur i gross genug werden lässt.

Weil nun nach dem Obigen

$$\frac{\int_0^1 x^{m-1} X^{\frac{p}{n}-1} \partial x}{\int_0^1 x^{k-1} X^{\frac{p}{n}-1} \partial x}$$

$$= \frac{\frac{m+p}{m} \cdot \frac{m+p+n}{m+n} \cdot \frac{m+p+2n}{m+2n} \cdots \frac{m+p+in}{m+in}}{\frac{k+p}{k} \cdot \frac{k+p+n}{k+n} \cdot \frac{k+p+2n}{k+2n} \cdots \frac{k+p+in}{k+in}} \cdot \frac{\int_0^1 x^{m+(i+1)n-1} X^{\frac{p}{n}-1} \partial x}{\int_0^1 x^{k+(i+1)n-1} X^{\frac{p}{n}-1} \partial x}$$

ist; so ist mit desto grösserer Genauigkeit, je grösser i ist, und mit jedem beliebigen Grade der Genauigkeit, wenn man nur i gross genug nimmt,

$$\frac{\int_0^1 x^{m-1} X^{\frac{p}{n}-1} \partial x}{\int_0^1 x^{k-1} X^{\frac{p}{n}-1} \partial x} = \frac{\frac{m+p}{m} \cdot \frac{m+p+n}{m+n} \cdot \frac{m+p+2n}{m+2n} \cdots \frac{m+p+in}{m+in}}{\frac{k+p}{k} \cdot \frac{k+p+n}{k+n} \cdot \frac{k+p+2n}{k+2n} \cdots \frac{k+p+in}{k+in}}$$

$$= \frac{1}{m} \cdot \frac{k(m+p)}{m+n} \cdot \frac{(k+n)(m+p+n)}{(k+p)(m+2n)} \cdot \frac{(k+2n)(m+p+2n)}{(k+p+n)(m+3n)} \cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots \frac{(k+(i-1)n)(m+p+(i-1)n)}{(k+p+(i-2)n)(m+in)} \cdot \frac{(k+in)(m+p+in)}{(k+p+(i-1)n)(k+p+in)}$$

$$= \frac{1}{m} \cdot \frac{k(m+p)}{m+n} \cdot \frac{(k+n)(m+p+n)}{(k+p)(m+2n)} \cdot \frac{(k+2n)(m+p+2n)}{(k+p+n)(m+3n)} \cdots\cdots$$

$$\cdots \frac{(k+in)(m+p+in)}{(k+p+(i-1)n)(m+p+(i+1)n)} \cdot \frac{m+p+(i+1)n}{k+p+in}.$$

Da sich aber der Bruch

$$\frac{m+p+(i+1)n}{k+p+in} = \frac{\frac{m+p+n}{i}+n}{\frac{k+p}{i}+n},$$

wenn i wächst, dem Bruche $\frac{n}{n}=1$ offenbar immer mehr und mehr nähert, und demselben beliebig nahe gebracht werden kann, wenn man nur i gross genug werden lässt; so ist mit desto grösserer Genauigkeit, je grösser i ist, und mit jedem beliebigen Grade der Genauigkeit, wenn man nur i gross genug nimmt,

$$\frac{\int_0^1 x^{m-1} X^{\frac{p}{n}-1} \partial x}{\int_0^1 x^{k-1} X^{\frac{p}{n}-1} \partial x} = \frac{1}{m} \cdot \frac{k(m+p)}{m+n} \cdot \frac{(k+n)(m+p+n)}{(k+p)(m+2n)} \cdot \ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots \frac{(k+in)(m+p+in)}{(k+p+(i-n)n)(m+p+(i+1)n)},$$

d. h. es ist

$$\frac{\int_0^1 x^{m-1} X^{\frac{p}{n}-1} \partial x}{\int_0^1 x^{k-1} X^{\frac{p}{n}-1} \partial x}$$

$$= \frac{1}{m} \cdot \frac{k(m+p)}{m+n} \cdot \frac{(k+n)(m+p+n)}{(k+p)(m+2n)} \cdot \frac{(k+2n)(m+p+2n)}{(k+p+n)(m+3n)} \ldots\ldots$$

Nach §. 28. IV. ist nun

$$\int x^{n-1} X^{\frac{p}{n}-1} \partial x = -\frac{1}{p} X^{\frac{p}{n}}, \quad \int_0^1 x^{n-1} X^{\frac{p}{n}-1} \partial x = \frac{1}{p}.$$

Also ist, wenn wir im Vorhergehenden $k = n$ setzen,

$$p \int_0^1 x^{m-1} X^{\frac{p}{n}-1} \partial x$$

$$= \frac{1}{m} \cdot \frac{n(m+p)}{m+n} \cdot \frac{2n(m+p+n)}{(p+n)(m+2n)} \cdot \frac{3n(m+p+2n)}{(p+2n)(m+3n)} \ldots\ldots,$$

$$\int_0^1 x^{m-1} X^{\frac{p}{n}-1} \partial x$$

$$= \frac{1}{m} \cdot \frac{n(m+p)}{p(m+n)} \cdot \frac{2n(m+p+n)}{(p+n)(m+2n)} \cdot \frac{3n(m+p+2n)}{(p+2n)(m+3n)} \ldots\ldots$$

§. 106.

Setzt man in der so eben gefundenen Gleichung $p = n - m$; so erhält man

$$\int_0^1 x^{m-1} X^{-\frac{m}{n}} \partial x$$

$$= \frac{1}{m} \cdot \frac{n^2}{n^2 - m^2} \cdot \frac{4n^2}{4n^2 - m^2} \cdot \frac{9n^2}{9n^2 - m^2} \cdot \frac{16n^2}{16n^2 - m^2} \ldots\ldots$$

Für $x X^{-\frac{1}{n}} = x(1 - x^n)^{-\frac{1}{n}} = z$ ist aber

$$\frac{x^n}{1 - x^n} = z^n, \quad x^n = \frac{z^n}{1 + z^n}, \quad x^{n-1} \partial x = \frac{z^{n-1} \partial z}{(1 + z^n)^2},$$

und folglich

$$\frac{\partial x}{x} = \frac{\partial z}{z(1 + z^n)}.$$

Weil nun $x^m X^{-\frac{m}{n}} = z^m$ ist; so ist

$$x^{m-1} X^{-\frac{m}{n}} \partial x = \frac{z^{m-1}\partial z}{1+z^n},$$

und folglich, weil für $x=0$, $x=1$ respective $z=0$, $z=\infty$ ist,

$$\int_0^1 x^{m-1} X^{-\frac{m}{n}} \partial x = \int_0^\infty \frac{z^{m-1}\partial z}{1+z^n}.$$

Nach §. 104. ist aber, unter der Voraussetzung, dass $m-1<n$, d. i. m nicht grösser als n ist,

$$\int_0^\infty \frac{z^{m-1}\partial z}{1+z^n} = \frac{\pi}{n \sin \frac{m\pi}{n}}.$$

Also ist nach dem Vorhergehenden für $m \overline{\overline{<}} n$

$$\frac{\pi}{n \sin \frac{m\pi}{n}} = \frac{1}{m} \cdot \frac{n^2}{n^2-m^2} \cdot \frac{4n^2}{4n^2-m^2} \cdot \frac{9n^2}{9n^2-m^2} \cdot \frac{16n^2}{16n^2-m^2} \cdots\cdots$$

oder

$$1.\ \sin \frac{m\pi}{n} = \frac{m\pi}{n}\left(1-\frac{m^2}{n^2}\right)\left(1-\frac{m^2}{4n^2}\right)\left(1-\frac{m^2}{9n^2}\right)\left(1-\frac{m^2}{16n^2}\right)\cdots\cdot$$

Für $n=2m$ ergiebt sich heraus

$$1 = \tfrac{1}{2}\pi(1-\tfrac{1}{4})(1-\tfrac{1}{16})(1-\tfrac{1}{36})(1-\tfrac{1}{64})(1-\tfrac{1}{100})\cdots\cdots$$
$$= \tfrac{1}{2}\pi \cdot \tfrac{3}{4} \cdot \tfrac{15}{16} \cdot \tfrac{35}{36} \cdot \tfrac{63}{64} \cdot \tfrac{99}{100} \cdots\cdots,$$

und folglich

$$2.\ \tfrac{1}{2}\pi = \tfrac{4}{3} \cdot \tfrac{16}{15} \cdot \tfrac{36}{35} \cdot \tfrac{64}{63} \cdot \tfrac{100}{99} \cdots\cdots$$
$$= \tfrac{2}{1} \cdot \tfrac{2}{3} \cdot \tfrac{4}{3} \cdot \tfrac{4}{5} \cdot \tfrac{6}{5} \cdot \tfrac{6}{7} \cdot \tfrac{8}{7} \cdot \tfrac{8}{9} \cdot \tfrac{10}{9} \cdot \tfrac{10}{11} \cdots\cdots$$

oder

$$3.\ \tfrac{1}{4}\pi = \tfrac{2}{3} \cdot \tfrac{4}{3} \cdot \tfrac{4}{5} \cdot \tfrac{6}{5} \cdot \tfrac{6}{7} \cdot \tfrac{8}{7} \cdot \tfrac{8}{9} \cdot \tfrac{10}{9} \cdot \tfrac{10}{11} \cdot \tfrac{12}{11} \cdots\cdots$$

Dieser merkwürdige Ausdruck für $\frac{1}{4}\pi$ ist von dem berühmten brittischen Geometer Johann Wallis gefunden worden, und wird daher jetzt gewöhnlich noch nach demselben benannt.

Wenn m nicht grösser als n, also $2m$ nicht grösser als $2n$ ist; so ist der absolute Werth von $n-2m$ nicht grösser als $2n$. Weil nun die Gleichung 1. offenbar auch für ein negatives m, dessen absoluter Werth nur nicht grösser als n ist, gilt; so kann man in dieser Gleichung $n-2m$ für m, $2n$ für n setzen. Dadurch erhält man

$$\cos\frac{m\pi}{n} = \frac{(n-2m)\pi}{2n} \cdot \frac{n+2m}{2n} \cdot \frac{3n-2m}{2n} \cdot \frac{3n+2m}{4n} \cdot \frac{5n-2m}{4n} \cdot \frac{5-2m}{6n} \cdots\cdot$$
$$= \tfrac{1}{2}\pi \cdot \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{3}{2} \cdot \tfrac{3}{4} \cdot \tfrac{5}{4} \cdot \tfrac{5}{6} \cdot \tfrac{7}{6} \cdot \tfrac{7}{8} \cdot \tfrac{9}{8} \cdot \tfrac{9}{10} \cdots\cdots$$
$$\times \left(1-\frac{4m^2}{n^2}\right)\left(1-\frac{4m^2}{9n^2}\right)\left(1-\frac{4m^2}{25n^2}\right)\left(1-\frac{4m^2}{49n^2}\right)\cdots,$$

und folglich nach 2.

$$4.\quad \cos\frac{m\pi}{n} = \left(1-\frac{4m^2}{n^2}\right)\left(1-\frac{4m^2}{9n^2}\right)\left(1-\frac{4m^2}{25n^2}\right)\left(1-\frac{4m^2}{47n^2}\right)\ldots$$

für $m \overline{\overline{<}} n$.

Die Formeln 1., 4. und 2. leisten bei der Berechnung der Logarithmen der Sinus und Cosinus und des Logarithmus von π die vortrefflichsten Dienste. Durch Division der Formeln 1. und 4. würde man auch leicht ähnliche Ausdrücke für die Tangenten und Cotangenten entwickeln können.

§. 107.

Ueber die wichtige Function Gamma.

1. Das bestimmte Integral $\int_0^\infty x^{\mu-1}e^{-x}\partial x$ pflegt man, unter der Voraussetzung, dass μ positiv ist, durch $\Gamma(\mu)$ zu bezeichnen, so dass also

$$\int_0^\infty x^{\mu-1}e^{-x}\partial x = \Gamma(\mu)$$

ist.

2. Für $e^{-x} = z$ ist $x = l\frac{1}{z}$, $-e^{-x}\partial x = \partial z$, und folglich

$$x^{\mu-1}e^{-x}\partial x = -\left(l\frac{1}{z}\right)^{\mu-1}\partial z.$$

Weil nun für $x=0$, $x=\infty$ respective $z=1$, $z=0$ ist; so ist

$$\int_0^\infty x^{\mu-1}e^{-x}\partial x = -\int_1^0\left(l\frac{1}{z}\right)^{\mu-1}\partial z = \int_0^1\left(l\frac{1}{x}\right)^{\mu-1}\partial x \quad (\text{§. 3.})$$

und folglich

$$\Gamma(\mu) = \int_0^\infty x^{\mu-1}e^{-x}\partial x = \int_0^1\left(l\frac{1}{x}\right)^{\mu-1}\partial x.$$

3. Unter der Voraussetzung, dass a eine positive Grösse ist, sey $ax = z$; so ist, weil für $x=0$, $x=\infty$ respective $z=0$, $z=\infty$ ist,

$$\int_0^\infty x^{\mu-1}e^{-ax}\partial x = \frac{1}{a^\mu}\int_0^\infty z^{\mu-1}e^{-z}\partial z = \frac{1}{a^\mu}\int_0^\infty x^{\mu-1}e^{-x}\partial x,$$

d. i.

$$\int_0^\infty x^{\mu-1}e^{-ax}\partial x = \frac{\Gamma(\mu)}{a^\mu}.$$

4. Weil $\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-x}\partial x$, und überhaupt $\int e^{-x}\partial x = -e^{-x} + C$ ist; so ist offenbar $\Gamma(1) = 0 - (-1) = 1$.

5. Nach §. 27. ist

$$\int x^{n-1}e^{-x}\partial x = e^{-x}\int x^{n-1}\partial x + \int e^{-x}\partial x\int x^{n-1}\partial x$$
$$= \frac{x^n e^{-x}}{n} + \frac{1}{n}\int x^n e^{-x}\partial x,$$

wobei wir annehmen wollen, dass n eine positive ganze Zahl und nicht $= 0$ ist. Also ist

$$\int x^n e^{-x} \partial x = - x^n e^{-x} + n \int x^{n-1} e^{-x} \partial x .$$

Für $x = 0$ verschwindet das Product $x^n e^{-x}$. Um nun ferner den Werth dieses Products für $x = \infty$ zu bestimmen, setze man $x^n = f(x)$, $e^x = \varphi(x)$; so ist

$$f^{(n)}(x) = 1.2.3 \ldots n, \quad \varphi^{(n)}(x) = e^x,$$

und das in Rede stehende Product verschwindet also nach D. §. 149. für $x = \infty$ ebenfalls. Also ist wegen der obigen Gleichung

$$\int_0^\infty x^n e^{-x} \partial x = n \int_0^\infty x^{n-1} e^{-x} \partial x$$

oder $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n)$, und folglich mittelst wiederholter Anwendung dieser Relation

$$\Gamma(n+1) = n(n-1) \ldots 3.2.1\,\Gamma(1);$$

also nach 4. für jedes positive ganze n, welches > 0 ist,

$$\Gamma(n+1) = 1.2.3.4 \ldots n .$$

Nach 3. ist folglich für jedes positive ganze n, welches > 0 ist,

$$\int_0^\infty x^n e^{-ax} \partial x = \frac{1.2.3.4 \ldots n}{a^{n+1}} .$$

Für $n = 0$ ist, wie leicht erhellet,

$$\int_0^\infty e^{-ax} \partial x = \frac{1}{a} .$$

6. Bevor wir in der Betrachtung der Function Gamma weiter fortschreiten können, müssen wir erst ein Paar allgemeine Sätze vorausschicken, die in der Theorie der bestimmten Integrale überhaupt von Wichtigkeit sind.

Sey nämlich, indem $f(x, y)$ eine beliebige Function der beiden von einander unabhängigen veränderlichen Grössen x und y bezeichnet,

$$\int_a^b f(x, y) \partial x = \varphi(y) ,$$

wo bei der Integration bloss x als veränderlich betrachtet wird; so ist, indem man nun y sich um Δy verändern lässt,

$$\Delta \int_a^b f(x, y) \partial x = \varphi(y + \Delta y) - \varphi(y) .$$

Weil aber

$$\Delta f(x, y) = f(x, y + \Delta y) - f(x, y)$$

ist; so ist

$$\int_a^b \Delta f(x,y).\partial x = \int_a^b f(x, y + \Delta y).\partial x - \int_a^b f(x, y)\partial x$$
$$= \varphi(y + \Delta y) - \varphi(y),$$

indem nämlich, so wie

$$\int_a^b f(x, y)\partial x = \varphi(y)$$

ist, natürlich auch

$$\int_a^b f(x, y + \Delta y).\partial x = \varphi(y + \Delta y)$$

ist.

Also ist

$$\Delta \int_a^b f(x, y)\partial x = \int_a^b \Delta f(x, y).\partial x,$$

und folglich

$$\frac{\Delta}{\Delta y}\int_a^b f(x,y)\,\partial x = \frac{1}{\Delta y}\int_a^b \Delta f(x,y).\partial x = \int_a^b \frac{\Delta f(x,y)}{\Delta y}\,\partial x.$$

Also ist, indem man zu den Gränzen übergeht, jederzeit

$$\frac{\partial}{\partial y}\int_a^b f(x, y).\partial x = \int_a^b \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}\partial x.$$

7. Hieraus lässt sich ohne Schwierigkeit herleiten, dass immer

$$\int_\alpha^\beta \partial y \int_a^b f(x, y)\partial x = \int_a^b \partial x \int_\alpha^\beta f(x, y)\partial y$$

ist.

Sey nämlich überhaupt

$$\int f(x,y)\,\partial x = \varphi(x,y), \quad \int \varphi(x,y)\,\partial y = \psi(x, y);$$

so ist

$$\int_a^b f(x,y)\,\partial x = \varphi(b, y) - \varphi(a, y),$$

und folglich

$$\int_\alpha^\beta \partial y \int_a^b f(x, y)\partial x = \int_\alpha^\beta \varphi(b,y)\,\partial y - \int_\alpha^\beta \varphi(a, y)\,\partial y$$
$$= \psi(b,\beta) - \psi(b,\alpha) - \psi(a,\beta) + \psi(a,\alpha).$$

Nach 6. ist aber

$$\frac{\partial}{\partial x}\int_\alpha^\beta \varphi(x, y)\partial y = \int_\alpha^\beta \frac{\partial \varphi(x,y)}{\partial x}\partial y = \int_\alpha^\beta f(x,y)\,\partial y,$$

und folglich

$$\partial x \int_\alpha^\beta f(x, y)\,\partial y = \partial \int_\alpha^\beta \varphi(x, y)\partial y.$$

Weil nun

$$\int_\alpha^\beta \varphi(x,y)\partial y = \psi(x,\beta) - \psi(x,\alpha)$$

ist; so ist

$$\int_a^b \partial x \int_\alpha^\beta f(x,y)\partial y = \int_a^b \partial\psi(x,\beta) - \int_a^b \partial\psi(x,\alpha)$$
$$= \psi(b,\beta) - \psi(a,\beta) - \psi(b,\alpha) + \psi(a,\alpha).$$

Vergleicht man dies mit dem Obigen; so ergiebt sich auf der Stelle die zu beweisende Gleichung

$$\int_\alpha^\beta \partial y \int_a^b f(x,y)\partial x = \int_a^b \partial x \int_\alpha^\beta f(x,y)\partial y.$$

8. Nach 3. ist nun, unter der Voraussetzung, dass b positiv ist,

$$\int_0^\infty z^{b-1} e^{-(1+x)z}\partial z = \frac{\Gamma(b)}{(1+x)^b}.$$

Also ist

$$\frac{x^{a-1}\partial x}{(1+x)^b} = \frac{\partial x}{\Gamma(b)} \int_0^\infty x^{a-1} z^{b-1} e^{-(1+x)z}\partial z$$

und folglich

$$\int_0^\infty \frac{x^{a-1}\partial x}{(1+x)^b} = \frac{1}{\Gamma(b)} \int_0^\infty \partial x \int_0^\infty x^{a-1} z^{b-1} e^{-(1+x)z}\partial z;$$

also nach 7.

$$\int_0^\infty \frac{x^{a-1}\partial x}{(1+x)^b} = \frac{1}{\Gamma(b)} \int_0^\infty \partial z \int_0^\infty x^{a-1} z^{b-1} e^{-(1+x)z}\partial x.$$

Nehmen wir nun aber a als positiv an; so ist nach 3.

$$\int_0^\infty x^{a-1} z^{b-1} e^{-(1+x)z}\partial x = z^{b-1} e^{-z} \int_0^\infty x^{a-1} e^{-zx}\partial x$$
$$= z^{b-a-1} e^{-z}\Gamma(a),$$

und folglich nach dem Vorhergehenden, unter der Voraussetzung, dass auch $b - a$ positiv ist,

$$\int_0^\infty \frac{x^{a-1}\partial x}{(1+x)^b} = \frac{\Gamma(a)}{\Gamma(b)} \int_0^\infty z^{b-a-1} e^{-z}\partial z = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b-a)}{\Gamma(b)}.$$

Für $b = 1$ ist folglich nach 4.

$$\int_0^\infty \frac{x^{a-1}\partial x}{1+x} = \Gamma(a)\Gamma(1-a),$$

und also für $a = \frac{1}{2}$

$$\{\Gamma(\tfrac{1}{2})\}^2 = \int_0^\infty \frac{x^{-\frac{1}{2}}\partial x}{1+x}.$$

Setzen wir nun $x^{\frac{1}{2}} = u$; so ist

$$\frac{x^{-\frac{1}{2}}\partial x}{1+x} = \frac{2\partial u}{1+u^2}.$$

Also ist, weil für $x=0$, $x=\infty$ respective $u=0$, $u=\infty$ ist,

$$\int_0^\infty \frac{x^{-\frac{1}{2}}\partial x}{1+x} = 2\int_0^\infty \frac{\partial u}{1+u^2}.$$

Nach §. 104. ist aber

$$\int_0^\infty \frac{\partial u}{1+u^2} = \frac{\pi}{2\sin\frac{1}{2}\pi} = \tfrac{1}{2}\pi.$$

Also ist

$$\int_0^\infty \frac{x^{-\frac{1}{2}}\partial x}{1+x} = \pi,$$

und folglich nach dem Vorhergehenden

$$\{\Gamma(\tfrac{1}{2})\}^2 = \pi,\quad \Gamma(\tfrac{1}{2}) = \sqrt{\pi}.$$

Nun ist aber

$$\Gamma(\tfrac{1}{2}) = \int_0^\infty x^{-\frac{1}{2}} e^{-x}\partial x.$$

Also ist, wenn wir $x^{\frac{1}{2}} = t$ setzen,

$$\Gamma(\tfrac{1}{2}) = 2\int_0^\infty e^{-t^2}\partial t,$$

und folglich nach dem Vorhergehenden

$$\int_0^\infty e^{-t^2}\partial t = \tfrac{1}{2}\sqrt{\pi}.$$

Nach §. 3. ist

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\partial t = \int_{-\infty}^{0} e^{-t^2}\partial t + \int_0^\infty e^{-t^2}\partial t.$$

Setzen wir nun $t = -s$; so ist offenbar

$$\int_{-\infty}^{0} e^{-t^2}\partial t = -\int_{\infty}^{0} e^{-s^2}\partial s = -\int_{\infty}^{0} e^{-t^2}\partial t,$$

und folglich

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\partial t = \int_0^\infty e^{-t^2}\partial t - \int_\infty^0 e^{-t^2}\partial t$$

$$= \int_0^\infty e^{-t^2}\partial t + \int_0^\infty e^{-t^2}\partial t = 2\int_0^\infty e^{-t^2}\partial t.$$

Also ist

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\partial t = \sqrt{\pi}.$$

Die zuletzt entwickelten bestimmten Integrale kommen bei mehrern wichtigen Anwendungen des höhern Calculs auf die Naturlehre vor.

§. 108.

Aufgabe. Den Werth des bestimmten Integrals $\int_a^b y\partial x$, wo a kleiner oder grösser als b seyn kann,

und y eine zwischen den Gränzen $x=a$ und $x=b$ stetige Function von x seyn soll), näherungsweise zu berechnen.

Auflösung. Man denke sich, indem wir für's Erste $a<b$ annehmen wollen, die Function y auf bekannte Weise zwischen den Gränzen $x=a$ und $x=b$ durch eine auf ein rechtwinkliges Coordinatensystem bezogene Curve dargestellt, und bezeichne den Flächenraum der von dem Theile $b-a$ der Abscissenaxe, von den, den Abscissen $x=a$ und $x=b$ entsprechenden Ordinaten, und dem zwischen den Endpunkten dieser Ordinaten liegenden Bogen der in Rede stehenden Curve begränzten ebenen Figur durch v; so ist nach §. 89.

$$v=\int_a^b y\partial x,$$

und man wird also den Werth des gegebenen bestimmten Integrals näherungsweise berechnen können, wenn man den Flächenraum v näherungsweise berechnen kann.

Zu dem Ende theile man den Theil $b-a$ der Abscissenaxe in $2n$ gleiche Theile, deren jeder $=i$ ist, und bezeichne die den Werthen

$$a,\ a+i,\ a+2i,\ \ldots\ a+(2n-1)i,\ b$$

von x entsprechenden Werthe von y durch

$$A,\ A_1,\ A_2,\ A_3,\ \ldots\ A_{2n-1},\ A_{2n};$$

so ist, wie, wenn man sich nur die Endpunkte der Ordinaten

$$A,\ A_2;\ A_2,\ A_4;\ A_4,\ A_6;\ \ldots;\ A_{2n-2},\ A_{2n}$$

durch gerade Linien verbunden denkt, leicht erhellen wird, näherungsweise, und zwar mit desto grösserer Genauigkeit, je grösser n ist,

$$v=(A+A_2)i+(A_2+A_4)i+(A_4+A_6)i+\ldots+(A_{2n-2}+A_{2n})i.$$

Einen höhern Grad der Annäherung wird man aber offenbar erreichen, wenn man auch noch die über den, die Endpunkte der Ordinaten

$$A,\ A_2;\ A_2,\ A_4;\ A_4,\ A_6;\ \ldots;\ A_{2n-2},\ A_{2n}$$

verbindenden Sehnen der Curve liegenden Segmente derselben berücksichtigt.

Jedes solches Segment wie KK_1K_2 in *Fig.* 3. kann man, wenn nur n ziemlich gross ist, näherungsweise als das Segment einer Parabel betrachten, von welcher KK_2 eine Sehne, K_1L_1 ein Durchmesser ist. Bezeichnen wir nun den Parameter dieses Diameters durch p', die Abscissen in Bezug auf diesen Diameter als Abscissenaxe durch x', die Ordinaten durch y'; so ist nach der Theorie der Kegelschnitte $y'^2=p'x'$ die Gleichung der Parabel. Ist aber $KK_1K_2=s$, $K_1M=m$, $K_2M=n$, der Coordinatenwinkel $=\alpha$; so ist nach §. 89.

$$s = 2\sin\alpha\int_0^m y\,\partial x = 2\sin\alpha\sqrt{p}\cdot\int_0^m \partial x\sqrt{x}$$

$$= \tfrac{4}{3}m\sin\alpha\sqrt{pm} = \tfrac{4}{3}mn\sin\alpha = \tfrac{4}{3}mt.$$

Hieraus wird nun leicht erhellen, dass mit einem höhern Grade der Annäherung wie vorher in völliger Allgemeinheit

$$\begin{aligned} v = {} & (A + A_2)i + \tfrac{4}{3}\{A_1 - \tfrac{1}{2}(A + A_2)\}i \\ & + (A_2 + A_4)i + \tfrac{4}{3}\{A_3 - \tfrac{1}{2}(A_2 + A_4)\}i \\ & + (A_4 + A_6)i + \tfrac{4}{3}\{A_5 - \tfrac{1}{2}(A_4 + A_6)\}i \\ & + (A_6 + A_8)i + \tfrac{4}{3}\{A_7 - \tfrac{1}{2}(A_6 + A_8)\}i \\ & \quad \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ & + (A_{2n-2} + A_{2n})i + \tfrac{4}{3}\{A_{2n-1} - \tfrac{1}{2}(A_{2n-2} + A_{2n})\}i, \end{aligned}$$

$$= \{\tfrac{1}{3}A + \tfrac{4}{3}A_1 + \tfrac{2}{3}A_2 + \tfrac{4}{3}A_3 + \tfrac{2}{3}A_4 + \ldots + \tfrac{2}{3}A_{2n-2} + \tfrac{4}{3}A_{2n-1} + \tfrac{1}{3}A_{2n}\}i$$

oder

$$\int_a^b y\,\partial x = \left\{\begin{matrix} \tfrac{1}{3}A + \tfrac{4}{3}A_1 + \tfrac{2}{3}A_2 + \tfrac{4}{3}A_3 + \tfrac{2}{3}A_4 + \ldots\ldots \\ \ldots\ldots + \tfrac{2}{3}A_{2n-2} + \tfrac{4}{3}A_{2n-1} + \tfrac{1}{3}A_{2n} \end{matrix}\right\}\frac{b-a}{2n}$$

ist, wo nun, wie leicht erhellen wird, auch $a > b$ seyn kann.

Man kann die vorhergehende Formel auch unter der Form

$$\int_a^b y\,\partial x = \left\{\begin{matrix} A + A_{2n} + 2(A_2 + A_4 + A_6 + \ldots\ldots + A_{2n-2}) \\ + 4(A_1 + A_3 + A_5 + \ldots\ldots + A_{2n-1}) \end{matrix}\right\}\frac{b-a}{6n}$$

schreiben, und diese Formel wird jederzeit eine desto grössere Genauigkeit gewähren, je grösser man n annimmt.

Die Entwickelung anderer Näherungsmethoden würde uns hier zu weit führen.

Zehntes Kapitel.

Integration der höhern Differentiale.

§. 109.

In §. 10. ist schon gezeigt worden, dass für jedes n

$$\int^n X\partial x^n = \int\partial x\int\partial x\int\partial x\int\partial x\ldots\int\partial x\int X\partial x,$$

wo die Anzahl der Integralzeichen auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens n ist, gesetzt werden kann. Hier bemerken wir nur noch, dass bei jeder der n Integrationen, welche der Ausdruck auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens vorschreibt, eine willkührliche Constante eingeführt werden muss, und dass also das Integral

$$\int^n X \partial x^n$$

jederzeit n willkührliche Constanten enthalten wird.

So ist z. B.

$$\int^4 x^2 \partial x^4 = \int \partial x \int \partial x \int \partial x \int x^2 \partial x.$$

Aber

$$\int x^2 \partial x = \frac{x^3}{3} + C,$$

und folglich

$$\int \partial x \int x^2 \partial x = \frac{x^4}{3.4} + Cx + C'.$$

Also ist ferner

$$\int \partial x \int \partial x \int x^2 \partial x = \frac{x^5}{3.4.5} + \tfrac{1}{2} Cx^2 + C'x + C'',$$

und folglich endlich

$$\int^4 x^2 \partial x^4 = \frac{x^6}{3.4.5.6} + \frac{1}{2.3} Cx^3 + \tfrac{1}{2} C'x^2 + C''x + C''',$$

so dass also das gesuchte Integral vier willkührliche Constanten enthält, wie es seyn muss.

§. 110.

Man kann aber mittelst der in §. 27. bewiesenen allgemeinen Reductionsformel das Integral

$$\int^n X \partial x^n$$

noch auf eine andere merkwürdige Art entwickeln.

1. Nach §. 10. ist

$$\int^2 X \partial x^2 = \int \partial x \int X \partial x,$$

und folglich nach §. 27., wie leicht erhellen wird,

$$\int^2 X \partial x^2 = \tfrac{1}{1} \{ x \int X \partial x - \int X x \partial x \}.$$

2. Nach §. 10. und 1. ist

$$\begin{aligned} \int^3 X \partial x^3 &= \int \partial x \int^2 X \partial x^2 \\ &= \tfrac{1}{1} \{ \int x \partial x \int X \partial x - \int \partial x \int X x \partial x \}. \end{aligned}$$

Nach §. 27. ist aber

$$\begin{aligned} \int x \partial x \int X \partial x &= \tfrac{1}{2} x^2 \int X \partial x - \tfrac{1}{2} \int X x^2 \partial x, \\ \int \partial x \int X x \partial x &= x \int X x \partial x - \int X x^2 \partial x. \end{aligned}$$

Also ist, wie man nach gehöriger Substitution leicht findet,

$$\int^3 X \partial x^3 = \frac{1}{1.2} \{ x^2 \int X \partial x - 2x \int X x \partial x + \int X x^2 \partial x \}.$$

3. Nach §. 10. und 2. ist

$$\int^4 X\partial x^4 = \int \partial x \int^3 X\partial x^3$$

$$= \frac{1}{1.2}\{\int x^2\partial x\int X\partial x - 2\int x\partial x\int Xx\partial x + \int\partial x\int Xx^2\partial x\}.$$

Nach §. 27. ist aber

$$\int x^2\partial x\int X\partial x = \tfrac{1}{3}x^3\int X\partial x - \tfrac{1}{3}\int Xx^3\partial x,$$

$$\int x\partial x\int Xx\partial x = \tfrac{1}{2}x^2\int Xx\partial x - \tfrac{1}{2}\int Xx^3\partial x,$$

$$\int\partial x\int Xx^2\partial x = x\int Xx^2\partial x - \int Xx^3\partial x,$$

und folglich, wie man nach gehöriger Substitution leicht findet,

$$\int^4 X\partial x^4 = \frac{1}{1.2.3}\{x^3\int X\partial x - 3x^2\int Xx\partial x + 3x\int Xx^2\partial x - \int Xx^3\partial x\}.$$

4. Wie man auf diese Art weiter gehen kann, unterliegt keinem Zweifel, und auch das allgemeine Gesetz, welchem diese Ausdrücke unterworfen sind, fällt sogleich in die Augen. Es ist nämlich, wenn wir die Binomial-Coefficienten wie gewöhnlich bezeichnen:

$$\int^n X\partial x^n = \frac{1}{1\ldots(n-1)}\left\{\begin{array}{l} x^{n-1}\int X\partial x - (n-1)_1 x^{n-2}\int Xx\partial x \\ + (n-1)_2 x^{n-3}\int Xx^2\partial x \\ - (n-1)_3 x^{n-4}\int Xx^3\partial x \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ \pm (n-1)_{n-1}\int Xx^{n-1}\partial x \end{array}\right\}.$$

Um dieses Gesetz allgemein zu beweisen, nehmen wir an, dass es für

$$\int^n X\partial x^n$$

richtig ist, und zeigen, dass es unter dieser Voraussetzung auch für

$$\int^{n+1} X\partial x^{n+1}$$

richtig seyn muss.

Nach §. 10. und der Voraussetzung, von welcher wir ausgehen, ist

$$\int^{n+1} X\partial x^{n+1} = \int\partial x\int^n X\partial x^n$$

$$= \frac{1}{1\ldots(n-1)}\left\{\begin{array}{l} \int x^{n-1}\partial x\int X\partial x - (n-1)_1.\int x^{n-2}\partial x\int Xx\partial x \\ + (n-1)_2.\int x^{n-3}\partial x\int Xx^2\partial x \\ - (n-1)_3.\int x^{n-4}\partial x\int Xx^3\partial x \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ \pm (n-1)_{n-1}.\int\partial x\int Xx^{n-1}\partial x \end{array}\right\}.$$

Nach §. 27. ist aber, wie leicht erhellet,

$$\int x^{n-1}\partial x\int X\partial x = \frac{1}{n}x^n\int X\partial x - \frac{1}{n}\int Xx^n\partial x,$$

$$\int x^{n-2}\partial x\int Xx\,\partial x = \frac{1}{n-1}x^{n-1}\int Xx\,\partial x - \frac{1}{n-1}\int Xx^n\partial x,$$

$$\int x^{n-3}\partial x\int Xx^2\partial x = \frac{1}{n-2}x^{n-2}\int Xx^2\partial x - \frac{1}{n-2}\int Xx^n\partial x,$$

$$\int x^{n-4}\partial x\int Xx^3\partial x = \frac{1}{n-3}x^{n-3}\int Xx^3\partial x - \frac{1}{n-3}\int Xx^n\partial x,$$

u. s. w.

$$\int\partial x\int Xx^{n-1}\partial x = \tfrac{1}{1}x\int Xx^{n-1}\partial x - \tfrac{1}{1}\int Xx^n\partial x.$$

Ueberlegt man nun, dass

$$\frac{1}{n} = \frac{1}{n},\quad \frac{(n-1)_1}{n-1} = \frac{n_1}{n},\quad \frac{(n-1)_2}{n-2} = \frac{n_2}{n},\quad \frac{(n-1)_3}{n-3} = \frac{n_3}{n},\ \ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots\ \frac{(n-1)_{n-1}}{1} = \frac{n_{n-1}}{n}$$

und

$$-\frac{1}{n} + \frac{(n-1)_1}{n-1} - \frac{(n-1)_2}{n-2} + \frac{(n-1)_3}{n-3} - \ldots \mp \frac{(n-1)_{n-1}}{1}$$

$$= -\frac{1}{n} + \frac{n_1}{n} - \frac{n_2}{n} + \frac{n_3}{n} - \ldots \mp \frac{n_{n-1}}{n}$$

$$= -\frac{1}{n} + \frac{n_1}{n} - \frac{n_2}{n} + \frac{n_3}{n} - \ldots \mp \frac{n_{n-1}}{n} \pm \frac{n_n}{n} \mp \frac{n_n}{n}$$

$$= -\frac{1}{n}\{1 - n_1 + n_2 - n_3 + \ldots \pm n_{n-1} \mp n_n\} \mp \frac{n_n}{n}$$

$$= -\frac{1}{n}(1-1)^n \mp \frac{n_n}{n} = \mp\frac{n_n}{n}$$

ist; so wird man sich leicht überzeugen, dass

$$\overset{n+1}{\int} X\partial x^{n+1} = \frac{1}{1\ldots n}\left\{\begin{aligned} & x^n\int X\partial x - n_1x^{n-1}\int Xx\,\partial x \\ & + n_2x^{n-2}\int Xx^2\partial x \\ & - n_3x^{n-3}\int Xx^3\partial x \\ & \ldots\ldots\ldots \\ & \pm n_{n-1}x\int Xx^{n-1}\partial x \\ & \mp n_n\int Xx^n\partial x \end{aligned}\right\}$$

ist, und dass also das bemerkte Gesetz für

$$\overset{n+1}{\int} X\partial x^{n+1}$$

gilt, wenn es für

$$\overset{n}{\int} X\partial x^n$$

richtig ist, woraus nach einer bekannten Schlussweise folgt, dass das in Rede stehende Gesetz allgemein gültig ist.

Mit jedem der in dem für $\int X\partial x^n$ gefundenen Ausdrücke enthaltenen n Integrale muss eine willkührliche Constante eingeführt werden.

Eilftes Kapitel.

Integration der vollständigen Differentiale mit mehrern veränderlichen Grössen.

§. 111.

Ein Differential mit zwei veränderlichen Grössen hat im Allgemeinen die Form

$$P\partial x + Q\partial y,$$

wo P und Q Functionen von x und y sind.

Soll nun dieses Differential wirklich durch Differentiation einer Function u der beiden veränderlichen Grössen x, y entstanden gedacht werden können, so dass

$$\partial u = P\partial x + Q\partial y$$

ist; so muss nach bekannten Sätzen der Differentialrechnung

$$P = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right), \quad Q = \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right),$$

wenn wir die partiellen Differentialquotienten durch Einschliessung in Parenthesen bezeichnen, und folglich

$$\left(\frac{\partial P}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}, \quad \left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y},$$

d. i., weil bekanntlich immer

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$$

ist,

$$\left(\frac{\partial P}{\partial y}\right) = \left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right)$$

seyn.

Diese Bedingungsgleichung muss also erfüllt seyn, wenn sich in der That eine endliche völlig bestimmte Function u von x, y angeben lassen soll, die das Integral von

$$P\partial x + Q\partial y$$

ist, und durch deren Differentiation also diese Grösse erhalten wird.

Ist die obige Bedingungsgleichung erfüllt; so heisst

$$P\partial x + Q\partial y$$

ein vollständiges Differential zweier veränderlicher Grössen, und unter der Voraussetzung, dass

$$P\partial x + Q\partial y$$

ein vollständiges Differential zweier veränderlicher Grössen ist, wollen wir nun sein Integral u zu finden suchen.

Nach dem Obigen ist

$$P = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) \text{ oder } \partial_x u = P\partial x,$$

und folglich

$$u = \int P\partial x + Y,$$

wo bei der Entwickelung von $\int P\partial x$ bloss x als veränderlich zu betrachten ist, und Y eine willkührliche Function von y bezeichnet, die aber hier durch die Bedingung bestimmt wird, dass

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) = Q$$

ist.

Differentiirt man nämlich den Ausdruck

$$u = \int P\partial x + Y$$

nach y, und setzt den erhaltenen partiellen Differentialquotienten der Grösse Q gleich; so ergiebt sich die Gleichung

$$\left(\frac{\partial \int P\partial x}{\partial y}\right) + \frac{\partial Y}{\partial y} = Q,$$

aus der dann ferner

$$Y = \int \left\{ Q - \left(\frac{\partial \int P\partial x}{\partial y}\right) \right\} \partial y,$$

nach dem Obigen also

$$u = \int P\partial x + \int \left\{ Q - \left(\frac{\partial \int P\partial x}{\partial y}\right) \right\} \partial y$$

folgt, wodurch nun u vollständig bestimmt ist, weil, was besonders zu bemerken ist,

$$Q - \left(\frac{\partial \int P\partial x}{\partial y}\right)$$

eine blosse Function von y ist, wie auf folgende Art leicht gezeigt werden kann.

Setzen wir der Kürze wegen

$$V = Q - \left(\frac{\partial \int P\partial x}{\partial y}\right),$$

und differentiiren diese Grösse nach x; so erhalten wir

$$\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right) = \left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right) - \frac{\partial^2 \int P\partial x}{\partial x\,\partial y},$$

oder, weil bekanntlich

$$\frac{\partial^2 \int P\partial x}{\partial x\partial y} = \frac{\partial^2 \int P\partial x}{\partial y\partial x} = \left(\frac{\partial P}{\partial y}\right)$$

ist,

$$\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right) = \left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right) - \left(\frac{\partial P}{\partial y}\right).$$

Weil nun aber die Bedingungsgleichung

$$\left(\frac{\partial P}{\partial y}\right) = \left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right)$$

als erfüllt vorausgesetzt wird; so ist

$$\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right) = 0,$$

und die Grösse V folglich von x unabhängig, wie behauptet wurde.

Auf der Stelle überzeugt man sich endlich, dass auch

$$u = \int Q\partial y + \int \left\{P - \left(\frac{\partial \int Q\partial y}{\partial x}\right)\right\} \partial x$$

gesetzt werden kann.

§. 112.

Um das Vorhergehende auf ein Paar Beispiele anzuwenden; so sey zuvörderst das Differential

$$\partial u = \frac{y\partial x - x\partial y}{x^2 + y^2}$$

gegeben, und folglich

$$P = \frac{y}{x^2 + y^2}, \quad Q = -\frac{x}{x^2 + y^2}.$$

Weil

$$\left(\frac{\partial P}{\partial y}\right) = \left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right) = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

ist; so ist das gegebene Differential ein vollständiges Differential zweier veränderlicher Grössen, und ist also nach dem Vorhergehenden integrirbar.

Weil nun

$$\int P\partial x = \int \frac{y\partial x}{x^2 + y^2} = \int \frac{\partial\left(\frac{x}{y}\right)}{1 + \left(\frac{x}{y}\right)^2} = Arc\,tang\,\frac{x}{y},$$

und folglich

$$\left(\frac{\partial \int P\partial x}{\partial y}\right) = -\frac{x}{x^2 + y^2}, \quad Q - \left(\frac{\partial \int P\partial x}{\partial y}\right) = 0$$

ist; so ist nach §. 111.

$$u = Arctang\frac{x}{y} + C,$$

wo C eine ganz willkührliche Constante bezeichnet.

Ist ferner

$$\partial u = \frac{a(x\partial x + y\partial y)}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{y\partial x - x\partial y}{x^2+y^2} + 3by^2\partial y$$

gegeben; so ist

$$P = \frac{ax}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{y}{x^2+y^2},\quad Q = \frac{ay}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{x}{x^2+y^2} + 3by^2,$$

und folglich

$$\left(\frac{\partial P}{\partial y}\right) = \left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right) = -\frac{axy}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2},$$

das gegebene Differential also ein vollständiges Differential zweier veränderlicher Grössen.

Weil nun

$$\int P\partial x = a\int\frac{x\partial x}{\sqrt{x^2+y^2}} + \int\frac{y\partial x}{x^2+y^2} = a\sqrt{x^2+y^2} + Arctang\frac{x}{y},$$

und folglich

$$\left(\frac{\partial\int P\partial x}{\partial y}\right) = \frac{ay}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{x}{x^2+y^2},\quad Q - \left(\frac{\partial\int P\partial x}{\partial y}\right) = 3by^2,$$

also

$$\int\left\{Q - \left(\frac{\partial\int P\partial x}{\partial y}\right)\right\}\partial y = by^3$$

ist; so ist nach §. 111.

$$u = a\sqrt{x^2+y^2} + Arctang\frac{x}{y} + by^3 + C.$$

Aus diesen Beispielen wird schon deutlich genug erhellen, wie man sich in jedem andern Falle zu verhalten hat.

§. 113.

Die allgemeine Form eines Differentials mit drei veränderlichen Grössen ist

$$P\partial x + Q\partial y + R\partial z,$$

wo P, Q und R Functionen von x, y, z sind. Kann nun diese Grösse durch wirkliche Differentiation einer gewissen Function u entstanden gedacht werden, und ist also ein sogenanntes vollständiges Differential dreier veränderlicher Grössen; so ist bekanntlich

$$P = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right),\quad Q = \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right),\quad R = \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right),$$

und folglich, weil

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} = \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial x}$$

ist,

$$\left(\frac{\partial P}{\partial y}\right) = \left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right), \quad \left(\frac{\partial Q}{\partial z}\right) = \left(\frac{\partial R}{\partial y}\right), \quad \left(\frac{\partial R}{\partial x}\right) = \left(\frac{\partial P}{\partial z}\right).$$

Diese Bedingungen als erfüllt vorausgesetzt, wollen wir nun das Integral des Differentials

$$\partial u = P\partial x + Q\partial y + R\partial z$$

zu entwickeln suchen.

Weil nach der Voraussetzung

$$\left(\frac{\partial P}{\partial y}\right) = \left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right)$$

ist; so ist

$$P\partial x + Q\partial y$$

das vollständige Differential von u, wenn man bloss x und y als veränderlich betrachtet, und folglich

$$u = \int(P\partial x + Q\partial y) + Z,$$

wo Z eine willkührliche Function von z bezeichnet, und $\int(P\partial x + Q\partial y)$ nach §. 111. gefunden werden kann, indem man bloss x und y als veränderlich betrachtet.

Differentiirt man nun vorstehende Gleichung nach z; so erhält man

$$\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right) = \left(\frac{\partial \int(P\partial x + Q\partial y)}{\partial z}\right) + \frac{\partial Z}{\partial z},$$

d. i., weil

$$\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right) = R$$

ist,

$$R = \left(\frac{\partial \int(P\partial x + Q\partial y)}{\partial z}\right) + \frac{\partial Z}{\partial z},$$

und folglich

$$Z = \int\left\{R - \left(\frac{\partial \int(P\partial x + Q\partial y)}{\partial z}\right)\right\}\partial z,$$

wo man nun vorzüglich zu bemerken hat, dass

$$R - \left(\frac{\partial \int(P\partial x + Q\partial y)}{\partial z}\right)$$

jederzeit eine blosse Function von z ist, wie auf folgende Art leicht gezeigt werden kann.

Setzen wir nämlich der Kürze wegen

$$V = R - \left(\frac{\partial \int(P\partial x + Q\partial y)}{\partial z}\right);$$

so ist

$$\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right) = \left(\frac{\partial R}{\partial x}\right) - \frac{\partial^2 \int (P\partial x + Q\partial y)}{\partial x\,\partial z},$$

$$\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right) = \left(\frac{\partial R}{\partial y}\right) - \frac{\partial^2 \int (P\partial x + Q\partial y)}{\partial y\,\partial z},$$

oder

$$\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right) = \left(\frac{\partial R}{\partial x}\right) - \frac{\partial^2 \int (P\partial x + Q\partial y)}{\partial z\,\partial x},$$

$$\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right) = \left(\frac{\partial R}{\partial y}\right) - \frac{\partial^2 \int (P\partial x + Q\partial y)}{\partial z\,\partial y}.$$

Aber

$$\left(\frac{\partial \int (P\partial x + Q\partial y)}{\partial x}\right) = P, \quad \left(\frac{\partial \int (P\partial x + Q\partial y)}{\partial y}\right) = Q,$$

und folglich

$$\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right) = \left(\frac{\partial R}{\partial x}\right) - \left(\frac{\partial P}{\partial z}\right), \quad \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right) = \left(\frac{\partial R}{\partial y}\right) - \left(\frac{\partial Q}{\partial z}\right),$$

d. i., weil nach der Voraussetzung

$$\left(\frac{\partial R}{\partial x}\right) = \left(\frac{\partial P}{\partial z}\right), \quad \left(\frac{\partial R}{\partial y}\right) = \left(\frac{\partial Q}{\partial z}\right)$$

ist,

$$\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right) = 0, \quad \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right) = 0,$$

so dass also V von x und y ganz unabhängig, und folglich bloss eine Function von z ist, wie behauptet wurde.

Es kann also u mittelst der aus dem Obigen sich ergebenden Formel

$$u = \int (P\partial x + Q\partial y) + \int \left\{ R - \left(\frac{\partial \int (P\partial x + Q\partial y)}{\partial z}\right)\right\} \partial z$$

immer gefunden werden, und aus dem Vorhergehenden wird auch ersichtlich seyn, wie man sich bei der Integration der vollständigen Differentiale mit mehr als drei veränderlichen Grössen zu verhalten hat.

§. 114.

Um das Vorhergehende auf ein Beispiel anzuwenden, sey

$$\partial u = \frac{x\partial x + y\partial y + z\partial z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} + \frac{z\partial x - x\partial z}{x^2 + z^2} + z\partial z$$

das gegebene Differential, und folglich

$$P = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} + \frac{z}{x^2+z^2},$$

$$Q = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \quad R = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} - \frac{x}{x^2+z^2} + z.$$

Weil

$$\left(\frac{\partial P}{\partial y}\right) = \left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right) = - \frac{xy}{(x^2+y^2+z^2)\sqrt{x^2+y^2+z^2}},$$

$$\left(\frac{\partial Q}{\partial z}\right) = \left(\frac{\partial R}{\partial y}\right) = - \frac{yz}{(x^2+y^2+z^2)\sqrt{x^2+y^2+z^2}},$$

$$\left(\frac{\partial R}{\partial x}\right) = \left(\frac{\partial P}{\partial z}\right) = - \frac{xz}{(x^2+y^2+z^2)\sqrt{x^2+y^2+z^2}} + \frac{x^2-z^2}{(x^2+z^2)^2}$$

ist; so ist das gegebene Differential ein vollständiges Differential dreier veränderlicher Grössen, und kann also nach §. 113. integrirt werden.

Weil, wie leicht erhellet,

$$\int Q\partial y = \int \frac{y\,\partial y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \sqrt{x^2+y^2+z^2},$$

und folglich

$$\left(\frac{\partial \int Q\partial y}{\partial x}\right) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \quad P - \left(\frac{\partial \int Q\partial y}{\partial x}\right) = \frac{z}{x^2+z^2}$$

ist; so ist

$$\int \left\{P - \left(\frac{\partial \int Q\partial y}{\partial x}\right)\right\}\partial x = \int \frac{z\,\partial x}{x^2+z^2} = \int \frac{\partial\left(\frac{x}{z}\right)}{1+\left(\frac{x}{z}\right)^2} = Arc\,tang \frac{x}{z},$$

und folglich nach §. 111.

$$\int (P\partial x + Q\partial y) = \sqrt{x^2+y^2+z^2} + Arc\,tang \frac{x}{z}.$$

Also ist

$$\left(\frac{\partial \int (P\partial x + Q\partial y)}{\partial z}\right) = \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} - \frac{x}{x^2+z^2},$$

und folglich

$$R - \left(\frac{\partial \int (P\partial x + Q\partial y)}{\partial z}\right) = z, \quad \int \left\{R - \left(\frac{\partial \int (P\partial x + Q\partial y)}{\partial z}\right)\right\}\partial z = \tfrac{1}{2}z^2.$$

Also ist

$$u = \sqrt{x^2+y^2+z^2} + Arc\,tang \frac{x}{z} + \tfrac{1}{2}z^2 + C.$$

Zwölftes Kapitel.

Integration der Differentialgleichungen der ersten Ordnung und des ersten Grades zwischen zwei veränderlichen Grössen.

§. 115.

Erklärung. Eine Differentialgleichung der ersten Ordnung und des ersten Grades zwischen zwei veränderlichen Grössen heisst, wenn P und Q beliebige Functionen von x und y bezeichnen, jede Gleichung von der Form

$$P\partial x + Q\partial y = 0,$$

welche also ausser x und y bloss die ersten Differentiale ∂x und ∂y von x und y, und diese Differentiale bloss in der ersten Potenz, auch nicht das Product $\partial x \partial y$ enthält.

Die Differentialgleichung

$$P\partial x + Q\partial y = 0$$

integriren heisst eine Gleichung zwischen x und y finden, durch deren Differentiation die Gleichung

$$P\partial x + Q\partial y = 0$$

erhalten wird.

Jede Gleichung zwischen x und y, durch deren Differentiation die Gleichung

$$P\partial x + Q\partial y = 0$$

erhalten wird, mag ein Integral dieser letztern Gleichung genannt werden.

§. 116.

Wenn X bloss eine Function von x, Y bloss eine Function von y ist; so sagt man, dass in der Differentialgleichung

$$1. \quad X\partial x + Y\partial y = 0$$

die veränderlichen Grössen x, y gesondert seyen.

Da nach bekannten Regeln der Differentialrechnung durch Differentiation der Gleichung

$$2. \quad \int X\partial x + \int Y\partial y = C$$

oder

$$3. \quad \int X\partial x + \int Y\partial y - C = 0,$$

wo C eine willkührliche Constante bezeichnet, die Gleichung 1. erhalten wird; so ist die Gleichung 2. oder 3. das Integral der Gleichung 1., und diese Gleichung lässt sich daher, weil die Integrale $\int X\partial x$ und $\int Y\partial y$ mittelst der aus den obigen Kapiteln bekannten Methoden entwickelt werden können, jederzeit integriren.

Folglich wird auch die Gleichung

$$4.\quad P\partial x + Q\partial y = 0,$$

wo P und Q beliebige Functionen von x und y bezeichnen, jederzeit integrirt werden können, wenn sie sich auf irgend eine Art auf die Form der Gleichung 1. bringen lässt, d. h. wenn in ihr auf irgend eine Weise die veränderlichen Grössen x, y gesondert werden können.

Daher wollen wir jetzt einige Differentialgleichungen der ersten Ordnung und des ersten Grades zwischen zwei veränderlichen Grössen, welche sich durch Sonderung der veränderlichen Grössen integriren lassen, etwas näher betrachten.

§. 117.

In der Gleichung

$$XY_1\partial x - YX_1\partial y = 0,$$

wo X, X_1 Functionen von x, dagegen Y, Y_1 Functionen von y seyn sollen, lassen sich die veränderlichen Grössen sehr leicht sondern, weil dieselbe, wie man sogleich übersieht, auf die Form

$$\frac{X\partial x}{X_1} - \frac{Y\partial y}{Y_1} = 0$$

gebracht werden kann. Daher ist nach §. 116. die Gleichung

$$\int\frac{X\partial x}{X_1} - \int\frac{Y\partial y}{Y_1} = C$$

das Integral der gegebenen Gleichung.

Aus der Gleichung

$$y\partial x - x\partial y = 0$$

erhält man z. B. durch Sonderung der veränderlichen Grössen

$$\frac{\partial x}{x} - \frac{\partial y}{y} = 0,$$

und hieraus ferner durch Integration

$$\int\frac{\partial x}{x} - \int\frac{\partial y}{y} = C,$$

d. i. nach §. 26.

$$\tfrac{1}{2}l.x^2 - \tfrac{1}{2}l.y^2 = \tfrac{1}{2}l.\left(\frac{x}{y}\right)^2 = C;$$

also offenbar

$$\frac{x}{y} = c \text{ oder } x = cy,$$

welche Gleichung folglich das Integral der gegebenen Differentialgleichung ist.

§. 118.

Unter einer **homogenen Function**

$$u = f(x, y, z, v, \ldots)$$

der veränderlichen Grössen $x, y, z, v, \ldots$ versteht man eine Function, welche, wenn man für $x, y, z, v, \ldots$ respective $\theta x, \theta y, \theta z, \theta v, \ldots$, wo θ eine ganz beliebige neue veränderliche Grösse bezeichnet, setzt, auf die Form

$$\theta^a u = \theta^a f(x, y, z, v, \ldots),$$

wo a eine gewisse constante Grösse bezeichnet, gebracht werden kann.

Durch die Grösse a wird der **Grad** der entsprechenden homogenen Function

$$u = f(x, y, z, v, \ldots)$$

bestimmt.

So ist z. B. die Function

$$x^2 + xy + y^2$$

eine homogene Function des zweiten Grades der beiden veränderlichen Grössen x, y, weil diese Function, wenn man für x, y respective $\theta x, \theta y$ setzt, auf die Form

$$\theta^2 (x^2 + xy + y^2)$$

gebracht werden kann.

Die Function $lx - ly$ ist eine homogene Function des nullten Grades, weil dieselbe offenbar ganz ungeändert bleibt, wenn man $\theta x, \theta y$ für x, y setzt, und folglich nach dieser Substitution immer unter der Form

$$\theta^0 (lx - ly)$$

dargestellt werden kann.

Eben so leicht erhellet, dass die Function

$$\frac{x}{x^2 + y^2}$$

eine homogene Function des -1sten Grades der beiden veränderlichen Grössen x, y ist.

§. 119.

Wenn P und Q homogene Functionen eines und desselben Grades von x und y sind; so können in der Gleichung

$$P\partial x + Q\partial y = 0$$

die Variablen jederzeit durch ein einfaches Verfahren gesondert werden.

Setzen wir nämlich

$$P = f(x, y), \quad Q = \varphi(x, y);$$

so ist nach der Voraussetzung und nach §. 118.

$$f(\theta x, \theta y) = \theta^a f(x, y), \quad \varphi(\theta x, \theta y) = \theta^a \varphi(x, y),$$

und folglich, wenn man $y = xz$ setzt,

$$f(\theta x, \theta xz) = \theta^a f(x, xz), \quad \varphi(\theta x, \theta xz) = \theta^a \varphi(x, xz) .$$

Setzt man nun $\theta = \frac{1}{x}$; so wird, indem Z und Z_1 gewisse Functionen von x bezeichnen, in welche respective $f(\theta x, \theta xz)$ und $\varphi(\theta x, \theta xz)$ übergehen, wenn man für θ den in Rede stehenden Werth setzt, offenbar

$$Z = \frac{f(x, xz)}{x^a}, \quad Z_1 = \frac{\varphi(x, xz)}{x^a};$$

oder

$$f(x, xz) = x^a Z, \quad \varphi(x, xz) = x^a Z_1 .$$

Hieraus sieht man, dass, wenn man $y = xz$ setzt, unter der gemachten Voraussetzung die Gleichung

$$P\partial x + Q\partial y = 0$$

jederzeit auf die Form

$$x^a Z\partial x + x^a Z_1 \partial . xz = 0$$

oder

$$Z\partial x + Z_1(x\partial z + z\partial x) = 0,$$

oder

$$(Z + zZ_1)\partial x + xZ_1\partial z = 0,$$

oder

$$\frac{\partial x}{x} + \frac{Z_1\partial z}{Z + zZ_1} = 0,$$

eine Gleichung, in welcher, weil Z und Z_1 blosse Functionen von z sind, die Variablen gesondert sind, gebracht werden kann.

Das Integral der letztern Gleichung ist die Gleichung

$$\int\frac{\partial x}{x} + \int\frac{Z_1\partial z}{Z + zZ_1} = C$$

oder

$$\tfrac{1}{2} l . x^2 + \int\frac{Z_1\partial z}{Z + zZ_1} = C,$$

aus der man unmittelbar das Integral der gegebenen Gleichung

$$P\partial x + Q\partial y = 0$$

erhält, wenn man $z = \frac{y}{x}$ setzt.

§. 120.

Ist z. B.

$$(ax + by)\partial x + (a'x + b'y)\partial y = 0,$$

wo die Coefficienten von ∂x und ∂y offenbar homogene Functionen des ersten Grades von x und y sind, die gegebene Gleichung; so setze man

$$y = xz, \quad \partial y = x\partial z + z\partial x.$$

Durch diese Substitution wird die gegebene Gleichung

$$\{a + (a' + b)z + b'z^2\}\partial x + (a' + b'z)x\partial z = 0$$

oder

$$\frac{\partial x}{x} + \frac{(a' + b'z)\partial z}{a + (a' + b)z + b'z^2} = 0,$$

woraus sich ferner

$$\tfrac{1}{2}l.x^2 + \int\frac{(a' + b'z)\partial z}{a + (a' + b)z + b'z^2} = C$$

ergiebt.

Entwickelt man nun

$$\int\frac{(a' + b'z)\partial z}{a + (a' + b)z + b'z^2}$$

nach §. 35., und setzt dann $\frac{y}{x}$ für z; so erhält man das Integral der gegebenen Differentialgleichung.

Die Gleichung

$$x\partial y - y\partial x = \partial x\sqrt{x^2 + y^2}$$

oder

$$(y + \sqrt{x^2 + y^2})\partial x - x\partial y = 0,$$

wo die in ∂x und ∂y multiplicirten Factoren wieder homogene Functionen des ersten Grades von x und y sind, geht, wenn man $y = xz$ setzt, in die Gleichung

$$\partial x\sqrt{1 + z^2} - x\partial z = 0$$

oder

$$\frac{\partial x}{x} - \frac{\partial z}{\sqrt{1 + z^2}} = 0$$

über, und aus letzterer Gleichung folgt

$$\tfrac{1}{2}l.x^2 - \int\frac{\partial z}{\sqrt{1 + z^2}} = C,$$

d. i. nach §. 54.

$$\tfrac{1}{2}l.x^2 - \tfrac{1}{2}l.(2z + 2\sqrt{1 + z^2})^2 = C,$$

oder

$$l.\left(\frac{x}{z + \sqrt{1 + z^2}}\right)^2 = C.$$

Also ist offenbar auch

$$\frac{x}{z + \sqrt{1 + z^2}} = c,$$

und folglich, wenn man diese Gleichung rational macht,

$$x^2 - 2cxz = c^2.$$

Setzt man nun $z = \frac{y}{x}$; so findet man als Integral der gegebenen Differentialgleichung die Gleichung

$$x^2 - 2cy = c^2.$$

§. 121.

Die Gleichung

$$(a + bx + cy)\partial x + (a' + b'x + c'y)\partial y = 0$$

lässt sich durch eine einfache Substitution in eine andere verwandeln, in welcher die in ∂x und ∂y multiplicirten Functionen homogene Functionen des ersten Grades sind.

Setzt man nämlich

$$x = t + \alpha, \quad y = u + \beta,$$

wo α und β zwei willkührliche constante Grössen seyn sollen; so erhält man die Gleichung

$$(a + b\alpha + c\beta + bt + cu)\partial t + (a' + b'\alpha + c'\beta + b't + c'u)\partial u = 0.$$

Da nun die Grössen α, β ganz willkührliche Constanten sind; so kann man dieselben aus den Gleichungen

$$a + b\alpha + c\beta = 0, \quad a' + b'\alpha + c'\beta = 0$$

bestimmen. Dann geht die obige Gleichung in die Gleichung

$$(bt + cu)\partial t + (b't + c'u)\partial u = 0$$

über, in welcher nun die in ∂t und ∂u multiplicirten Grössen homogene Functionen des ersten Grades von t und u sind, so dass also diese Gleichung nach den obigen Principien integrirt werden kann, wie auch schon in §. 120. gezeigt worden ist.

Aus den obigen Gleichungen, durch welche α und β bestimmt werden, findet man

$$\alpha = \frac{a'c - ac'}{bc' - b'c}, \quad \beta = \frac{ab' - a'b}{bc' - b'c}.$$

Setzt man also in dem Integral der Gleichung

$$(bt + cu)\partial t + (b't + c'u)\partial u = 0$$

für t und u respective die Werthe

$$x - \frac{a'c - ac'}{bc' - b'c}, \quad y - \frac{ab' - a'b}{bc' - b'c};$$

so erhält man eine Gleichung zwischen x und y, welche das Integral der gegebenen Differentialgleichung ist.

Diese Auflösung ist, wenn

$$bc' - b'c = 0$$

ist, nicht mehr anwendbar, wie man sogleich übersieht. In diesem Falle ist aber

$$bb'x + bc'y = bb'x + b'cy$$

oder

$$b(b'x + c'y) = b'(bx + cy),$$

und folglich

$$(a + bx + cy)\partial x + \{a' + \frac{b'}{b}(bx + cy)\}\partial y = 0$$

oder

$$a\partial x + a'\partial y + (bx + cy)\left(\partial x + \frac{b'}{b}\partial y\right) = 0.$$

Setzt man nun

$$bx + cy = z,\quad \partial y = \frac{\partial z - b\partial x}{c};$$

so erhält man die Gleichung

$$\partial x + \frac{(a'b + b'z)\partial z}{b\{ac - a'b + (c - b')z\}} = 0,$$

und folglich

$$x + \frac{1}{b}\int\frac{(a'b + b'z)\partial z}{ac - a'b + (c - b')z} = C.$$

Ist $b' = c$, so wird diese Gleichung

$$x + \frac{(a'b + \frac{1}{2}b'z)z}{(ac - a'b)b} = C,$$

und folglich, wenn man für z seinen Werth $bx + cy$ setzt,

$$(ac - a'b)bx + \{a'b + \tfrac{1}{2}b'(bx + cy)\}(bx + cy) = bC(ac - a'b),$$

oder

$$2(ac - a'b)bx + \{2a'b + b'(bx + cy)\}(bx + cy) = 2bC(ac - a'b),$$

oder

$$2bc(ax + a'y) + b'(bx + cy)^2 = 2bC(ac - a'b),$$

welche Gleichung das Integral der gegebenen Differentialgleichung in dem Falle ist, wenn $bc' = b'c$ und $b' = c$ ist.

§. 122.

Die Gleichung $y + Py\partial x = Q\partial x$, wo P und Q Functionen von x allein seyn sollen, lässt sich auf folgende Art durch Sonderung der veränderlichen Grössen integriren.

Man setze $y = Xz$, wo X eine noch zu bestimmende Function von x bezeichnen soll; so ist

$$\partial y = X\partial z + z\partial X,$$

und folglich

$$X\partial z + z\partial X + PXz\partial x = Q\partial x.$$

Nun bestimme man X so, dass

$$1.\quad X\partial z + PXz\partial x = 0$$

ist; so ist

$$2.\quad z\partial X - Q\partial x = 0.$$

Aus der Gleichung 1. ergiebt sich

$$3.\quad \frac{\partial z}{z} + P\partial x = 0,$$

und folglich

$$4.\quad \tfrac{1}{2}l.z^2 + \int P\partial x = c,$$

oder

$$5.\quad l.z^2 = 2c - 2\int P\partial x;$$

also

$$6.\quad z^2 = e^{2c - 2\int P\partial x} = (e^c.e^{-\int P\partial x})^2;$$

folglich

$$7.\quad z = \pm e^{c} . e^{-\int P \partial x},$$

oder, was offenbar dasselbe ist,

$$8.\quad z = Ce^{-\int P \partial x},$$

wo C eine willkührliche Constante bezeichnet.

Führt man nun diesen Werth von z in die Gleichung 2. ein; so erhält man

$$9.\quad Ce^{-\int P \partial x} \partial X - Q \partial x = 0$$

oder

$$10.\quad \partial X = \frac{1}{C} e^{\int P \partial x} Q \partial x,$$

und folglich

$$11.\quad X = \frac{1}{C} \int e^{\int P \partial x} Q \partial x + C'.$$

Also, weil

$$y = Xz = CXe^{-\int P \partial x}, \quad X = \frac{1}{C} y e^{\int P \partial x}$$

ist,

$$12.\quad y = e^{-\int P \partial x} \left\{ \int e^{\int P \partial x} Q \partial x + CC' \right\},$$

oder, wenn wir für CC' bloss C setzen,

$$13.\quad y = e^{-\int P \partial x} \left\{ \int e^{\int P \partial x} Q \partial x + C \right\}.$$

Für die Gleichung

$$\partial y + y \partial x = x^2 \partial x$$

erhält man hiernach z. B.

$$y = e^{-x} (\int e^x x^2 \partial x + C).$$

Weil nun

$$\int e^x x^2 \partial x = x^2 \int e^x \partial x - 2 \int x \partial x \int e^x \partial x$$
$$= e^x x^2 - 2 \int e^x x \partial x = e^x x^2 - 2x \int e^x \partial x + 2 \int \partial x \int e^x \partial x$$
$$= e^x x^2 - 2 e^x x + 2 \int e^x \partial x = e^x (x^2 - 2x + 2)$$

ist; so ist

$$y = e^{-x} \{ e^x (x^2 - 2x + 2) + C \} = x^2 - 2x + 2 + Ce^{-x}.$$

Die Gleichung

$$\partial y + Py \partial x = Qy^{n+1} \partial x,$$

wo P und Q wieder Functionen von x allein sind, lässt sich auf die Form der vorher betrachteten Gleichung bringen, wenn man $y^n z = 1$ setzt, indem man durch diese Substitution leicht die Gleichung

$$\partial z - nPz \partial x = - nQ \partial x$$

erhält, deren Form von der Form der vorher betrachteten Gleichung nicht verschieden ist.

Die Gleichung

$$y^m \partial y + Py^{m+1} \partial x = Q \partial x$$

wird, wenn man $y^{m+1} = z$ setzt, auf die Form der oben betrachteten Gleichung gebracht, indem man durch diese Substitution die Gleichung

$$\partial z + (m+1) Pz\,\partial x = (m+1) Q\,\partial x,$$

deren Form wieder von der Form der oben betrachteten Gleichung nicht wesentlich verschieden ist, erhält.

§. 123.

Die Gleichung

$$\partial y + by^2\,\partial x = ax^m\,\partial x$$

ist eine der wichtigsten und merkwürdigsten Differentialgleichungen, und wird gewöhnlich die Riccati'sche Gleichung genannt, weil der Conte Giacomo Riccati dieselbe im Jahre 1722 den Analysten seiner Zeit zur Integration vorlegte.

I. Der einfachste Fall ist der Fall $m = 0$. In diesem Falle wird die Riccati'sche Gleichung

$$\partial y + by^2\,\partial x = a\,\partial x$$

oder

$$\partial x - \frac{\partial y}{a - by^2} = 0,$$

und folglich

$$x - \int \frac{\partial y}{a - by^2} = C.$$

Da sich nun

$$\int \frac{\partial y}{a - by^2}$$

nach §. 35. leicht entwickeln lässt; so lässt sich auch in dem Falle, wo $m = 0$ ist, die Riccati'sche Gleichung immer integriren.

II. Setzt man $y = z^k$; so wird die Riccati'sche Gleichung

$$kz^{k-1}\partial z + bz^{2k}\,\partial x = ax^m\,\partial x,$$

oder

$$(ax^m - bz^{2k})\,\partial x - kz^{k-1}\,\partial z = 0.$$

In dieser Gleichung werden die in ∂x und ∂z multiplicirten Functionen homogene Functionen desselben Grades von x und z, wenn $k - 1 = 2k = m$, d. i. $k = -1$, $m = -2$ ist. Also lässt sich die Riccati'sche Gleichung in dem Falle $m = -2$, d. i. die Gleichung

$$\partial y + by^2\,\partial x = \frac{a\,\partial x}{x^2},$$

wenn man $y = z^{-1}$ setzt, jederzeit nach §. 119. integriren.

III. Setzt man in der Riccati'schen Gleichung

$$y = b^{-1}x^{-1} + zx^{-2};$$

so wird dieselbe

$$1.\quad x^2\,\partial z + bz^2\,\partial x = ax^{m+4}\,\partial x.$$

In dieser Gleichung lassen sich die veränderlichen Grössen sondern, wenn $m = -4$ ist. Denn in diesem Falle wird dieselbe leicht auf die Form

$$\frac{\partial x}{x^2} - \frac{\partial z}{a - bz^2} = 0$$

gebracht.

Setzt man nun, wenn m nicht $= -4$ ist,

$$z = \frac{1}{y'}, \quad x^{m+3} = x';$$

so wird die Gleichung 1.

$$\partial y' + \frac{a}{m+3} y'^2 \partial x' = \frac{b}{m+3} x'^{-\frac{m+4}{m+3}} \partial x',$$

oder, wenn der Kürze wegen

$$\frac{a}{m+3} = b', \quad \frac{b}{m+3} = a', \quad -\frac{m+4}{m+3} = m'$$

gesetzt wird,

$$\partial y' + b'y'^2 \partial x' = a'x'^{m'} \partial x',$$

welches eine der Riccati'schen Gleichung ganz ähnliche Gleichung ist.

Setzt man nun wieder

$$y' = b'^{-1} x'^{-1} + z' x'^{-2};$$

so wird die obige Gleichung

$$2. \quad x'^2 \partial z' + b'z'^2 \partial x' = a'x'^{m'+4} \partial x',$$

und in dieser Gleichung lassen sich, wenn $m' = -4$ ist, wieder die veränderlichen Grössen sondern, weil dieselbe in diesem Falle leicht auf die Form

$$\frac{\partial x'}{x'^2} - \frac{\partial z'}{a' - b'z'^2} = 0$$

gebracht werden kann.

Setzt man nun, wenn m' nicht $= -4$ ist, wieder

$$z' = \frac{1}{y''}, \quad x'^{m'+3} = x'';$$

so wird die Gleichung 2.

$$\partial y'' + \frac{a'}{m'+3} y''^2 \partial x'' = \frac{b'}{m'+3} x''^{-\frac{m'+4}{m'+3}} \partial x'',$$

oder, wenn der Kürze wegen

$$\frac{a'}{m'+3} = b'', \quad \frac{b'}{m'+3} = a'', \quad -\frac{m'+4}{m'+3} = m''$$

gesetzt wird,

$$\partial y'' + b''y''^2 \partial x'' = a''x''^{m''} \partial x'',$$

welches wieder eine der Riccati'schen Gleichung ganz ähnliche Gleichung ist.

Durch die Substitution

$$y'' = b''^{-1}x''^{-1} + z''x''^{-2}$$

wird diese Gleichung auf die Form

$$3.\quad x''^2\partial z'' + b''z''^2\partial x'' = a''x''^{m''+4}\partial x''$$

gebracht, und in dieser Gleichung lassen sich, wenn $m'' = -4$ ist, wieder die veränderlichen Grössen sondern, indem dieselbe in dem in Rede stehenden Falle leicht auf die Form

$$\frac{\partial x''}{x''^2} - \frac{\partial z''}{a''-b''z''^2} = 0$$

gebracht wird.

Man sieht nun schon, wie man auf die obige Art immer weiter gehen kann, und schliesst aus dem Vorhergehenden leicht, dass die Riccati'sche Gleichung jederzeit durch Sonderung der Variablen integrirt werden kann, wenn in der Reihe der Grössen

$$m,\ m' = -\frac{m+4}{m+3},\ m'' = -\frac{m'+4}{m'+3},\ m''' = -\frac{m''+4}{m''+3},\ldots$$

eine vorkommt, welche $= -4$ ist, welches jederzeit für

$$m = -4,\ -\tfrac{8}{3},\ -\tfrac{12}{5},\ -\tfrac{16}{7},\ \ldots,$$

d. h. überhaupt für

$$m = -\frac{4i}{2i-1},$$

wo i eine jede postive ganze Zahl, die nicht $= 0$ ist, bezeichnet, der Fall ist. Da aber für $i = 0$ und $i = \infty$ respective $m = 0$ und $m = -2$, und in diesen beiden Fällen die Riccati'sche Gleichung nach I. und II. integrabel ist; so sieht man, dass die Riccati'sche Gleichung für

$$m = -\frac{4i}{2i-1}$$

wo i jede positive ganze Zahl, 0 und ∞ mit eingeschlossen, bezeichnet, jederzeit integrabel ist.

IV. Setzt man

$$y = \frac{1}{y'},\quad x^{m+1} = x'$$

und der Kürze wegen

$$\frac{a}{m+1} = b',\quad \frac{b}{m+1} = a',\quad -\frac{m}{m+1} = m';$$

so geht die Riccati'sche Gleichung in

$$\partial y' + b'y'^2\partial x' = a'x'^{m'}\partial x'$$

über. Diese Gleichung hat mit der Riccati'schen Gleichung völlig einerlei Form, und kann also nach III., wenn

$$m' = -\frac{4i}{2i-1}$$

ist, jederzeit integrirt werden. Folglich kann die Riccati'sche Gleichung selbst, wenn

$$-\frac{m}{m+1}=-\frac{4i}{2i-1}, \text{ d. i. } m=-\frac{4i}{2i+1}$$

ist, jederzeit integrirt werden.

Fasst man nun alles Obige zusammen; so zeigt sich, dass die Riccati'sche Gleichung jederzeit integrabel ist, wenn, indem i jede positive ganze Zahl, 0 und ∞ mit eingeschlossen, bezeichnet,

$$m=-\frac{4i}{2i\pm 1}$$

ist.

§. 124.

Eine von der in den vorhergehenden Paragraphen entwickelten verschiedene Methode, die Differentialgleichung

$$P\partial x+Q\partial y=0$$

in gewissen Fällen zu integriren, beruhet auf Folgendem.

Wenn nämlich $P\partial x+Q\partial y$ ein vollständiges Differential zweier veränderlicher Grössen ist; so kann man $\int(P\partial x+Q\partial y)$ jederzeit nach den im eilften Kapitel bewiesenen Regeln entwickeln. Ist nun überhaupt

$$\int(P\partial x+Q\partial y)=u;$$

so ist, weil

$$P\partial x+Q\partial y=\partial u=0$$

ist, $u=C$, und folglich diese Gleichung oder die Gleichung

$$u-C=0$$

das Integral der gegebenen Differentialgleichung

$$P\partial x+Q\partial y=0.$$

Um diese Methode durch ein Beispiel zu erläutern; so sey

$$\frac{\partial x}{x}+\frac{y^2\partial x}{x^3}-\frac{y\partial y}{x^2}+\frac{(y\partial x-x\partial y)\sqrt{x^2+y^2}}{x^3}+\frac{\partial y}{2y}=0$$

oder

$$\frac{x^2+y^2+y\sqrt{x^2+y^2}}{x^3}\partial x+\left(\frac{1}{2y}-\frac{y+\sqrt{x^2+y^2}}{x^2}\right)\partial y=0$$

die gegebene Differentialgleichung, und folglich

$$P=\frac{x^2+y^2+y\sqrt{x^2+y^2}}{x^3},\quad Q=\frac{1}{2y}-\frac{y+\sqrt{x^2+y^2}}{x^2}.$$

Weil nun

$$\left(\frac{\partial P}{\partial y}\right)=\left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right)=\frac{x^2+2y^2+2y\sqrt{x^2+y^2}}{x^3\sqrt{x^2+y^2}}$$

ist; so ist im vorliegenden Falle $P\partial x+Q\partial y$ ein vollständiges

Differential zweier veränderlicher Grössen, und kann also nach den im eilften Kapitel bewiesenen Regeln integrirt werden.

Entwickelt man zu dem Ende, y als constant betrachtend, zuvörderst $\int P\partial x$; so erhält man

$$\int P\partial x = \int \frac{x^2+y^2+y\sqrt{x^2+y^2}}{x^3}\partial x$$

$$= \int\frac{\partial x}{x} + y^2\int\frac{\partial x}{x^3} + y\int\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{x^3}\partial x$$

$$= \tfrac{1}{2}l.x^2 - \frac{y^2}{2x^2} + y\int\frac{x^2+y^2}{x^3\sqrt{x^2+y^2}}\partial x$$

$$= \tfrac{1}{2}l.x^2 - \frac{y^2}{2x^2} + y\int\frac{\partial x}{x\sqrt{x^2+y^2}} + y^3\int\frac{\partial x}{x^3\sqrt{x^2+y^2}},$$

und folglich, weil nach §. 58.

$$\int\frac{\partial x}{x^3\sqrt{x^2+y^2}} = -\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{2x^2y^2} - \frac{1}{2y^2}\int\frac{\partial x}{x\sqrt{x^2+y^2}}$$

ist,

$$\int P\partial x = \tfrac{1}{2}l.x^2 - \frac{y^2}{2x^2} - \frac{y\sqrt{x^2+y^2}}{2x^2} + \frac{1}{2}y\int\frac{\partial x}{x\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Setzen wir nun $\frac{1}{x}=z$; so ist

$$\int\frac{\partial x}{x\sqrt{x^2+y^2}} = -\frac{\partial z}{\sqrt{1+y^2z^2}}.$$

Nach §. 54. I. ist aber

$$\int\frac{\partial z}{\sqrt{1+y^2z^2}} = \pm\frac{1}{2y}l.(2y^2z\pm 2y\sqrt{1+y^2z^2})^2,$$

oder, weil y constant ist,

$$\int\frac{\partial z}{\sqrt{1+y^2z^2}} = \pm\frac{1}{2y}l.(yz\pm\sqrt{1+y^2z^2})^2,$$

und folglich, wenn man zugleich für z den Werth $\frac{1}{x}$ wieder einführt,

$$\int\frac{\partial x}{x\sqrt{x^2+y^2}} = \mp\frac{1}{2y}l.\left(\frac{y\pm\sqrt{x^2+y^2}}{x}\right)^2.$$

Also ist

$$\int P\partial x = \tfrac{1}{2}l.x^2 - \frac{y^2}{2x^2} - \frac{y\sqrt{x^2+y^2}}{2x^2} \mp \tfrac{1}{4}l.\left(\frac{y\pm\sqrt{x^2+y^2}}{x}\right)^2.$$

Hieraus ergiebt sich, wenn man nach y differentiirt,

$$\left(\frac{\partial\int P\partial x}{\partial y}\right) = -\frac{y}{x^2} - \frac{x^2+2y^2}{2x^2\sqrt{x^2+y^2}} \mp \frac{\sqrt{x^2+y^2}\pm y}{2(y\pm\sqrt{x^2+y^2})\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$= -\frac{y}{x^2} - \frac{x^2+2y^2}{2x^2\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2}} = -\frac{y+\sqrt{x^2+y^2}}{x^2},$$

und folglich

$$Q - \left(\frac{\partial \int P \partial x}{\partial y}\right) = \frac{1}{2y};$$

also

$$\int \left\{ Q - \left(\frac{\partial \int P \partial x}{\partial y}\right)\right\} \partial y = \tfrac{1}{4} l . y^2 .$$

Folglich ist nach §. 111. und dem Obigen

$$\int (P \partial x + Q \partial y)$$

$$= \tfrac{1}{2} l . x^2 + \tfrac{1}{4} l . y^2 - \frac{y^2}{2x^2} - \frac{y\sqrt{x^2+y^2}}{2x^2} \mp \tfrac{1}{4} l . \left(\frac{y \pm \sqrt{x^2+y^2}}{x}\right)^2,$$

und daher die Gleichung

$$\tfrac{1}{2} l . x^2 + \tfrac{1}{4} l . y^2 - \frac{y(y + \sqrt{x^2+y^2})}{2x^2} \mp \tfrac{1}{4} l . \left(\frac{y \pm \sqrt{x^2+y^2}}{x}\right)^2 - C = 0$$

das Integral der gegebenen Differentialgleichung.

§. 125.

Wenn $P\partial x + Q\partial y$ kein vollständiges Differential zweier veränderlicher Grössen ist; so kann man versuchen, die gegebene Gleichung

$$P\partial x + Q\partial y = 0$$

mit einer gewissen Function z von x und y zu multipliciren, welche so beschaffen ist, dass in der Gleichung

$$Pz\partial x + Qz\partial y = 0$$

die Grösse auf der linken Seite des Gleichheitszeichens ein vollständiges Differential der beiden veränderlichen Grössen x und y ist, weil, wenn man eine solche Function, die ein **integrirender Factor** genannt wird, finden kann, die Integration der gegebenen Differentialgleichung offenbar auf §. 124. zurückgeführt ist.

Soll nun $Pz\partial x + Qz\partial y$ ein vollständiges Differential zweier veränderlicher Grössen seyn; so muss bekanntlich

$$\left(\frac{\partial . Pz}{\partial y}\right) = \left(\frac{\partial . Qz}{\partial x}\right),$$

d. i.

$$P\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) + z\left(\frac{\partial P}{\partial y}\right) = Q\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) + z\left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right)$$

oder

$$P\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) - Q\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) + z\left\{\left(\frac{\partial P}{\partial y}\right) - \left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right)\right\} = 0$$

seyn, und aus dieser Gleichung muss also der integrirende Factor jederzeit bestimmt werden, welches aber meistens schwieriger ist, wie die Integration der gegebenen Differentialgleichung selbst.

Daher begnügen wir uns, hier nur auf zwei Fälle aufmerksam zu machen, in denen sich der integrirende Factor z leicht bestimmen lässt.

I. Wenn nämlich z bloss eine Function von x ist; so ist $\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = 0$, und die obige Gleichung wird

$$-Q\frac{\partial z}{\partial x} + z\left\{\left(\frac{\partial P}{\partial y}\right) - \left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right)\right\} = 0$$

oder

$$\frac{1}{z}\cdot\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{Q}\left\{\left(\frac{\partial P}{\partial y}\right) - \left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right)\right\},$$

woraus sogleich erhellet, dass auch

$$\frac{1}{Q}\left\{\left(\frac{\partial P}{\partial y}\right) - \left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right)\right\}$$

eine Function von x allein ist.

Da nun

$$\frac{\partial z}{z} = \frac{\partial x}{Q}\left\{\left(\frac{\partial P}{\partial y}\right) - \left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right)\right\}$$

ist; so erhält man, wenn man integrirt,

$$\tfrac{1}{2}l.z^2 = \int\frac{\partial x}{Q}\left\{\left(\frac{\partial P}{\partial y}\right) - \left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right)\right\},$$

oder, wenn wir der Kürze wegen

$$\frac{1}{Q}\left\{\left(\frac{\partial P}{\partial y}\right) - \left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right)\right\} = X$$

setzen,

$$l.z^2 = 2\int X\partial x,\quad z^2 = e^{2\int X\partial x},\quad z = \pm e^{\int X\partial x},$$

wo aber sogleich in die Augen fällt, dass es völlig hinreichend ist,

$$z = e^{\int X\partial x}$$

zu setzen.

Man kann nun auch leicht beweisen, dass umgekehrt, unter der Voraussetzung, dass

$$\frac{1}{Q}\left\{\left(\frac{\partial P}{\partial y}\right) - \left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right)\right\} = X$$

eine blosse Function von x ist, jederzeit

$$z = e^{\int X\partial x}$$

ein integrirender Factor der Gleichung

$$P\partial x + Q\partial y = 0$$

ist, d. h. dass

$$Pe^{\int X\partial x}.\,\partial x + Qe^{\int X\partial x}\partial y$$

jederzeit ein vollständiges Differential der beiden veränderlichen Grössen x und y ist.

Weil nämlich

$$\left(\frac{\partial\int X\partial x}{\partial y}\right) = 0$$

ist; so ist

$$\left(\frac{\partial\,.\,Pe^{\int X\partial x}}{\partial y}\right) = e^{\int X\partial x}\left(\frac{\partial P}{\partial y}\right).$$

Ferner ist, wie leicht erhellen wird,

$$\left(\frac{\partial\,.\,Qe^{\int X\partial x}}{\partial x}\right) = e^{\int X\partial x}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right) + e^{\int X\partial x}QX.$$

Weil nun

$$\frac{1}{Q}\left\{\left(\frac{\partial P}{\partial y}\right) - \left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right)\right\} = X$$

ist; so ist

$$\left(\frac{\partial P}{\partial y}\right) = \left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right) + QX,$$

und folglich auch

$$e^{\int X\partial x}\left(\frac{\partial P}{\partial y}\right) = e^{\int X\partial x}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right) + e^{\int X\partial x}QX,$$

d. i.

$$\left(\frac{\partial\,.\,Pe^{\int X\partial x}}{\partial y}\right) = \left(\frac{\partial\,.\,Qe^{\int X\partial x}}{\partial x}\right);$$

also

$$Pe^{\int X\partial x}\partial x + Qe^{\int X\partial x}\partial y$$

ein vollständiges Differential von x und y, wie bewiesen werden sollte.

Um das Vorhergehende auf einen besondern Fall anzuwenden; so sey die Gleichung

$$\partial x + (a\,\partial x + 2by\,\partial y)\sqrt{1+x^2} = 0$$

gegeben, und folglich

$$P = 1 + a\sqrt{1+x^2}, \quad Q = 2by\sqrt{1+x^2}.$$

Weil nun

$$\left(\frac{\partial P}{\partial y}\right) = 0, \quad \left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right) = \frac{2bxy}{\sqrt{1+x^2}},$$

und folglich

$$\left(\frac{\partial P}{\partial y}\right) - \left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right) = -\frac{2bxy}{\sqrt{1+x^2}}$$

ist; so ist

$$\frac{1}{Q}\left\{\left(\frac{\partial P}{\partial y}\right) - \left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right)\right\} = X = -\frac{x}{1+x^2},$$

diese Grösse also eine blosse Function von x.

Leicht findet man nun

$$\int X\partial x = -\int\frac{x\partial x}{1+x^2} = -l\sqrt{1+x^2},$$

und folglich

$$z = e^{-l\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Multiplicirt man die gegebene Gleichung mit diesem integrirenden Factor; so wird dieselbe

$$\frac{\partial x}{\sqrt{1+x^2}} + a\partial x + 2by\partial y = 0,$$

oder

$$\frac{1+a\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}}\partial x + 2by\partial y = 0.$$

Weil in dieser Gleichung die veränderlichen Grössen gesondert sind; so ist

$$\int\frac{1+a\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}}\partial x + 2b\int y\partial y = C.$$

Aber nach §. 54. I.

$$\int\frac{1+a\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}}\partial x = ax + \int\frac{\partial x}{\sqrt{1+x^2}} = ax + \tfrac{1}{2}l.(2x+2\sqrt{1+x^2})^2$$

oder auch

$$\int\frac{1+a\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}}\partial x = ax + \tfrac{1}{2}l.(x+\sqrt{1+x^2})^2,$$

und folglich die Gleichung

$$ax + by^2 + \tfrac{1}{2}l.(x+\sqrt{1+x^2})^2 = C$$

das Integral der gegebenen Differentialgleichung.

II. Ganz auf dieselbe Art wie vorher zeigt man, dass, wenn

$$\frac{1}{P}\left\{\left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right) - \left(\frac{\partial P}{\partial y}\right)\right\} = Y$$

eine blosse Function von y ist, jederzeit

$$z = e^{\int Y\partial y}$$

ein integrirender Factor der Gleichung

$$P\partial x + Q\partial y = 0$$

ist.

Wenn P und Q homogene Functionen desselben Grades von x und y sind; so lässt sich zwar immer ein integrirender Factor für die Gleichung

$$P\partial x + Q\partial y = 0$$

finden. Weil aber dann diese Gleichung bekanntlich immer durch Sonderung der Variablen integrirt werden kann; so wollen wir uns hier bei der Aufsuchung des integrirenden Factors solcher Gleichungen nicht aufhalten.

Dreizehntes Kapitel.

Integration der Differentialgleichungen der ersten Ordnung und des $n$ten Grades zwischen zwei veränderlichen Grössen.

§. 126.

Die allgemeine Form einer Differentialgleichung der ersten Ordnung und des $n$ten Grades zwischen zwei veränderlichen Grössen ist

$$\partial y^n + P\partial y^{n-1}\partial x + Q\partial y^{n-2}\partial x^2 + \ldots + T\partial y\,\partial x^{n-1} + U\partial x^n = 0$$

oder

$$\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^n + P\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^{n-1} + Q\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^{n-2} + \ldots + T\frac{\partial y}{\partial x} + U = 0\,.$$

Wird diese Gleichung in Bezug auf $\frac{\partial y}{\partial x}$ als unbekannte Grösse aufgelöst; so erhält man n Differentialgleichungen

$$\frac{\partial y}{\partial x} - p_1 = 0,\quad \frac{\partial y}{\partial x} - p_2 = 0,\quad \frac{\partial y}{\partial x} - p_3 = 0,\ \ldots\ \frac{\partial y}{\partial x} - p_n = 0$$

oder

$$\partial y - p_1\partial x = 0,\quad \partial y - p_2\partial x = 0,\quad \partial y - p_3\partial x = 0,\ \ldots\ \partial y - p_n\partial x = 0$$

der ersten Ordnung und des ersten Grades zwischen zwei veränderlichen Grössen, die man nach den im vorigen Kapitel entwickelten Regeln zu integriren suchen muss.

Sind nun die Gleichungen

$$M_1 = 0,\quad M_2 = 0,\quad M_3 = 0,\ \ldots\ M_n = 0$$

die n Integrale, welche man auf diese Weise erhält; so ist nicht nur jede einzelne dieser Gleichungen, sondern offenbar auch das Product einer beliebigen Anzahl derselben, wie man sie auch unter einander verbinden mag, ein Integral der gegebenen Differentialgleichung

$$\partial y^n + P\partial y^{n-1}\partial x + Q\partial y^{n-2}\partial x^2 + \ldots + T\partial y\,\partial x^{n-1} + U\partial x^n = 0.$$

1. Sey z. B. die Gleichung

$$\partial y^2 - a^2 \partial x^2 = 0 \text{ oder } \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 - a^2 = 0$$

gegeben. Durch Auflösung dieser Gleichung in Bezug auf $\frac{\partial y}{\partial x}$ als unbekannte Grösse erhält man die beiden Gleichungen

$$\partial y - a\partial x = 0,\ \partial y + a\partial x = 0.$$

Integrirt man nun diese beiden Gleichungen nach §. 116., so erhält man die Gleichungen

$$y - ax - c = 0,\ y + ax - c' = 0,$$

und es sind nun nicht bloss diese beiden Gleichungen, sondern auch die Gleichung

$$(y - ax - c)(y + ax - c') = 0,$$

Integrale der gegebenen Differentialgleichung.

Um sich durch eine wirkliche Rechnung zu überzeugen, dass in der That die Gleichung

$$(y - ax - c)(y + ax - c') = 0$$

ein Integral der gegebenen Differentialgleichung ist, differentiire man diese Gleichung. Dadurch erhält man

$$(y - ax - c)(\partial y + a\partial x) + (y + ax - c')(\partial y - a\partial x) = 0$$

oder

$$(y - ax - c)\left(\frac{\partial y}{\partial x} + a\right) + (y + ax - c')\left(\frac{\partial y}{\partial x} - a\right) = 0,$$

und folglich

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{a(2ax + c - c')}{2y - (c + c')}.$$

Weil nun aber

$$(y - ax - c)(y + ax - c') = 0$$

ist; so muss nothwendig einer der beiden Factoren des Products auf der linken Seite des Gleichheitszeichens $= 0$ seyn.

Ist $y - ax - c = 0$, so ist $ax = y - c$, und folglich

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{a(2y - c - c')}{2y - c - c'} = + a.$$

Ist dagegen $y + ax - c' = 0$, so ist $ax = c' - y$, und folglich

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{a(c + c' - 2y)}{2y - c - c'} = - a.$$

Also ist $\frac{\partial y}{\partial x} = \pm a$ und folglich immer

$$\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 = a^2,\ \partial y^2 - a^2 \partial x^2 = 0,$$

wie es seyn soll.

2. Durch Auflösung der Gleichung

$$\partial y^2 - ax\,\partial x^2 = 0 \text{ oder } \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 - ax = 0$$

erhält man die beiden Gleichungen

$$\partial y - (ax)^{\frac{1}{2}}\partial x = 0, \quad \partial y + (ax)^{\frac{1}{2}}\partial x = 0,$$

und durch Integration dieser Gleichungen ergeben sich nun ferner nach §. 116. die beiden Gleichungen

$$y - \tfrac{2}{3}a^{\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}} - c = 0, \quad y + \tfrac{2}{3}a^{\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}} - c' = 0.$$

Sowohl diese beiden Gleichungen, als auch die Gleichung

$$(y - \tfrac{2}{3}a^{\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}} - c)(y + \tfrac{2}{3}a^{\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}} - c') = 0,$$

sind Integrale der gegebenen Differentialgleichung.

3. Durch Auflösung der Gleichung

$$\partial y^3 + \partial x^3 = 0 \text{ oder } \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^3 + 1 = 0$$

erhält man die drei Gleichungen

$$\partial y + \partial x = 0, \quad \partial y - \tfrac{1}{2}(1 + \sqrt{-3})\partial x = 0, \quad \partial y - \tfrac{1}{2}(1 - \sqrt{-3})\partial x = 0;$$

und durch Integration dieser Gleichungen ergeben sich die drei Gleichungen

$$y + x - c = 0, \quad y - \tfrac{1}{2}(1 + \sqrt{-3})x - c' = 0,$$
$$y - \tfrac{1}{2}(1 - \sqrt{-3})x - c'' = 0.$$

§. 127.

Wenn auch die vorige Methode ganz allgemein ist; so setzt doch die Auflösung der höhern Gleichungen derselben oft grosse Schwierigkeiten entgegen, und wir wollen daher jetzt noch einige besondere häufiger vorkommende Fälle, die eine andere Behandlung gestatten, betrachten.

Wenn zuvörderst die gegebene Differentialgleichung ausser $\frac{\partial y}{\partial x}$ bloss noch eine der beiden veränderlichen Grössen x und y, etwa x, enthält, und sich in Bezug auf x als unbekannte Grösse leichter als in Bezug auf $\frac{\partial y}{\partial x}$ als unbekannte Grösse auflösen lässt; so kann man auf folgende Art verfahren.

Man drücke x durch $\frac{\partial y}{\partial x} = p$ aus, so dass $x = f(p)$ wird. Da nun $\partial y = p\,\partial x$ ist; so ist nach §. 27.

$$y = px - \int x\,\partial p,$$

d. i.

$$y = pf(p) - \int f(p).\partial p.$$

Eliminirt man nun p aus den beiden Gleichungen

$$x = f(p),\quad y = pf(p) - \int f(p).\partial p;$$

so erhält man eine Gleichung zwischen x und y, welche das Integral der gegebenen Differentialgleichung seyn wird.

Ist z. B.

$$x\partial x + a\partial y = b\sqrt{\partial x^2 + \partial y^2}$$

oder

$$x + ap = b\sqrt{1 + p^2}$$

die gegebene Differentialgleichung; so ist

$$x = -ap + b\sqrt{1+p^2},$$

und nach dem Obigen folglich

$$y = -ap^2 + bp\sqrt{1+p^2} + \int(ap - b\sqrt{1+p^2})\partial p$$

$$= -\tfrac{1}{2}ap^2 + bp\sqrt{1+p^2} - b\int\partial p\sqrt{1+p^2},$$

oder nach §. 54. und §. 56.

$$y = \tfrac{1}{2}bp\sqrt{1+p^2} - \tfrac{1}{2}ap^2 - \tfrac{1}{4}bl.(p + \sqrt{1+p^2})^2 + C.$$

Aus dieser Gleichung und aus der Gleichung

$$x = -ap + b\sqrt{1+p^2}$$

müsste man nun noch p eliminiren, um die gesuchte Gleichung zwischen x und y zu erhalten.

Enthält die gegebene Differentialgleichung ausser $\frac{\partial y}{\partial x}$ bloss noch die veränderliche Grösse y und ist in Bezug auf y als unbekannte Grösse leichter auflösbar wie in Bezug auf $\frac{\partial y}{\partial x}$ als unbekannte Grösse; so kann man natürlich auf ganz ähnliche Art wie vorher verfahren.

Ist z. B.

$$yp^3 = a(1+p^2)^2$$

die gegebene Differentialgleichung; so ist

$$y = \frac{a(1+p^2)^2}{p^3}.$$

Setzen wir nun aber

$$\frac{\partial x}{\partial y} = q,\quad p = \frac{1}{q};$$

so ist

$$y = \frac{a(1+q^2)^2}{q},$$

und folglich nach dem Obigen

$$x = a(1+q^2)^2 - a\int\frac{(1+q^2)^2}{q}\partial q$$
$$= a(1+q^2)^2 - a\int\left(\frac{\partial q}{q} + 2q\partial q + q^3\partial q\right)$$
$$= a(1+q^2)^2 - \tfrac{1}{2}al.q^2 - aq^2 - \tfrac{1}{4}aq^4 + C$$
$$= a + aq^2 + \tfrac{3}{4}aq^4 - \tfrac{1}{2}al.q^2 + C.$$

Aus dieser Gleichung und aus der Gleichung

$$qy = a(1+q^2)^2$$

müsste man nun q eliminiren, um die gesuchte Gleichung zwischen x und y zu finden.

§. 128.

Wenn die gegebene Differentialgleichung die beiden Variablen x und y, aber die eine derselben, z. B. y, bloss in der ersten Potenz enthält; so kann man y leicht durch x und $\frac{\partial y}{\partial x} = p$ ausdrücken, und erhält dann durch Differentiation ohne Schwierigkeit

$$\partial y = R\partial x + S\partial p,$$

wo R und S gegebene Functionen von x und p sind. Weil nun $\partial y = p\partial x$ ist; so ist

$$p\partial x = R\partial x + S\partial p$$

oder

$$(R-p)\partial x + S\partial p = 0.$$

Kann man diese Gleichung integriren; so erhält man eine Gleichung zwischen x und p, und erhält dann die gesuchte Gleichung zwischen x und y, wenn man aus der gefundenen Gleichung zwischen x und p und der gegebenen Differentialgleichung die Grösse p eliminirt.

Aus der Differentialgleichung

$$y\partial x - x\partial y = a\sqrt{\partial x^2 + \partial y^2}$$

ergiebt sich z. B.

$$y = px + a\sqrt{1+p^2}$$

und folglich

$$\partial y = p\partial x + x\partial p + \frac{ap\partial p}{\sqrt{1+p^2}}.$$

Aber $\partial y = p\partial x$. Also

$$x\partial p + \frac{ap\partial p}{\sqrt{1+p^2}} = 0.$$

Diese Gleichung lässt sich in die beiden Gleichungen

$$\partial p = 0, \quad x + \frac{ap}{\sqrt{1+p^2}} = 0$$

zerlegen.

Die erste dieser beiden Gleichungen giebt $p = c$, und es ist folglich, wenn man diesen Werth von p in die gegebene Differentialgleichung einführt,

$$y = cx + a\sqrt{1 + c^2}.$$

Aus der zweiten der beiden obigen Gleichungen ergiebt sich

$$p = \pm \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}},$$

und folglich

$$\sqrt{1 + p^2} = -\frac{ap}{x} = \mp \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2}}.$$

Also ist, wenn man diese Werthe von p und $\sqrt{1 + p^2}$ in die gegebene Differentialgleichung einführt,

$$y = \pm \frac{x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} \mp \frac{a^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \mp \frac{a^2 - x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \mp \sqrt{a^2 - x^2},$$

oder

$$y^2 = a^2 - x^2, \quad x^2 + y^2 = a^2.$$

Diese Gleichung enthält keine willkührliche Constante, ist nicht unter der Gleichung

$$y = cx + a\sqrt{1 + c^2}$$

enthalten, und wird daher eine besondere oder partikuläre Auflösung der gegebenen Differentialgleichung genannt, ein Gegenstand, von dem sogleich im folgenden Kapitel ausführlicher die Rede seyn wird.

Jede Differentialgleichung, die sich wie die vorige, wenn $f(p)$ eine blosse Function von p bezeichnet, auf die Form

$$y = px + f(p)$$

bringen lässt, kann nach der vorher angewandten Methode integrirt werden. Man erhält nämlich leicht

$$\partial y = p\,\partial x + \left\{x + \frac{\partial f(p)}{\partial p}\right\} \partial p$$

und folglich

$$p\,\partial x = p\,\partial x + \left\{x + \frac{\partial f(p)}{\partial p}\right\} \partial p,$$

d. i.

$$\left\{x + \frac{\partial f(p)}{\partial p}\right\} \partial p = 0,$$

eine Gleichung, die sich in die beiden Gleichungen

$$\partial p = 0, \quad x + \frac{\partial f(p)}{\partial p} = 0$$

zerlegen lässt.

Die erste giebt $p = c$, und folglich

$$y = cx + f(c).$$

Eliminirt man ferner p aus den beiden Gleichungen

$$y = px + f(p), \quad x + \frac{\partial f(p)}{\partial p} = 0;$$

so erhält man eine Gleichung zwischen x und y, welche keine willkührliche Constante mehr enthält, und deshalb eine partikuläre Auflösung der gegebenen Differentialgleichung ist.

Ist die Differentialgleichung

$$y\partial x - x\sqrt{\partial x^2 + \partial y^2} = 0 \text{ oder } y - x\sqrt{1+p^2} = 0$$

gegeben; so erhält man

$$y = x\sqrt{1+p^2}, \quad \partial y = \partial x\sqrt{1+p^2} + \frac{xp\,\partial p}{\sqrt{1+p^2}},$$

d. i.

$$p\,\partial x = \partial x\sqrt{1+p^2} + \frac{xp\,\partial p}{\sqrt{1+p^2}}$$

oder

$$\frac{\partial x}{x} + \frac{p\,\partial p}{(\sqrt{1+p^2}-p)\sqrt{1+p^2}} = 0,$$

wo nun die veränderlichen Grössen gesondert sind. Multiplicirt man Zähler und Nenner des zweiten Bruchs auf der linken Seite des Gleichheitszeichens mit $\sqrt{1+p^2}+p$; so erhält man

$$\frac{\partial x}{x} + p\,\partial p + \frac{p^2\,\partial p}{\sqrt{1+p^2}} = 0$$

und folglich

$$\tfrac{1}{2}l.x^2 + \tfrac{1}{2}p^2 + \int\frac{p^2\,\partial p}{\sqrt{1+p^2}} = C.$$

Setzt man $p^2 = 1 + p^2 - 1$; so wird

$$\int\frac{p^2\,\partial p}{\sqrt{1+p^2}} = \int\partial p\sqrt{1+p^2} - \int\frac{\partial p}{\sqrt{1+p^2}},$$

d. i. nach §. 56.

$$\int\frac{p^2\,\partial p}{\sqrt{1+p^2}} = \tfrac{1}{2}p\sqrt{1+p^2} - \tfrac{1}{2}\int\frac{\partial p}{\sqrt{1+p^2}},$$

und folglich nach §. 54. I.

$$\int\frac{p^2\,\partial p}{\sqrt{1+p^2}} = \tfrac{1}{2}p\sqrt{1+p^2} - \tfrac{1}{4}l.(p+\sqrt{1+p^2})^2.$$

Also ist

$$\tfrac{1}{2}l.x^2 + \tfrac{1}{2}p^2 + \tfrac{1}{2}p\sqrt{1+p^2} - \tfrac{1}{4}l.(p+\sqrt{1+p^2})^2 = C.$$

Weil nun vermöge der gegebenen Differentialgleichung

$$\sqrt{1+p^2} = \frac{y}{x}, \quad p = \pm\frac{\sqrt{y^2-x^2}}{x}$$

ist; so ist

$$\tfrac{1}{2}l.x^2 + \frac{y^2-x^2 \pm y\sqrt{y^2-x^2}}{2x^2} - \tfrac{1}{2}l.\left(\frac{y\pm\sqrt{y^2-x^2}}{x}\right)^2 = C,$$

$$\tfrac{1}{2}l.x^2 + \frac{y^2-x^2 \pm y\sqrt{y^2-x^2}}{2x^2} + \tfrac{1}{2}l.\left(\frac{x}{y\pm\sqrt{y^2-x^2}}\right)^2 = C,$$

$$\tfrac{1}{2}l.x^2 + \frac{y^2-x^2 \pm y\sqrt{y^2-x^2}}{2x^2} + \tfrac{1}{2}l.\left(\frac{y\mp\sqrt{y^2-x^2}}{x}\right)^2 = C,$$

$$\frac{y^2-x^2 \pm y\sqrt{y^2-x^2}}{2x^2} + \tfrac{1}{2}l.\{x(y\mp\sqrt{y^2-x^2})\}^2 = C,$$

oder, da wir statt $2C$ offenbar auch C setzen können,

$$\frac{y^2-x^2 \pm y\sqrt{y^2-x^2}}{x^2} + \tfrac{1}{2}l.\{x(y\mp\sqrt{y^2-x^2})\}^2 = C.$$

Ist die Gleichung

$$y\partial x - x\partial y = x\sqrt{\partial x^2 + \partial y^2}$$

oder

$$y - px = x\sqrt{1+p^2}$$

gegeben; so ist

$$y = px + x\sqrt{1+p^2},$$

und folglich

$$\partial y = p\partial x + \partial x\sqrt{1+p^2} + x\partial p + \frac{px\partial p}{\sqrt{1+p^2}},$$

oder

$$p\partial x = p\partial x + \partial x\sqrt{1+p^2} + x\partial p + \frac{px\partial p}{\sqrt{1+p^2}},$$

$$0 = \partial x\sqrt{1+p^2} + x\partial p + \frac{px\partial p}{\sqrt{1+p^2}},$$

oder, wenn man die veränderlichen Grössen sondert,

$$\frac{\partial x}{x} + \frac{\partial p}{\sqrt{1+p^2}} + \frac{p\partial p}{1+p^2} = 0.$$

Also ist

$$\int\frac{\partial x}{x} + \int\frac{\partial p}{\sqrt{1+p^2}} + \int\frac{p\partial p}{1+p^2} = C,$$

d. i.

$$\tfrac{1}{2}l.x^2 + \tfrac{1}{2}l.(p+\sqrt{1+p^2})^2 + \tfrac{1}{2}l(1+p^2) = C,$$

oder

$$\tfrac{1}{2}l.x^2 + \tfrac{1}{2}l.(p+\sqrt{1+p^2})^2 + \tfrac{1}{2}l(1+p^2) = \tfrac{1}{2}l.c^2,$$

$$l.\{x(p+\sqrt{1+p^2})\}^2 = l.\frac{c^2}{1+p^2},$$

und folglich

$$x(p+\sqrt{1+p^2}) = \pm\frac{c}{\sqrt{1+p^2}}.$$

Aus dieser Gleichung und aus der gegebenen Differentialgleichung muss man p eliminiren. Weil nun zuvörderst

$$p + \sqrt{1+p^2} = \frac{y}{x}$$

ist; so ist

$$y = \pm \frac{c}{\sqrt{1+p^2}}.$$

Ferner erhält man leicht

$$p = \frac{y^2 - x^2}{2xy}, \quad 1 + p^2 = \left(\frac{x^2+y^2}{2xy}\right)^2.$$

Also ist

$$x^2 + y^2 = \pm 2cx,$$

oder auch, weil die willkührliche Constante c positiv und negativ genommen werden kann, bloss

$$x^2 + y^2 = 2cx, \quad x^2 + y^2 - 2cx = 0.$$

Vierzehntes Kapitel.

Partikuläre Auflösungen der Differentialgleichungen.

§. 129.

Im vorigen Paragraphen fanden wir, dass die Differentialgleichung

$$y\partial x - x\partial y = a\sqrt{\partial x^2 + \partial y^2}$$

neben dem vollständigen oder allgemeinen Integrale

$$y = cx + a\sqrt{1+c^2}$$

auch noch das nicht unter diesem vollständigen oder allgemeinen Integrale enthaltene Integral

$$x^2 + y^2 = a^2$$

hatte, und bemerkten schon damals, dass ein solches nicht unter dem vollständigen oder allgemeinen Integrale einer Differentialgleichung enthaltene Integral dieser Differentialgleichung eine partikuläre oder besondere Auflösung derselben genannt werde. So gestattet auch die Differentialgleichung

$$\partial y^2 - x\partial x\partial y + y\partial x^2 = 0$$

oder

$$\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 - x\frac{\partial y}{\partial x} + y = 0,$$

deren vollständiges Integral

$$4y + 2Cx + C^2 = 0$$

ist, noch die partikuläre Auflösung

$$4y - x^2 = 0.$$

Differentiirt man nämlich diese Gleichung; so erhält man

$$4\frac{\partial y}{\partial x}-2x=0,\quad \frac{\partial y}{\partial x}-\tfrac{1}{2}x=0,\quad \frac{\partial y}{\partial x}=\tfrac{1}{2}x,$$

und folglich

$$\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2-x\frac{\partial y}{\partial x}+y=\tfrac{1}{4}x^2-\tfrac{1}{2}x^2+y=y-\tfrac{1}{4}x^2.$$

Weil aber $4y-x^2=0$ und folglich $y=\frac{1}{4}x^2$ ist; so ist

$$\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2-x\frac{\partial y}{\partial x}+y=0,$$

also in der That

$$4y-x^2=0$$

ein Integral der vorstehenden Differentialgleichung.

Dass die Gleichung

$$4y+2Cx+C^2=0$$

das vollständige Integral der gegebenen Differentialgleichung ist, ergiebt sich eben so leicht durch Differentiation. Es ist nämlich

$$4\frac{\partial y}{\partial x}+2C=0,\quad \frac{\partial y}{\partial x}+\tfrac{1}{2}C=0,\quad \frac{\partial y}{\partial x}=-\tfrac{1}{2}C,$$

und folglich

$$\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2-x\frac{\partial y}{\partial x}+y=\tfrac{1}{4}C^2+\tfrac{1}{2}Cx+y.$$

Weil nun aber

$$4y+2Cx+C^2=0$$

ist; so ist

$$y=-\tfrac{1}{2}Cx-\tfrac{1}{4}C^2,$$

und folglich offenbar

$$\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2-x\frac{\partial y}{\partial x}+y=0,$$

wie es seyn soll.

Unter einem partikulären Integrale einer Differentialgleichung versteht man jedes Integral derselben, welches erhalten wird, wenn man in ihrem vollständigen oder allgemeinen Integrale der willkührlichen Constante irgend einen bestimmten Werth beilegt, so dass also hiernach partikuläre Auflösungen und partikuläre Integrale der Differentialgleichungen wohl von einander zu unterscheiden sind.

Die Natur der partikulären Auflösungen der Differentialgleichungen soll nun etwas näher erörtert werden.

§. 130.

Wir wollen, indem wir der Kürze wegen $\frac{\partial y}{\partial x}=p$ setzen,

annehmen, dass die Differentialgleichung der ersten Ordnung zwischen zwei veränderlichen Grössen

$$U = f(x, y, p) = 0$$

gegeben, und dass

$$V = F(x, y, c) = 0,$$

wo c die willkührliche Constante bezeichnet, das vollständige Integral dieser Differentialgleichung sey; so erhält man, wenn man aus den beiden Gleichungen

$$V = 0, \quad \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)\partial x + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)\partial y = 0$$

die willkührliche Constante c eliminirt, jederzeit die Gleichung

$$U = 0.$$

Ich behaupte nun aber, dass, wenn man aus den beiden Gleichungen

$$V = 0, \quad \left(\frac{\partial V}{\partial c}\right) = 0,$$

wo $\left(\frac{\partial V}{\partial c}\right)$ wie gewöhnlich den partiellen Differentialquotienten der Function V in Bezug auf c als veränderliche Grösse bezeichnet, die Grösse c eliminirt, die dadurch hervorgehende Gleichung jederzeit auch ein Integral der gegebenen Differentialgleichung $U = 0$ ist, wobei sich von selbst versteht, dass die in Rede stehende Gleichung, weil dieselbe offenbar keine willkührliche Constante mehr enthält, eine partikuläre oder besondere Auflösung der Gleichung $U = 0$ ist. Diese Behauptung kann auf folgende Art bewiesen werden.

Um die Grösse c, wie erforderlich ist, aus den beiden Gleichungen

$$V = 0, \quad \left(\frac{\partial V}{\partial c}\right) = 0$$

zu eliminiren, denke man sich dieselbe aus der zweiten Gleichung bestimmt, und den erhaltenen Werth in die erste eingeführt. Durch Bestimmung von c aus der zweiten der beiden obigen Gleichungen ergiebt sich im Allgemeinen $c = \varphi(x, y)$, und die Gleichung, welche man durch Einführung dieses Werthes von c in die erste der beiden obigen Gleichungen erhält, wollen wir durch

$$V' = F(x, y, \varphi(x, y)) = 0$$

bezeichnen, so dass man also offenbar die beiden Gleichungen

$$V' = F(x, y, \varphi(x, y)) = 0, \quad \left(\frac{\partial V'}{\partial \varphi(x, y)}\right) = 0$$

hat, wo wie gewöhnlich

$$\left(\frac{\partial V'}{\partial \varphi(x, y)}\right)$$

den partiellen Differentialquotienten der Function V' in Bezug

auf $\varphi(x, y)$ als unabhängige veränderliche Grösse bezeichnet. Nach der oben ausgesprochenen Behauptung soll nun die Gleichung

$$V' = F(x, y, \varphi(x, y)) = 0$$

ein Integral der Gleichung $U = 0$ seyn, und dass dies wirklich der Fall ist, kann auf folgende Art bewiesen werden.

Nach bekannten Regeln der Differentialrechnung erhält man durch Differentiation der Gleichung

$$V' = F(x, y, \varphi(x, y)) = 0,$$

wenn man bei der Differentiation $\varphi(x, y)$ als eine unabhängige veränderliche Grösse betrachtet, die Gleichung

$$\left(\frac{\partial V'}{\partial x}\right)\partial x + \left(\frac{\partial V'}{\partial y}\right)\partial y + \left(\frac{\partial V'}{\partial \varphi(x, y)}\right)\partial \varphi(x, y) = 0,$$

d. i., weil nach dem Obigen

$$\left(\frac{\partial V'}{\partial \varphi(x, y)}\right) = 0$$

ist, die Gleichung

$$\left(\frac{\partial V'}{\partial x}\right)\partial x + \left(\frac{\partial V'}{\partial y}\right)\partial y = 0,$$

und die Differentialgleichung, deren Integral die Gleichung

$$V' = F(x, y, \varphi(x, y)) = 0$$

ist, ist also offenbar die Gleichung, welche durch Elimination von $\varphi(x, y)$ aus den beiden Gleichungen

$$V' = F(x, y, \varphi(x, y)) = 0, \quad \left(\frac{\partial V'}{\partial x}\right)\partial x + \left(\frac{\partial V'}{\partial y}\right)\partial y = 0$$

erhalten wird. Nun ist aber klar, dass durch Elimination von $\varphi(x, y)$ aus den beiden Gleichungen

$$V' = F(x, y, \varphi(x, y)) = 0, \quad \left(\frac{\partial V'}{\partial x}\right)\partial x + \left(\frac{\partial V'}{\partial y}\right)\partial y = 0,$$

und durch Elimination von c aus den beiden Gleichungen

$$V = F(x, y, c) = 0, \quad \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)\partial x + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)\partial y = 0$$

ganz dieselbe Gleichung erhalten werden muss, und nach dem Obigen liefert die letztere Elimination die Gleichung $U = 0$. Also wird auch durch Elimination von $\varphi(x, y)$ aus den beiden Gleichungen

$$V' = F(x, y, \varphi(x, y)) = 0, \quad \left(\frac{\partial V'}{\partial x}\right)\partial x + \left(\frac{\partial V'}{\partial y}\right)\partial y = 0$$

die Gleichung $U = 0$ erhalten, und nach dem Obigen ist folglich die Gleichung

$$V' = F(x, y, \varphi(x, y)) = 0$$

ein Integral der Gleichung $U = 0$, wie behauptet wurde.

Nach dem so eben Bewiesenen erhält man also aus dem vollständigen Integral

$$V = F(x, y, c) = 0$$

der Differentialgleichung

$$U = f(x, y, p) = 0$$

jederzeit eine partikuläre Auflösung dieser Differentialgleichung, wenn man aus den beiden Gleichungen

$$V = 0, \quad \left(\frac{\partial V}{\partial c}\right) = 0,$$

deren letztere erhalten wird, wenn man den partiellen Differentialquotienten von V in Bezug auf c als veränderliche Grösse $= 0$ setzt, die Grösse c eliminirt.

Diese Regel wollen wir nun im folgenden Paragraphen auf einige Beispiele anwenden.

§. 131.

1. Das vollständige Integral der Differentialgleichung

$$y\partial x - x\partial y = a\sqrt{\partial x^2 + \partial y^2}$$

ist nach §. 128.

$$y - cx - a\sqrt{1+c^2} = 0,$$

so dass also jetzt

$$V = y - cx - a\sqrt{1+c^2}$$

ist. Entwickeln wir nun den partiellen Differentialquotienten von V in Bezug auf c als unabhängige veränderliche Grösse; so erhalten wir

$$\left(\frac{\partial V}{\partial c}\right) = - x - \frac{ac}{\sqrt{1+c^2}},$$

und müssen nun also c aus den beiden Gleichungen

$$y - cx - a\sqrt{1+c^2} = 0, \quad x + \frac{ac}{\sqrt{1+c^2}} = 0$$

climiniren. Aus der zweiten Gleichung erhält man leicht

$$c = \pm \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}, \quad \sqrt{1+c^2} = -\frac{ac}{x} = \mp \frac{a}{\sqrt{a^2-x^2}},$$

und folglich vermöge der ersten Gleichung

$$y \mp \frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}} \pm \frac{a^2}{\sqrt{a^2-x^2}} = y \pm \frac{a^2-x^2}{\sqrt{a^2-x^2}} = y \pm \sqrt{a^2-x^2} = 0$$

oder

$$y = \mp \sqrt{a^2-x^2}, \quad y^2 = a^2 - x^2, \quad x^2 + y^2 = a^2,$$

so dass also

$$x^2 + y^2 = a^2$$

eine partikuläre Auflösung der gegebenen Differentialgleichung ist, wie wir auch schon aus §. 128. wissen.

2. Das vollständige Integral der Differentialgleichung

$$y = px + f(p)$$

ist nach §. 128.

$$y = cx + f(c)$$

oder

$$y - cx - f(c) = 0,$$

und jetzt folglich

$$V = y - cx - f(c);$$

also

$$\left(\frac{\partial V}{\partial c}\right) = -x - \frac{\partial f(c)}{\partial c}.$$

Die gesuchte partikuläre Auflösung ergiebt sich durch Elimination von c aus den beiden Gleichungen

$$y = cx + f(c), \quad x + \frac{\partial f(c)}{\partial c} = 0,$$

offenbar ganz übereinstimmend mit §. 128., da dort die partikuläre Auflösung durch Elimination von p aus

$$y = px + f(p), \quad x + \frac{\partial f(p)}{\partial p} = 0$$

gefunden wurde, welches offenbar ganz zu demselben Resultat wie die obige Elimination von c führen muss.

3. Die Differentialgleichung

$$x\partial x + y\partial y = \partial y\sqrt{x^2 + y^2 - a^2}$$

bringt man leicht auf die Form

$$\partial y = \frac{\partial(x^2 + y^2 - a^2)}{2\sqrt{x^2 + y^2 - a^2}},$$

so dass also offenbar

$$y + c = \sqrt{x^2 + y^2 - a^2},$$

oder, wenn man diese Gleichung rational macht,

$$x^2 - 2cy - c^2 - a^2 = 0$$

das vollständige Integral der obigen Differentialgleichung ist. Setzt man nun

$$V = x^2 - 2cy - c^2 - a^2;$$

so ist

$$\left(\frac{\partial V}{\partial c}\right) = -2y - 2c,$$

und man muss folglich jetzt c aus den beiden Gleichungen

$$x^2 - 2cy - c^2 - a^2 = 0, \quad y + c = 0,$$

oder, was offenbar dasselbe ist, aus den beiden Gleichungen

$$y + c = \sqrt{x^2 + y^2 - a^2}, \quad y + c = 0$$

eliminiren. Dadurch erhält man sogleich als partikuläre Auflösung der gegebenen Differentialgleichung die Gleichung

$$\sqrt{x^2+y^2-a^2}=0 \text{ oder } x^2+y^2-a^2=0.$$

§. 132.

Enthält die Gleichung

$$\left(\frac{\partial V}{\partial c}\right)=0$$

bloss c und constante Grössen; so erhält man, wenn man aus derselben c bestimmt, für diese Grösse einen constanten Werth, und die durch die Elimination von c aus den beiden Gleichungen

$$V=0,\ \left(\frac{\partial V}{\partial c}\right)=0$$

hervorgehende Gleichung wird folglich offenbar aus der Gleichung $V=0$ erhalten, wenn man in derselben für c den vorher gefundenen constanten Werth setzt, so dass also in diesem Falle die Gleichung, welche man durch Elimination von c aus den beiden obigen Gleichungen erhält, keine partikuläre Auflösung, sondern bloss ein partikuläres Integral (§. 129.) der gegebenen Differentialgleichung $U=0$ ist.

Hat die Gleichung $V=0$ die Form

$$P+cQ=0,$$

wo P und Q bloss Functionen von x und y seyn, die Grösse c also gar nicht enthalten sollen; so ist

$$\left(\frac{\partial V}{\partial c}\right)=Q,$$

und die Gleichung

$$\left(\frac{\partial V}{\partial c}\right)=0$$

enthält also die Grösse c gar nicht. In diesem Falle ist die Gleichung $Q=0$ jederzeit selbst ein Integral der Differentialgleichung $U=0$, wie auf folgende Art leicht gezeigt werden kann. Durch Differentiation der Gleichung

$$P+cQ=0$$

erhält man die Gleichung

$$\left\{\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)+c\left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right)\right\}\partial x+\left\{\left(\frac{\partial P}{\partial y}\right)+c\left(\frac{\partial Q}{\partial y}\right)\right\}\partial y=0.$$

Eliminirt man nun aus diesen beiden letzten Gleichungen die Grösse c; so erhält man die Gleichung

$$Q\left\{\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)\partial x+\left(\frac{\partial P}{\partial y}\right)\partial y\right\}-P\left\{\left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right)\partial x+\left(\frac{\partial Q}{\partial y}\right)\partial y\right\}=0,$$

d. i.

$$Q\partial P - P\partial Q = 0,$$

und diese Gleichung muss also, weil die Gleichung $P + cQ = 0$ das vollständige Integral der Gleichung $U = 0$ ist, mit dieser letzten Gleichung identisch seyn. Aus $Q = 0$ folgt aber $\partial Q = 0$, und man sieht also, dass, wenn $Q = 0$ ist, jederzeit auch die Gleichung

$$Q\partial P - P\partial Q = 0,$$

d. i. nach dem Vorhergehenden die Gleichung $U = 0$ erfüllt, die Gleichung $Q = 0$ folglich ein Integral der Gleichung $U = 0$ ist, wie behauptet wurde. Weil aber die Gleichung

$$P + cQ = 0$$

sich unter der Form

$$\frac{P}{c} + Q = 0$$

darstellen lässt, und folglich offenbar für $c = \infty$ in die Gleichung $Q = 0$ übergeht; so ist die Gleichung $Q = 0$ nicht als eine partikuläre Auflösung, sondern bloss als ein partikuläres Integral (§. 129.) der Gleichung $U = 0$ zu betrachten.

Das vollständige Integral der Gleichung

$$y\partial x - x\partial y = x\sqrt{\partial x^2 + \partial y^2}$$

ist nach §. 128.

$$x^2 + y^2 - 2cx = 0.$$

Also ist nach dem Vorhergehenden $x = 0$ ein partikuläres Integral der vorstehenden Differentialgleichung.

Eine weitere Ausführung der interessanten Lehre von den partikulären Auflösungen der Differentialgleichungen gestattet der Zweck dieses Lehrbuchs nicht.

Funfzehntes Kapitel.

Auflösung einiger geometrischen Aufgaben.

§. 133.

Die Aufgabe: die Curven zu finden, deren Subtangente eine gegebene Function X der Abscisse x ist, führt sogleich auf die Differentialgleichung

$$\frac{y\partial x}{\partial y} = X.$$

Durch Sonderung der veränderlichen Grössen ergiebt sich

$$\frac{\partial y}{y} = \frac{\partial x}{X},$$

und folglich, wenn man integrirt,

$$\tfrac{1}{2} l.y^2 = \int \frac{\partial x}{X} + c.$$

Soll man z. B. die Curven finden, deren Subtangente a ist; so hat man die Gleichung

$$\tfrac{1}{2} l.y^2 = \int \frac{\partial x}{a} + c = \frac{x}{a} + c$$

oder

$$l.y^2 = 2\left(\frac{x}{a} + c\right),$$

und folglich

$$y^2 = e^{2\left(\frac{x}{a}+c\right)}, \quad y = \pm e^{\frac{x}{a}+c} = \pm e^c . e^{\frac{x}{a}},$$

oder, wenn man C statt $\pm e^c$ setzt,

$$y = Ce^{\frac{x}{a}}.$$

Dies ist die allgemeine Gleichung der gesuchten Curven, unter denen offenbar die gewöhnliche logarithmische Linie enthalten ist.

Soll man die Curven finden, bei denen die Subtangente der doppelten Abscisse gleich ist; so hat man die Gleichung

$$\tfrac{1}{2} l.y^2 = \tfrac{1}{2}\int \frac{\partial x}{x} + c = \tfrac{1}{4} l.x^2 + c$$

oder

$$2 l.y^2 = l.y^4 = l.x^2 + 4c = l.x^2 + l.e^{4c} = l.e^{4c}x^2,$$

und folglich

$$y^4 = e^{4c}x^2, \quad y^2 = \pm e^{2c}x = Cx,$$

wenn man $\pm e^{2c} = C$ setzt. Hieraus sieht man, dass nur allein die apollonische Parabel die Eigenschaft hat, dass die Subtangente der doppelten Abscisse gleich ist.

§. 134.

Wenn man eine in der Gleichung $\varphi(x', y') = 0$ einer Curve enthaltene constante Grösse, wie z. B. den Parameter in der Gleichung der apollonischen Parabel, sich stetig verändern lässt; so erhält man eine stetige Folge von Gleichungen, denen eine stetige Folge von Curven entspricht, die alle von einerlei Art sind, weil sie sämmtlich durch die allgemeine Gleichung $\varphi(x', y') = 0$ bestimmt werden. Eine alle diese gleichartigen Curven unter ein und denselben Winkel schneidende Curve heisst eine Trajectorie derselben, und zwar eine orthogonale Trajectorie, wenn der gegebene Winkel ein rechter Winkel ist. Das berühmte Problem der Trajectorien sucht die Trajectorie gegebener Curven in jedem Falle zu bestimmen. Die constante Grösse in der Gleichung $\varphi(x', y') = 0$, durch deren Veränderung die stetige Folge von Curven erhalten wird, welche von

der Trajectorie sämmtlich unter ein und demselben Winkel geschnitten werden sollen, wollen wir im Folgenden immer durch k bezeichnen.

Bezeichnen wir die trigonometrische Tangente des gegebenen Winkels durch a, die Coordinaten der Trajectorie durch x, y; so ergiebt sich aus den Bedingungen der Aufgabe und bekannten Formeln der Differentialrechnung und der analytischen Geometrie sogleich die Gleichung

$$a = \frac{\frac{\partial y}{\partial x} - \frac{\partial y'}{\partial x'}}{1 + \frac{\partial y}{\partial x} \cdot \frac{\partial y'}{\partial x'}},$$

oder, wenn wir den Differentialquotienten $\frac{\partial y'}{\partial x'}$, der aus der gegebenen Gleichung $\varphi(x', y') = 0$ immer entwickelt werden kann, durch p' bezeichnen, die Gleichung

$$a\left(1 + p'\frac{\partial y}{\partial x}\right) + p' - \frac{\partial y}{\partial x} = 0.$$

Ueberlegt man nun aber, dass die gegebenen Curven in den Punkten, in denen sie von der Trajectorie geschnitten werden, dieselben Coordinaten wie die Trajectorie haben, und bezeichnet den Werth, welchen der Differentialquotient p' erhält, wenn man x, y für x', y' setzt, durch p; so wird man sich leicht überzeugen, dass zwischen den Grössen k, x, y jederzeit die zwei Gleichungen

$$\varphi(x, y) = 0, \quad a\left(1 + p\frac{\partial y}{\partial x}\right) + p - \frac{\partial y}{\partial x} = 0$$

Statt finden müssen. Aus diesen beiden Gleichungen ergiebt sich die gesuchte Gleichung der Trajectorie zwischen x und y, wenn man aus denselben die Grösse k eliminirt.

Weil die zweite der beiden obigen Gleichungen auch unter der Form

$$1 + p\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{1}{a}\left(p - \frac{\partial y}{\partial x}\right) = 0$$

dargestellt werden kann, und für orthogonale Trajectorien $\frac{1}{a} = 0$ ist; so wird man, wenn die gesuchte Trajectorie eine orthogonale seyn soll, die Grösse k aus den beiden Gleichungen

$$\varphi(x, y) = 0, \quad 1 + p\frac{\partial y}{\partial x} = 0$$

eliminiren müssen.

Soll die Trajectorie einer stetigen Folge durch den Anfang der Coordinaten gehender gerader Linien gefunden werden; so ist die gegebene Gleichung $y' = kx'$, und folglich $p' = k$, $p = k$. Also muss man k aus den beiden Gleichungen

$$y = kx, \quad a\left(1 + k\frac{\partial y}{\partial x}\right) + k - \frac{\partial y}{\partial x} = 0$$

eliminiren. Dadurch erhält man als Differentialgleichung der gesuchten Trajectorie die Gleichung

$$a(x\partial x + y\partial y) + y\partial x - x\partial y = 0.$$

Bringt man diese Gleichung auf die Form

$$(ax + y)\partial x + (ay - x)\partial y = 0;$$

so übersieht man sogleich, dass sich dieselbe nach §. 119. integriren lässt. Setzt man nun $y = xz$; so erhält man nach leichter Rechnung

$$\frac{\partial x}{x} + \frac{(az - 1)\partial z}{a(1 + z^2)} = 0,$$

und folglich

$$\tfrac{1}{2}l.x^2 + \int\frac{z\partial z}{1 + z^2} - \frac{1}{a}\int\frac{\partial z}{1 + z^2} = C,$$

d. i.

$$\tfrac{1}{2}l.x^2 + \tfrac{1}{2}l(1 + z^2) - \frac{1}{a}\,Arc\,tang\,z = C,$$

oder

$$\tfrac{1}{2}l.x^2 + \tfrac{1}{2}l\frac{x^2 + y^2}{x^2} - \frac{1}{a}\,Arc\,tang\frac{y}{x} = C,$$

oder

$$al\sqrt{x^2 + y^2} - Arc\,tang\frac{y}{x} = aC,$$

oder, wenn man $C = lc$ setzt,

$$al\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{c} = Arc\,tang\frac{y}{x}.$$

Nimmt man den Anfangspunkt der Coordinaten als den Pol eines Systems der polaren Coordinaten φ, z an; so ist

$$z = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad y = x\,tang\,\varphi, \quad \varphi = Arc\,tang\frac{y}{x},$$

und folglich

$$l\frac{z}{c} = \frac{\varphi}{a}.$$

Die unter dieser Polargleichung enthaltenen Curven nennt man logarithmische Spiralen.

Soll die gesuchte Trajectorie eine orthogonale seyn; so ist $a = \infty$, $\frac{1}{a} = 0$, und folglich

$$l\frac{z}{c} = 0, \quad \frac{z}{c} = 1, \quad z = c,$$

d. h. die Trajectorie ist ein Kreis, weil der Radius vector z eine constante Grösse ist.

Ist $y'^n = kx'^m$ die gegebene Gleichung; so ist

$$p' = \frac{mkx'^{m-1}}{ny'^{n-1}}, \quad p = \frac{mkx^{m-1}}{ny^{n-1}}.$$

Um nun die Gleichung der orthogonalen Trajectorie zu finden, muss man k aus den beiden Gleichungen

$$y^n = kx^m, \quad 1 + \frac{mkx^{m-1}}{ny^{n-1}} \cdot \frac{\partial y}{\partial x} = 0$$

eliminiren. Dadurch erhält man die Gleichung

$$nx\partial x + my\partial y = 0,$$

in welcher die veränderlichen Grössen schon gesondert sind. Integrirt man nun; so erhält man

$$nx^2 + my^2 = C,$$

woraus erhellet, dass die gesuchte orthogonale Trajectorie entweder eine Ellipse oder eine Hyperbel ist. Die unter der gegebenen Gleichung $y'^n = kx'^m$ enthaltenen Curven nennt man überhaupt Parabeln. Die apollonische Parabel erhält man für $m = 1$, $n = 2$.

§. 135.

Wir wollen nun noch die Curve zu bestimmen suchen, welche die Eigenschaft hat, dass alle von einem gegebenen Punkte auf ihre Tangenten gefällten Perpendikel die gegebene Länge a haben.

Man nehme den gegebenen Punkt als Anfang der Coordinaten an. Die Gleichung der durch den Punkt xy der gesuchten Curve gezogenen Tangente ist bekanntlich

$$u - y = \frac{\partial y}{\partial x}(z - x).$$

Die Gleichung des von dem Anfange der Coordinaten, d. i. von dem gegebenen Punkte, auf diese Tangente gefällten Perpendikels ist nach Principien der analytischen Geometrie

$$u = -\frac{\partial x}{\partial y} z.$$

Aus diesen beiden Gleichungen erhalten wir, wenn z, u die Coordinaten des Durchschnittspunkts der beiden denselben entsprechenden Linien bezeichnen,

$$z = -\frac{y\partial x - x\partial y}{\partial x^2 + \partial y^2}\partial y, \quad u = \frac{y\partial x - x\partial y}{\partial x^2 + \partial y^2}\partial x.$$

Nach den Bedingungen der Aufgabe und bekannten Formeln der analytischen Geometrie erhält man nun die Gleichung

$$\frac{(y\partial x - x\partial y)^2}{\partial x^2 + \partial y^2} = a^2, \quad (y\partial x - x\partial y)^2 = a^2(\partial x^2 + \partial y^2);$$

also

$$y\partial x - x\partial y = \pm a\sqrt{\partial x^2 + \partial y^2}.$$

Das vollständige Integral dieser Gleichung ist nach §. 128.

$$y = cx \pm a\sqrt{1 + c^2},$$

und jede durch diese Gleichung dargestellte gerade Linie hat also die in der Aufgabe verlangte Eigenschaft.

Da aber nach §. 131. 1. die obige Differentialgleichung auch noch die partikuläre Auflösung

$$x^2 + y^2 = a^2$$

zulässt; so genügt auch der dieser letztern Gleichung entsprechende Kreis der vorgelegten Aufgabe.

Aus diesem einfachen Beispiele erhellet zugleich, wie wichtig die partikulären Auflösungen der Differentialgleichungen bei auf Differentialgleichungen führenden geometrischen Aufgaben sind.

Sechszehntes Kapitel.

Integration der Differentialgleichungen der zweiten Ordnung zwischen zwei veränderlichen Grössen.

§. 136.

Wir müssen uns in diesem Kapitel mit der Integration einiger besonders wichtigen Differentialgleichungen der zweiten Ordnung zwischen zwei veränderlichen Grössen, d. i. solcher, welche ausser dem ersten auch noch den zweiten Differentialquotienten, oder letztern allein enthalten, begnügen. Zuerst wollen wir nur einige ganz einfache Fälle betrachten, wobei immer X eine Function von x allein, Y eine Function von y allein bezeichnen soll.

$$1. \quad \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + X = 0.$$

Stellt man diese Gleichung unter der Form

$$\partial\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right) + X\partial x = 0$$

dar, und integrirt dann; so ergiebt sich

$$\frac{\partial y}{\partial x} + \int X\partial x = C,$$

oder

$$\partial y + \partial x\int X\partial x = C\partial x,$$

und folglich, wenn man nun wieder integrirt,

$$y + \int\partial x\int X\partial x = Cx + C',$$

wo C und C' zwei willkührliche Constanten sind.

$$2. \quad \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + Y = 0.$$

Diese Gleichung kann man unter der Form

$$2\frac{\partial y}{\partial x}\partial\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right) + 2Y\partial y = 0$$

darstellen. Integrirt man nun, so erhält man

$$\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 + 2\int Y\partial y = C,$$

und folglich

$$\partial y = \partial x \sqrt{C - 2\int Y\partial y},$$

oder

$$\partial x = \frac{\partial y}{\sqrt{C - 2\int Y\partial y}}.$$

Also ist

$$x = \int \frac{\partial y}{\sqrt{C - 2\int Y\partial y}} + C',$$

wo C und C' wieder zwei willkührliche Constanten sind.

$$3.\quad \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + X\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 = 0.$$

Diese Gleichung kann man auf die Form

$$\frac{\partial^2 y}{\partial y^2} + X = 0 \quad \text{oder} \quad \frac{\partial^2 y \partial x}{\partial y^2} + X\partial x = 0$$

bringen. Weil nun

$$\partial\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right) = -\frac{\partial x \partial^2 y}{\partial y^2}, \quad \int \frac{\partial^2 y \partial x}{\partial y^2} = -\frac{\partial x}{\partial y}$$

ist; so erhält man durch Integration der obigen Gleichung leicht

$$-\frac{\partial x}{\partial y} + \int X\partial x = C, \quad \partial y = \frac{\partial x}{\int X\partial x - C},$$

und folglich

$$y = \int \frac{\partial x}{\int X\partial x - C} + C'.$$

$$4.\quad \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + Y\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 = 0.$$

Diese Gleichung kann man auf die Form

$$\frac{\partial^2 y}{\partial y} + Y\partial y = 0 \quad \text{oder} \quad \frac{\partial\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)}{\frac{\partial y}{\partial x}} + Y\partial y = 0$$

bringen. Integrirt man nun, so ergiebt sich

$$\tfrac{1}{2} l.\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 + \int Y\partial y = c, \quad l.\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 = 2(c - \int Y\partial y),$$

und folglich

$$\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 = e^{2(c-\int Y\partial y)}, \quad \frac{\partial y}{\partial x} = \pm e^c . e^{-\int Y\partial y},$$

oder, wenn man $\pm e^c = C^{-1}$ setzt,

$$\partial x = C\partial y e^{\int Y\partial y},$$

und folglich

$$x = C\int \partial y e^{\int Y\partial y} + C'.$$

$$5. \quad \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + X\frac{\partial y}{\partial x} = 0.$$

Diese Gleichung lässt sich auf die Form

$$\frac{\partial^2 y}{\partial y} + X\partial x = 0 \text{ oder } \frac{\partial\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)}{\frac{\partial y}{\partial x}} + X\partial x = 0$$

bringen. Integrirt man nun, so erhält man

$$\tfrac{1}{2}l.\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 + \int X\partial x = c, \quad l.\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 = 2(c - \int X\partial x),$$

und folglich

$$\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 = e^{2(c-\int X\partial x)}, \quad \frac{\partial y}{\partial x} = \pm e^c . e^{-\int X\partial x}.$$

Also ist, wenn man $\pm e^c = C$ setzt,

$$y = C\int \partial x e^{-\int X\partial x} + C'.$$

$$6. \quad \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + Y\frac{\partial y}{\partial x} = 0.$$

Diese Gleichung kann man auf die Form

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x} + Y\partial y = 0 \text{ oder } \partial\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right) + Y\partial y = 0$$

bringen, und erhält nun durch Integration

$$\frac{\partial y}{\partial x} + \int Y\partial y = C, \quad \partial x = \frac{\partial y}{C - \int Y\partial y},$$

also

$$x = \int \frac{\partial y}{C - \int Y\partial y} + C'.$$

Alle hier gefundenen Integrale enthalten zwei willkührliche Constanten, und es wird nun auch leicht im Allgemeinen erhellen, dass überhaupt das Integral jeder Differentialgleichung der zweiten Ordnung zwischen zwei veränderlichen Grössen zwei willkührliche Constanten enthalten muss.

§. 137.

Wenn eine Differentialgleichung der zweiten Ordnung bloss $\frac{\partial y}{\partial x}$ und $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ ohne x und y enthält; so setze man $\frac{\partial y}{\partial x} = p$, $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\partial p}{\partial x}$. Dann wird sich die gegebene Differentialgleichung offenbar immer auf die Form $\frac{\partial p}{\partial x} = P$ oder $\partial x = \frac{\partial p}{P}$, wo P eine Function von p allein ist, bringen lassen. Integrirt man nun, so erhält man

$$1.\quad x = \int \frac{\partial p}{P} + C.$$

Weil aber

$$\partial y = p\,\partial x = \frac{p\,\partial p}{P}$$

ist; so ist

$$2.\quad y = \int \frac{p\,\partial p}{P} + C',$$

und man wird nun durch Elimination der Grösse p aus den Gleichungen 1. und 2. die gesuchte Gleichung zwischen x und y erhalten, wobei zugleich klar ist, dass diese Gleichung wieder zwei willkührliche Constanten enthalten wird.

§. 138.

Wenn eine Differentialgleichung der zweiten Ordnung $\frac{\partial y}{\partial x}$, $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ und x, aber nicht y enthält; so setze man wieder $\frac{\partial y}{\partial x} = p$, $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\partial p}{\partial x}$. Dadurch verwandelt sich die gegebene Differentialgleichung in eine Differentialgleichung der ersten Ordnung zwischen x und p. Kann man diese Differentialgleichung integriren und p durch x ausdrücken; so ist, weil $\partial y = p\,\partial x$ ist, $y = C + \int p\,\partial x$. Sollte sich aber leichter x durch p ausdrücken lassen; so würde nach §. 27. $y = px - \int x\,\partial p$ seyn.

Enthält die gegebene Differentialgleichung $\frac{\partial y}{\partial x}$, $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ und y, aber nicht x; so setze man wieder $\frac{\partial y}{\partial x} = p$. Dann ist

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial x} = p\,\frac{\partial p}{\partial y},$$

und nach gehöriger Substitution erhält man offenbar eine Differentialgleichung der ersten Ordnung zwischen p und y. Kann man diese Gleichung integriren und p durch y ausdrücken; so ist offenbar $x = C + \int \frac{\partial y}{p}$. Sollte sich aber y leichter durch p ausdrücken lassen; so würde nach §. 27. $x = \frac{y}{p} + \int \frac{y\,\partial p}{p^2}$ seyn.

§. 139.

Wir wollen uns nun mit der Integration der Gleichung

$$A\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}+B\frac{\partial y}{\partial x}+Cy=0,$$

wo A, B, C constante Grössen bezeichnen sollen, beschäftigen.

Man setze, um diese Gleichung zu integriren, $y=e^{\int z\partial x}$, wo z eine neue Function von x bezeichnet; so ist

$$\frac{\partial y}{\partial x}=ze^{\int z\partial x},\quad \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}=\left(z^2+\frac{\partial z}{\partial x}\right)e^{\int z\partial x},$$

und folglich

$$A\left(z^2+\frac{\partial z}{\partial x}\right)+Bz+C=0,$$

welches eine Differentialgleichung der ersten Ornnung ist, durch deren Integration die Function z bestimmt werden muss. Bringt man aber diese Differentialgleichung auf die Form

$$\partial x+\frac{A\partial z}{Az^2+Bz+C}=0;$$

so sind die veränderlichen Grössen gesondert, und die Gleichung lässt sich also integriren. Hat man aber auf diese Art z bestimmt; so ist auch $y=e^{\int z\partial x}$ gefunden.

Die gegebene Gleichung lässt sich aber noch auf eine andere merkwürdige Art integriren. Setzt man nämlich $y=ce^{\theta x}$, wo c und θ constante Grössen bezeichnen sollen; so ist

$$\frac{\partial y}{\partial x}=c\theta e^{\theta x},\quad \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}=c\theta^2 e^{\theta x},$$

und folglich

$$A\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}+B\frac{\partial y}{\partial x}+Cy=(A\theta^2+B\theta+C)ce^{\theta x}.$$

Also wird die Gleichung

$$A\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}+B\frac{\partial y}{\partial x}+Cy=0$$

offenbar erfüllt werden, wenn man $y=ce^{\theta x}$ und für θ eine Wurzel der Gleichung

$$A\theta^2+B\theta+C=0$$

setzt. c ist eine ganz willkührliche Constante.

Sind nun λ und λ' die beiden Wurzeln der quadratischen Gleichung

$$A\theta^2+B\theta+C=0;$$

so genügt sowohl $y=ce^{\lambda x}$, als auch $y=c'e^{\lambda' x}$, wo c und c' willkührliche Constanten sind, der gegebenen Gleichung, und ich behaupte nun, dass auch

$$y=ce^{\lambda x}+c'e^{\lambda x'}$$

dieser Gleichung genügt, wie auf folgende Art leicht gezeigt werden kann.

Man setze $z = ce^{\lambda x}$, $z' = c'e^{\lambda' x}$, und

$$y = z + z' = ce^{\lambda x} + c'e^{\lambda' x};$$

so ist

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z'}{\partial x}, \quad \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z'}{\partial x^2},$$

und folglich

$$A\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + B\frac{\partial y}{\partial x} + Cy$$

$$= A\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + B\frac{\partial z}{\partial x} + Cz + A\frac{\partial^2 z'}{\partial x^2} + B\frac{\partial z'}{\partial x} + Cz'.$$

Weil nun nach dem Obigen

$$A\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + B\frac{\partial z}{\partial x} + Cz = 0, \quad A\frac{\partial^2 z'}{\partial x^2} + B\frac{\partial z'}{\partial x} + Cz' = 0$$

ist; so ist auch

$$A\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + B\frac{\partial y}{\partial x} + Cy = 0,$$

wie behauptet wurde.

In Bezug auf die Wurzeln λ und λ' der quadratischen Gleichung

$$A\theta^2 + B\theta + C = 0$$

wollen wir nun die drei folgenden Fälle unterscheiden.

I. Wenn die Wurzeln λ und λ' reell und ungleich sind; so enthält das Integral

$$y = ce^{\lambda x} + c'e^{\lambda' x}$$

unserer Differentialgleichung zwei willkührliche Constanten, und ist daher offenbar als das vollständige Integral dieser Differentialgleichung zu betrachten.

II. Wenn aber die Wurzeln λ und λ' reell und einander gleich sind; so ist

$$y = ce^{\lambda x} + c'e^{\lambda' x} = (c + c')e^{\lambda x},$$

und dieses Integral ist also, weil es offenbar nur die eine willkührliche Constante $c + c'$ enthält, bloss als ein partikuläres Integral der gegebenen Differentialgleichung zu betrachten. In diesem Falle kann man aber, die zu Anfange dieses Paragraphen gelehrte Methode anwendend, auf folgende Art verfahren.

Nach einem bekannten Satze von den Gleichungen ist

$$Az^2 + Bz + C = A(z - \lambda)^2,$$

und folglich

$$\frac{A\partial z}{Az^2 + Bz + C} = \frac{\partial z}{(z - \lambda)^2};$$

also

$$\int \frac{A\partial z}{Az^2 + Bz + C} = -\frac{1}{z - \lambda} + c.$$

Daher ist nach dem Obigen.

$$x - \frac{1}{z - \lambda} + c = 0$$

und folglich

$$z = \frac{1}{c + x} + \lambda;$$

$$\int z\partial x = \int \frac{\partial x}{c + x} + \int \lambda \partial x = \tfrac{1}{2} l.(c + x)^2 + \lambda x + c'.$$

Also ist nach dem Obigen

$$y = e^{\int z\partial x} = e^{c'} e^{\lambda x} e^{\frac{1}{2} l.(c + x)^2} = \pm e^{c'} e^{\lambda x}(c + x),$$

oder, wenn man jetzt für $\pm ce^{c'}$ und $\pm e^{c'}$ respective c und c' setzt,

$$y = e^{\lambda x}(c + c'x),$$

welches Integral nun zwei willkührliche Constanten enthält, und daher als das vollständige Integral unserer Differentialgleichung zu betrachten seyn wird.

III. Wenn die Wurzeln λ und λ' beide imaginär sind; so sey

$$\lambda = \alpha + \beta\sqrt{-1}, \quad \lambda' = \alpha - \beta\sqrt{-1}.$$

Dann ist nach D. §. 126.

$$e^{\lambda x} = e^{\alpha x} e^{\beta x\sqrt{-1}} = e^{\alpha x}(\cos\beta x + \sin\beta x.\sqrt{-1}),$$

$$e^{\lambda' x} = e^{\alpha x} e^{-\beta x\sqrt{-1}} = e^{\alpha x}(\cos\beta x - \sin\beta x.\sqrt{-1}).$$

Folglich ist

$$y = e^{\alpha x}\{(c + c')\cos\beta x + (c - c')\sin\beta x.\sqrt{-1}\},$$

oder, wenn man jetzt für $c + c'$ und $(c - c')\sqrt{-1}$ respective c und c' setzt,

$$y = e^{\alpha x}(c\cos\beta x + c'\sin\beta x).$$

§. 140.

Die Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + P\frac{\partial y}{\partial x} + Qy = 0,$$

wo P und Q Functionen von x bezeichnen sollen, kann durch die Substitution $y = e^{\int z\partial x}$ immer auf eine Differentialgleichung der ersten Ordnung zurückgeführt werden, indem man durch diese Substitution auf ganz ähnliche Art wie im vorigen Paragraphen die Gleichung

$$z^2 + \frac{\partial z}{\partial x} + Pz + Q = 0$$

erhält. Kann man aus dieser Gleichung z bestimmen; so ist auch $y = e^{\int z\partial x}$ als gefunden zu betrachten.

Kennt man zwei partikuläre Integrale unserer Differentialgleichung; so ist, wenn diese beiden partikulären Integrale durch z und z' bezeichnet werden,

$$y = cz + c'z',$$

wo c und c' zwei willkührliche Constanten sind, das vollständige Integral.

Es ist nämlich

$$\frac{\partial y}{\partial x} = c\frac{\partial z}{\partial x} + c'\frac{\partial z'}{\partial x}, \quad \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = c\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + c'\frac{\partial^2 z'}{\partial x^2},$$

und folglich

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + P\frac{\partial y}{\partial x} + Qy$$

$$= c\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + P\frac{\partial z}{\partial x} + Qz\right) + c'\left(\frac{\partial^2 z'}{\partial x^2} + P\frac{\partial z'}{\partial x} + Qz'\right);$$

also, weil nach der Voraussetzung

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + P\frac{\partial z}{\partial x} + Qz = 0, \quad \frac{\partial^2 z'}{\partial x^2} + P\frac{\partial z'}{\partial x} + Qz' = 0$$

ist,

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + P\frac{\partial y}{\partial x} + Qy = 0,$$

wie erfordert wird.

Kennt man nur **ein** partikuläres Integral z; so setze man $y = zt$, wo t eine noch unbestimmte Function von x bezeichnet. Dann ist

$$\frac{\partial y}{\partial x} = t\frac{\partial z}{\partial x} + z\frac{\partial t}{\partial x}, \quad \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = t\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial t}{\partial x} + z\frac{\partial^2 t}{\partial x^2},$$

und folglich

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + P\frac{\partial y}{\partial x} + Qy$$

$$= t\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + P\frac{\partial z}{\partial x} + Qz\right) + 2\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial t}{\partial x} + z\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + Pz\frac{\partial t}{\partial x},$$

d. i., weil nach der Voraussetzung

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + P\frac{\partial z}{\partial x} + Qz = 0$$

ist,

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + P\frac{\partial y}{\partial x} + Qy = 2\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial t}{\partial x} + z\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + Pz\frac{\partial t}{\partial x}.$$

Soll nun

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + P\frac{\partial y}{\partial x} + Qy = 0$$

seyn; so muss t so bestimmt werden, dass

$$2\frac{\partial x}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial x} + x\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + Px\frac{\partial z}{\partial x} = 0$$

ist. Zu dem Ende setze man $\frac{\partial z}{\partial x} = u$; so wird

$$x\frac{\partial u}{\partial x} + \left(Px + 2\frac{\partial x}{\partial x}\right)u = 0$$

oder

$$P\partial x + \frac{\partial u}{u} + 2\frac{\partial x}{x} = 0,$$

und folglich

$$\int P\partial x + \tfrac{1}{2}l.u^2 + l.x^2 = l.c^2$$

oder

$$-\int P\partial x = \tfrac{1}{2}l.u^2 + l.x^2 - l.c^2.$$

Also ist

$$e^{-\int P\partial x} = e^{\frac{1}{2}l.u^2}.e^{l.x^2}.e^{-l.c^2} = \pm\frac{ux^2}{c^2},$$

oder, wenn wir $\pm c^2 = C$ setzen,

$$u = \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{C}{x^2}e^{-\int P\partial x},\ \ \partial z = \frac{C\partial x}{x^2}e^{-\int P\partial x};$$

folglich

$$z = C + C\int\frac{\partial x}{x^2}e^{-\int P\partial x},$$

und daher nach dem Obigen

$$y = Cx + Cx\int\frac{\partial x}{x^2}e^{-\int P\partial x},$$

wodurch also y gefunden ist.

§. 141.

Die Integration der Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + P\frac{\partial y}{\partial x} + Qy = R,$$

wo P, Q, R Functionen von x seyn sollen, hängt von der Integration der im vorigen Paragraphen betrachteten Differentialgleichung ab, welches auf folgende Art gezeigt werden kann.

Man setze $y = Vz$, wo V und z noch unbestimmte Functionen von x bezeichnen; so wird die gegebene Gleichung

$$V\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + P\frac{\partial z}{\partial x} + Qz\right) + 2\frac{\partial V}{\partial x}\cdot\frac{\partial z}{\partial x} + Pz\frac{\partial V}{\partial x} + z\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = R.$$

Nun bestimme man nach §. 140. z aus der Gleichung

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + P\frac{\partial z}{\partial x} + Qz = 0;$$

so ist ferner V aus der Gleichung

$$2\frac{\partial V}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial x} + Pz\frac{\partial V}{\partial x} + z\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = R$$

zu bestimmen.

Setzt man zu dem Ende $\frac{\partial V}{\partial x} = U$; so wird die vorstehende Gleichung

$$\partial U + \left(P + 2\frac{\partial z}{z\partial x}\right)U\partial x = \frac{R\partial x}{z}.$$

Diese Gleichung lässt sich nach §. 122. integriren, indem man nämlich nach diesem Paragraphen

$$U = e^{-\int(P\partial x + \frac{2\partial z}{z})}\left\{\int e^{\int(P\partial x + \frac{2\partial z}{z})}.\frac{R\partial x}{z} + C\right\},$$

oder, weil

$$e^{-\int\frac{2\partial z}{z}} = \frac{1}{z^2}, \quad e^{\int\frac{2\partial z}{z}} = z^2$$

ist,

$$U = \frac{e^{-\int P\partial x}}{z^2}\left\{\int e^{\int P\partial x}Rz\partial x + C\right\}$$

erhält.

Ferner ist nun

$$V = \int U\partial x + C', \quad y = z\int U\partial x + C'z,$$

wodurch also, wenn man nur z bestimmt hat, y gefunden ist.

§. 142.

Die Integration der Gleichung

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + A\frac{\partial y}{\partial x} + By = R,$$

wo A und B constante Grössen bezeichnen sollen, hängt nach §. 141. von der Integration der Gleichung

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + A\frac{\partial z}{\partial x} + Bz = 0$$

ab.

Dieser Gleichung wird nach §. 139. Genüge geleistet, wenn man, indem λ eine Wurzel der quadratischen Gleichung

$$\theta^2 + A\theta + B = 0$$

ist, $z = e^{\lambda x}$ setzt. Dadurch wird nach §. 141. im vorliegenden Falle

$$U = e^{-(A + 2\lambda)x}\{\int e^{(A+\lambda)x}R\partial x + C\}.$$

Weil aber nach der Theorie der quadratischen Gleichungen, wenn λ' die zweite Wurzel der obigen quadratischen Gleichungen be-

zeichnet, $A=-\lambda-\lambda'$, $A+2\lambda=\lambda-\lambda'$, $A+\lambda=-\lambda$ ist; so ist

$$U=e^{-(\lambda-\lambda')x}\{\int e^{-\lambda' x}R\partial x+C\},$$

und folglich

$$V=\int e^{-(\lambda-\lambda')x}\partial x\int e^{-\lambda' x}R\partial x+C\int e^{-(\lambda-\lambda')x}\partial x+C',$$

wo wir nun wieder die drei folgenden Fälle unterscheiden wollen.

I. Wenn die Wurzeln λ, λ' beide reell und ungleich sind; so erhält man

$$V=\int e^{-\lambda' x}R\partial x.\int e^{-(\lambda-\lambda')x}\partial x-\int e^{-\lambda' x}R\partial x\int e^{-(\lambda-\lambda')x}\partial x$$
$$+C\int e^{-(\lambda-\lambda')x}\partial x+C'$$
$$=\frac{\int e^{-\lambda x}R\partial x-e^{-(\lambda-\lambda')x}\int e^{-\lambda' x}R\partial x-Ce^{-(\lambda-\lambda')x}}{\lambda-\lambda'}+C',$$

und folglich nach §. 141.

$$y=\frac{e^{\lambda x}\int e^{-\lambda x}R\partial x-e^{\lambda' x}\int e^{-\lambda' x}R\partial x}{\lambda-\lambda'}-\frac{Ce^{\lambda' x}}{\lambda-\lambda'}+C'e^{\lambda x}.$$

II. Wenn die Wurzeln λ, λ' beide reell und einander gleich sind; so ist nach dem Obigen

$$V=\int\partial x\int e^{-\lambda x}R\partial x+Cx+C'$$
$$=x\int e^{-\lambda x}R\partial x-\int e^{-\lambda x}Rx\partial x+Cx+C',$$

und folglich

$$y=e^{\lambda x}\{x\int e^{-\lambda x}R\partial x-\int e^{-\lambda x}Rx\partial x\}+e^{\lambda x}(Cx+C').$$

III. Wenn endlich die Wurzeln λ, λ' beide imaginär sind, und $\lambda=\alpha+\beta\sqrt{-1}$, $\lambda'=\alpha-\beta\sqrt{-1}$, $\lambda-\lambda'=2\beta\sqrt{-1}$ ist; so ist

$$e^{\pm\lambda x}=e^{\pm\alpha x}.e^{\pm\beta x\sqrt{-1}}=e^{\pm\alpha x}(\cos\beta x\pm\sin\beta x.\sqrt{-1}),$$
$$e^{\pm\lambda' x}=e^{\pm\alpha x}.e^{\mp\beta x\sqrt{-1}}=e^{\pm\alpha x}(\cos\beta x\mp\sin\beta x.\sqrt{-1}),$$

und folglich nach I.

$$y=C'e^{\alpha x}(\cos\beta x+\sin\beta x.\sqrt{-1})-\frac{Ce}{2\beta\sqrt{-1}}(\cos\beta x-\sin\beta x.\sqrt{-1})$$
$$+\frac{\left\{\begin{array}{l}e^{\alpha x}(\cos\beta x+\sin\beta x.\sqrt{-1})\int e^{-\alpha x}(\cos\beta x-\sin\beta x.\sqrt{-1})R\partial x\\-e^{\alpha x}(\cos\beta x-\sin\beta x.\sqrt{-1})\int e^{-\alpha x}(\cos\beta x+\sin\beta x.\sqrt{-1})R\partial x\end{array}\right\}}{2\beta\sqrt{-1}},$$

woraus nach leichter Rechnung

$$y = e^{\alpha x}\left\{\left(C - \frac{C}{2\beta\sqrt{-1}}\right)\cos\beta x + \left(C' + \frac{C}{2\beta\sqrt{-1}}\right)\sin\beta x . \sqrt{-1}\right\}$$

$$+ \frac{e^{\alpha x}}{\beta}\left(\sin\beta x\int e^{-\alpha x} R\cos\beta x\,\partial x - \cos\beta x\int e^{-\alpha x} R\sin\beta x\,\partial x\right),$$

oder, wenn man der Kürze wegen

$$C' - \frac{C}{2\beta\sqrt{-1}} = c, \quad C\sqrt{-1} + \frac{C}{2\beta} = c'$$

setzt,

$$y = e^{\alpha x}(c\cos\beta x + c'\sin\beta x)$$

$$+ \frac{e^{\alpha x}}{\beta}\left(\sin\beta x\int e^{-\alpha x} R\cos\beta x\,\partial x - \cos\beta x\int e^{-\alpha x} R\sin\beta x\,\partial x\right)$$

erhalten wird.

Anhang.

Einiges über Curven von doppelter Krümmung und über krumme Flächen.

I. Tangenten der Curven von doppelter Krümmung.

§. 1.

Die Gleichungen einer Curve von doppelter Krümmung seyen

$$f(x, y) = 0, \quad \varphi(x, z) = 0,$$

wo bekanntlich die erste die Gleichung der Projection der gegebenen Curve auf der Ebene der xy, die zweite die Gleichung ihrer Projection auf der Ebene der xz ist. Die Projectionen der durch den Punkt xyz der gegebenen Curve gehenden Tangente derselben auf der Ebene der xy und der Ebene der xz sind offenbar die Tangenten der Projectionen der gegebenen Curve auf den in Rede stehenden Ebenen in den Punkten xy und xz dieser Projectionen. Weil nun, wenn wir die veränderlichen Coordinaten durch x', y', z' bezeichnen, bekanntlich die Gleichung der Tangente der Projection der gegebenen Curve auf der Ebene der xy in dem Punkte xy dieser Projection

$$y' - y = \frac{\partial y}{\partial x}(x' - x),$$

dagegen die Gleichung der Tangente der Projection der gegebenen Curve auf der Ebene der xz in dem Punkte xz dieser Projection

$$z' - z = \frac{\partial z}{\partial x}(x' - x)$$

ist, wo die Differentialquotienten $\frac{\partial y}{\partial x}$ und $\frac{\partial z}{\partial x}$ respective aus den gegebenen Gleichungen

$$f(x, y) = 0 \text{ und } \varphi(x, z) = 0$$

entwickelt werden müssen; so sind

$$y' - y = \frac{\partial y}{\partial x}(x' - x), \quad z' - z = \frac{\partial z}{\partial x}(x' - x)$$

die gesuchten Gleichungen der Tangente der gegebenen doppelt gekrümmten Curve in dem Punkte xyz dieser Curve.

Setzt man

$$f(x, y) = s, \quad \varphi(x, z) = S;$$

so ist

$$\left(\frac{\partial s}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial s}{\partial y}\right) \cdot \frac{\partial y}{\partial x} = 0, \quad \left(\frac{\partial S}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial S}{\partial z}\right) \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = 0.$$

Bestimmt man aus diesen beiden Gleichungen $\frac{\partial y}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial x}$, und führt die gefundenen Ausdrücke in die obigen Gleichungen der durch den Punkt xyz der gegebenen Curve gezogenen Tangente derselben ein; so werden diese Gleichungen leicht auf die Form

$$(x' - x)\left(\frac{\partial s}{\partial x}\right) + (y' - y)\left(\frac{\partial s}{\partial y}\right) = 0,$$

$$(x' - x)\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right) + (z' - z)\left(\frac{\partial S}{\partial z}\right) = 0$$

gebracht.

§. 2.

Die Gleichung der **Normalebene** der gegebenen doppelt gekrümmten Curve in dem Punkte xyz, d. h. der Ebene, welche durch diesen Punkt geht, und auf der durch denselben gezogenen Berührenden der gegebenen Curve senkrecht steht, sey

$$Ax' + By' + Cz' + D = 0.$$

Weil diese Ebene durch den Punkt xyz geht; so ist

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$

und folglich, wenn man die letztere Gleichung von der erstern subtrahirt,

$$A(x' - x) + B(y' - y) + C(z' - z) = 0,$$

wodurch D eliminirt ist. Weil ferner die Normalebene auf der durch den Punkt xyz der gegebenen Curve an dieselbe gezogenen Tangente senkrecht steht; so ist nach Principien der analytischen Geometrie und §. 1.

$$B = A\frac{\partial y}{\partial x}, \quad C = A\frac{\partial z}{\partial x}.$$

Also ist

$$x' - x + (y' - y)\frac{\partial y}{\partial x} + (z' - z)\frac{\partial z}{\partial x} = 0$$

die gesuchte Gleichung der Normalebene.

II. Berührende Ebenen krummer Flächen.

§. 3.

Die Gleichung einer beliebigen krummen Fläche sey

$$f(x, y, z) = 0 .$$

Die Gleichung jeder durch den Punkt xyz dieser Fläche gelegten Ebene hat nach Principien der analytischen Geometrie die Form

$$A(x' - x) + B(y' - y) + z' - z = 0 .$$

Nun lasse man sich x und y um die willkührlichen Grössen Δx und Δy ändern, und bezeichne die dritte Coordinate des den Coordinaten $x + \Delta x$, $y + \Delta y$ entsprechenden Punktes in der durch die vorstehende Gleichung bestimmten Ebene durch Z; so erhält man, wenn man in dieser Gleichung für x', y', z' respective $x + \Delta x$, $y + \Delta y$, Z setzt, leicht

$$A\Delta x + B\Delta y + Z - z = 0$$

oder

$$Z = z - A\Delta x - B\Delta y .$$

Bezeichnen wir ferner die dritte Coordinate des den Coordinaten $x + \Delta x$, $y + \Delta y$ entsprechenden Punktes in der gegebenen krummen Fläche durch $z + \Delta z$; so ist nach dem Taylor'schen Lehrsatze für Functionen mit mehrern veränderlichen Grössen

$$z + \Delta z = z + \partial z + \tfrac{1}{2} F''(\varrho) ,$$

wo ϱ einen positiven echten Bruch bezeichnet, und $F''(\varrho)$ aus $\partial^2 z$ erhalten wird, wenn man für x, y respective $x + \varrho \partial x$, $y + \varrho \partial y$ oder eigentlich $x + \varrho \Delta x$, $y + \varrho \Delta y$ setzt. Weil aber bekanntlich

$$\partial z = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)\partial x + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)\partial y = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)\Delta x + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)\Delta y$$

ist; so ist

$$z + \Delta z = z + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)\Delta x + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)\Delta y + \tfrac{1}{2} F''(\varrho) .$$

Ueberlegt man nun, dass $\partial^2 z$ die Grössen ∂x, ∂y oder eigentlich Δx, Δy in jedem Gliede in der zweiten Dimension enthält; so erhellet aus Vergleichung der beiden Gleichungen

$$Z = z - A\Delta x - B\Delta y ,$$

$$z + \Delta z = z + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)\Delta x + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)\Delta y + \tfrac{1}{2} F''(\varrho)$$

leicht, dass unter allen Ebenen, welche sich durch den Punkt xyz in der gegebenen krummen Fläche legen lassen, die sich in

der Nähe des Punktes xyz am Engsten, Innigsten oder Genauesten an die krumme Fläche anschliesst, für welche

$$-A = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right), \quad -B = \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right);$$

$$A = -\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right), \quad B = -\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)$$

ist, und dass folglich

$$-(x'-x)\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) - (y'-y)\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) + z' - z = 0$$

oder

$$(x'-x)\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) + (y'-y)\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) - (z'-z) = 0,$$

oder

$$z' - z = (x'-x)\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) + (y'-y)\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)$$

die Gleichung der, die gegebene krumme Fläche in dem Punkte xyz berührenden Ebene ist.

Die partiellen Differentialquotienten $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)$, $\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)$ müssen immer aus der gegebenen Gleichung $f(x, y, z) = 0$ entwickelt werden.

Setzt man $f(x, y, z) = s$; so ist

$$\left(\frac{\partial s}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial s}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = 0, \quad \left(\frac{\partial s}{\partial y}\right) + \left(\frac{\partial s}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = 0.$$

Bestimmt man aus diesen Gleichungen $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)$, $\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)$, und führt die Werthe in die Gleichung der berührenden Ebene ein; so erhält diese Gleichung die Form

$$(x'-x)\left(\frac{\partial s}{\partial x}\right) + (y'-y)\left(\frac{\partial s}{\partial y}\right) + (z'-z)\left(\frac{\partial s}{\partial z}\right) = 0.$$

Ist z. B.

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{z}{c}\right)^2 = 1$$

oder

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{z}{c}\right)^2 - 1 = 0$$

die Gleichung der gegebenen krummen Fläche; so ist

$$s = \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{z}{c}\right)^2 - 1$$

und folglich

$$\left(\frac{\partial s}{\partial x}\right) = \frac{2x}{a^2}, \quad \left(\frac{\partial s}{\partial y}\right) = \frac{2y}{b^2}, \quad \left(\frac{\partial s}{\partial z}\right) = \frac{2z}{c^2}.$$

Also ist

$$(x'-x)\frac{x}{a^2}+(y'-y)\frac{y}{b^2}+(z'-z)\frac{z}{c^2}=0$$

oder

$$\frac{xx'}{a^2}+\frac{yy'}{b^2}+\frac{zz'}{c^2}-\left(\frac{x}{a}\right)^2-\left(\frac{y}{b}\right)^2-\left(\frac{z}{c}\right)^2=0,$$

d. i.

$$\frac{xx'}{a^2}+\frac{yy'}{b^2}+\frac{zz'}{c^2}-1=0,$$

oder

$$\frac{xx'}{a^2}+\frac{yy'}{b^2}+\frac{zz'}{c^2}=1$$

die Gleichung der die gegebene krumme Fläche in dem Punkte xyz berührenden Ebene.

§. 4.

Sind jetzt

$$y'=Ax'+B,\quad z'=A'x'+B'$$

die Gleichungen der Normale der durch die Gleichung

$$f(x,y,z)=0$$

characterisirten krummen Fläche in dem Punkte xyz; so ist, weil diese Normale durch den Punkt xyz geht,

$$y=Ax+B,\quad z=A'x+B',$$

und folglich durch Subtraction

$$y'-y=A(x'-x),\quad z'-z=A'(x'-x).$$

Weil aber die Normale ihrem Begriffe nach auf der Berührungsebene der krummen Fläche in dem Punkte xyz senkrecht ist; so ergeben sich als Gleichungen der Normale nach Principien der analytischen Geometrie nun sehr leicht die beiden Gleichungen

$$y'-y=\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)(x'-x),\quad z'-z=-\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)(x'-x)$$

oder auch

$$x'-x=-\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)(z'-z),\quad y'-y=-\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)(z'-z).$$

III. Rectification der Curven von doppelter Krümmung.

§. 5.

Es seyen wieder

$$f(x,y)=0,\quad \varphi(x,z)=0$$

die Gleichungen einer Curve von doppelter Krümmung, und s bezeichne überhaupt einen bei dem Punkte xyz dieser Curve

sich endigenden Bogen derselben. Aendert nun x sich um Δx; so werden sich y, z, s respective um Δy, Δz, Δs ändern, und nach Principien der analytischen Geometrie ist

$$\Delta s^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2$$

oder

$$\left(\frac{\Delta s}{\Delta x}\right)^2 = 1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2 + \left(\frac{\Delta z}{\Delta x}\right)^2.$$

Also ist, wenn man Δx sich der Null nähern lässt, und zu den Gränzen übergeht,

$$\left(\frac{\partial s}{\partial x}\right)^2 = 1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2$$

oder auch

$$\partial s^2 = \partial x^2 + \partial y^2 + \partial z^2.$$

Hieraus erhält man, wenn jetzt s den zwischen den beiden, den Werthen a und b von x entsprechenden Punkten der gegebenen Curve liegenden Bogen derselben bezeichnet, unter der Voraussetzung, dass a kleiner als b ist, durch ganz ähnliche Betrachtungen wie in §. 92. und §. 93. der Integralrechnung ohne Schwierigkeit

$$s = \int_a^b \partial x \sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2}.$$

Die Differentialquotienten unter dem Wurzelzeichen sind immer aus den Gleichungen

$$f(x, y) = 0, \quad \varphi(x, z) = 0$$

der gegebenen Curve zu entwickeln.

IV. Complanation krummer Flächen.

§. 6.

Die Gleichung einer beliebigen krummen Fläche sey

$$f(x, y, z) = 0.$$

Die Gleichung der durch den Punkt xyz dieser krummen Fläche gehenden Berührungsebene derselben ist nach §. 3.

$$(x' - x)\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) + (y' - y)\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) - (z' - z) = 0.$$

Folglich ist, wenn V den Neigungswinkel dieser Berührungsebene gegen die Ebene der xy bezeichnet, nach Principien der analytischen Geometrie

$$\cos V = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}}.$$

Lässt man sich jetzt x und y um die positiven Grössen Δx und Δy verändern, und bezeichnet das Stück der gegebenen Fläche, dessen Projection auf der Ebene der xy das durch Δx und Δy bestimmte Rechteck ist, durch F; so ist nach einem bekannten Satze von den Projectionen

$$\Delta x \Delta y = F \cos V,$$

d. i. nach dem Vorhergehenden

$$\Delta x \Delta y = \frac{F}{\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}}$$

oder

$$F = \Delta x \Delta y \sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2},$$

mit desto grösserer Genauigkeit, je kleiner die Grössen Δx und Δy sind.

§. 7.

Seyen nun a, b, wo a kleiner als b seyn soll, zwei beliebige Werthe von x, und α, β, wo α kleiner als β seyn soll, zwei beliebige Werthe von y. Durch die Endpunkte von a, b lege man zwei mit der Ebene der yz, durch die Endpunkte von α, β zwei mit der Ebene der xz parallele Ebenen, und bezeichne das zwischen diesen vier auf der Ebene der xy senkrechten Ebenen liegende Stück der gegebenen krummen Fläche durch S.

Legt man überhaupt durch die Endpunkte der Coordinaten x und $x+\Delta x$ zwei mit der Ebene der yz parallele Ebenen; so ist das zwischen diesen beiden und den durch die Endpunkte von α, β mit der Ebene der xz parallel gelegten Ebenen enthaltene Stück der gegebenen krummen Fläche nach §. 6. und dem in §. 103. der Integralrechnung bewiesenen Satze offenbar

$$= \Delta x \int_\alpha^\beta \partial y \sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2},$$

mit desto grösserer Genauigkeit, je kleiner Δx ist, und folglich wieder nach dem angeführten Satze der Integralrechnung offenbar

$$S = \int_a^b \partial x \int_\alpha^\beta \partial y \sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}.$$

Dass man in dieser Formel auch x und y gegen einander vertauschen, und folglich auch

$$S = \int_\alpha^\beta \partial y \int_a^b \partial x \sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}$$

setzen kann, geht aus der obigen einfachen Betrachtung sogleich hervor. Auch braucht wohl kaum noch besonders erinnert zu werden, dass bei der ersten Integration in der ersten Formel x, in der zweiten Formel dagegen y als constant zu betrachten ist.

Gewöhnlich schreibt man die beiden obigen Formeln unter der Form

$$S=\int_a^b\int_\alpha^\beta \partial x\partial y\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}$$

und

$$S=\int_\alpha^\beta\int_a^b \partial y\partial x\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}.$$

§. 8.

Wir wollen uns jetzt in der Ebene der xy eine beliebige Curve denken, deren Gleichung $y=\varphi(x)$ seyn mag, und wollen durch diese Curve eine auf der Ebene der xy senkrechte Cylinderfläche legen. Ferner wollen wir durch die Endpunkte der Coordinaten $x=a$, $x=b$, wo a kleiner als b seyn soll, zwei mit der Ebene der yz parallele Ebenen legen, nehmen an, dass der zwischen diesen beiden Ebenen liegende Theil der durch die Gleichung $y=\varphi(x)$ bestimmten Curve ganz auf der positiven Seite der Ebene der xz liegt, und bezeichnen das zwischen der Ebene der xz, den beiden durch die Endpunkte der Coordinaten $x=a$, $x=b$ mit der Ebene der yz parallel gelegten Ebenen, und der in Rede stehenden Cylinderfläche liegende Stück der gegebenen krummen Fläche durch Σ.

Legt man überhaupt durch die Endpunkte der Coordinaten x und $x+\Delta x$ zwei mit der Ebene der yz parallele Ebenen; so ist das zwischen diesen beiden Ebenen, der in Rede stehenden Cylinderfläche und der Ebene der xz enthaltene Stück der gegebenen krummen Fläche nach §. 6. und dem in §. 103. der Integralrechnung bewiesenen Satze offenbar

$$=\Delta x\int_0^{\varphi(x)}\partial y\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2},$$

wo bei der Integration x als constant zu betrachten ist, mit desto grösserer Genauigkeit, je kleiner Δx ist.

Folglich ist nach dem angeführten Satze der Integralrechnung offenbar

$$\Sigma=\int_a^b\partial x\int_0^{\varphi(x)}\partial y\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}.$$

§. 9.

Ist die gegebene krumme Fläche z. B. eine Kegelfläche, deren Axe die Axe der z, und die kreisförmige Grundfläche in der Ebene der xy liegt; so ist, wenn a der Halbmesser der Grundfläche, b die Höhe der Spitze über der Ebene der xy ist, für jeden Punkt dieser Kegelfläche offenbar

$$\sqrt{x^2+y^2} : b - z = a : b$$

oder

$$a(b-z) = b\sqrt{x^2+y^2}$$

oder

$$a^2(b-z)^2 = b^2(x^2+y^2),$$

welches also die Gleichung der in Rede stehenden Kegelfläche ist. Aus dieser Gleichung erhält man leicht

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = -\frac{bx}{a\sqrt{x^2+y^2}}, \quad \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = -\frac{by}{a\sqrt{x^2+y^2}},$$

folglich

$$\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} = \frac{1}{a}\sqrt{a^2+b^2}.$$

Ist nun Σ zwischen der Ebene der xz, der Ebene der yz, einer durch den Endpunkt von x mit der Ebene der yz parallel gelegten Ebene, und der über dem Umfange der Grundfläche des Kegels auf der Ebene der xy senkrecht errichteten Cylinderfläche enthalten; so ist nach §. 8.

$$\Sigma = \int_0^x \partial x \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} \frac{\partial y}{a}\sqrt{a^2+b^2},$$

d. i.

$$\Sigma = \frac{1}{a}\sqrt{a^2+b^2}\int_0^x \partial x\sqrt{a^2-x^2}.$$

Aber

$$\int \partial x\sqrt{a^2-x^2} = \int\frac{(a^2-x^2)\partial x}{\sqrt{a^2-x^2}} = a^2\int\frac{\partial x}{\sqrt{a^2-x^2}} - \int\frac{x^2\,\partial x}{\sqrt{a^2-x^2}}.$$

$$\int\frac{\partial x}{\sqrt{a^2-x^2}} = \int\frac{\partial\frac{x}{a}}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}} = Arc\sin\frac{x}{a},$$

$$\int \frac{x^2 \partial x}{\sqrt{a^2 - x^2}} = -\tfrac{1}{2} x \sqrt{a^2 - x^2} + \tfrac{1}{2} a^2 \int \frac{\partial x}{\sqrt{a^2 - x^2}} \text{ (J. §. 571.)}$$

$$= -\tfrac{1}{2} x \sqrt{a^2 - x^2} + \tfrac{1}{2} a^2 \, Arc \sin \frac{x}{a},$$

also

$$\int \partial x \sqrt{a^2 - x^2} = \tfrac{1}{2} x \sqrt{a^2 - x^2} + \tfrac{1}{2} a^2 \, Arc \sin \frac{x}{a},$$

und folglich

$$\Sigma = \frac{1}{2a} \sqrt{a^2 + b^2} \cdot \left\{ x \sqrt{a^2 - x^2} + a^2 \, Arc \sin \frac{x}{a} \right\}.$$

Will man den vierten Theil der ganzen Kegelfläche haben, so muss man $x = a$ setzen. Dadurch erhält man den vierten Theil der ganzen Kegelfläche $= \tfrac{1}{4} a \pi \sqrt{a^2 + b^2}$, und also die ganze Kegelfläche $= a\pi \sqrt{a^2 + b^2}$, wie auch schon aus den Elementen der Geometrie bekannt ist.

§. 10.

In *Fig.* 4. sey $ABCF$ der Octant einer mit dem Halbmessser $OA = OB = OC = a$ aus O als Mittelpunkt beschriebenen Kugelfläche. Ueber $OA = a$ als Durchmesser sey in der Ebene der xy auf der positiven Seite der Ebene der xz ein Halbkreis beschrieben, und durch denselben eine auf der Ebene der xy senkrechte Cylinderfläche gelegt. Endlich sey durch den Endpunkt D von $OD = x$ eine mit der Ebene der yz parallele Ebene gelegt, und nun das Flächenstück $CFG = \Sigma$ zu bestimmen.

Die Gleichung der Kugelfläche ist

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2,$$

und folglich

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = -\frac{x}{z} = -\frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}},$$

$$\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = -\frac{y}{z} = -\frac{y}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}};$$

$$1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = \frac{a^2}{a^2 - x^2 - y^2}.$$

Also ist nach §. 8., wie leicht erhellen wird,

$$\Sigma = a \int_0^x \partial x \int_0^{\sqrt{x(a-x)}} \frac{\partial y}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}.$$

Aber

$$\int \frac{\partial y}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}} = \int \frac{\partial . \frac{y}{\sqrt{a^2-x^2}}}{\sqrt{1-\left(\frac{y}{\sqrt{a^2-x^2}}\right)^2}} = Arc\sin \frac{y}{\sqrt{a^2-x^2}},$$

und folglich

$$\Sigma = a\int_0^x \partial x \, Arc\sin\sqrt{\frac{x}{a+x}}\,.$$

Aber

$$\int \partial x \, Arc\sin\sqrt{\frac{x}{a+x}} = x \, Arc\sin\sqrt{\frac{x}{a+x}} - \int x \, \partial Arc\sin\sqrt{\frac{x}{a+x}}\,,$$

d. i., weil

$$\partial Arc\sin\sqrt{\frac{x}{a+x}} = \frac{a^{\frac{1}{2}}\partial x}{2(a+x)\sqrt{x}}\,;$$

$$\int\frac{\partial x}{(a+x)\sqrt{x}} = 2a^{-\frac{1}{2}} Arc\sin\sqrt{\frac{x}{a+x}}$$

ist,

$$\int \partial x \, Arc\sin\sqrt{\frac{x}{a+x}} = x \, Arc\sin\sqrt{\frac{x}{a+x}} - \tfrac{1}{2} a^{\frac{1}{2}}\int\frac{x^{\frac{1}{2}}\partial x}{a+x}\,.$$

Folglich

$$\Sigma = ax \, Arc\sin\sqrt{\frac{x}{a+x}} - \tfrac{1}{2} a^{\frac{3}{2}}\int_0^x \frac{x^{\frac{1}{2}}\partial x}{a+x}\,.$$

Aber

$$\int\frac{x^{\frac{1}{2}}\partial x}{a+x} = \int\frac{x\,\partial x}{(a+x)\sqrt{x}} = \int\frac{(a+x-a)\partial x}{(a+x)\sqrt{x}}$$

$$= \int x^{-\frac{1}{2}}\partial x - a\int\frac{\partial x}{(a+x)\sqrt{x}} = 2x^{\frac{1}{2}} - a\int\frac{\partial x}{(a+x)\sqrt{x}}\,,$$

oder nach dem Obigen

$$\int_0^x \frac{x^{\frac{1}{2}}\partial x}{a+x} = 2x^{\frac{1}{2}} - 2a^{\frac{1}{2}} Arc\sin\sqrt{\frac{x}{a+x}}\,.$$

Folglich ist

$$\Sigma = a(a+x)\, Arc\sin\sqrt{\frac{x}{a+x}} - a^{\frac{3}{2}} x^{\frac{1}{2}}\,.$$

Bezeichnen wir das Flächenstück *BCEF* durch Σ'; so ist, weil man sich auch über dem Kreisquadranten *AB* eine auf der

Ebene der xy senkrechte Cylinderfläche errichtet denken kann, nach §. 8. offenbar

$$\Sigma' = a\int_0^x \partial x \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} \frac{\partial y}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}},$$

d. i. nach dem Vorhergehenden, wie leicht erhellen wird,

$$\Sigma = a\int_0^x \tfrac{1}{2}\pi\,\partial x = \tfrac{1}{2}a\pi x.$$

Ist nun Σ'' das Flächenstück $BCEG$; so ist

$$\Sigma'' = \Sigma' - \Sigma$$

$$= ax\left(\tfrac{1}{2}\pi - Arc\sin\sqrt{\frac{x}{a+x}}\right) - a^2 Arc\sin\sqrt{\frac{x}{a+x}} + a^{\frac{3}{2}}x^{\frac{1}{2}}$$

$$= a\left(x\,Arc\cos\sqrt{\frac{x}{a+x}} - a\,Arc\sin\sqrt{\frac{x}{a+x}}\right) + a^{\frac{3}{2}}x^{\frac{1}{2}}.$$

Will man das Flächenstück $ABCG$ haben; so muss man in dieser Gleichung $x = a$ setzen, und erhält dadurch leicht dieses Flächenstück $= a^2$.

V. Cubirung der durch krumme Flächen begränzten Körper.

§. 11.

Die Gleichung der begränzenden krummen Fläche sey

$$f(x, y, z) = 0;$$

xyz sey ein beliebiger Punkt derselben, wobei wir z als positiv annehmen wollen. Lässt man x und y sich um die positiven Grössen Δx und Δy ändern, legt durch jeden der beiden Punkte xy und $x + \Delta x$, $y + \Delta y$ zwei Ebenen, von denen die eine mit der Ebene der xz, die andere mit der Ebene der yz parallel ist, und bezeichnet das Volumen des von diesen vier auf der Ebene der xy senkrechten Ebenen und der gegebenen krummen Fläche eingeschlossenen, auf der Ebene der xy stehenden prismatischen Körpers durch P; so ist offenbar mit desto grösserer Genauigkeit, je kleiner die Grössen Δx und Δy sind,

$$P = z\Delta x\Delta y.$$

Sind nun wieder a, b, wo a kleiner als b seyn soll, zwei beliebige Werthe von x, dagegen α, β, wo α kleiner als β

seyn soll, zwei beliebige Werthe von y; so kann man sich durch die Endpunkte von a, b wie in §. 7. zwei mit der Ebene der yz, durch die Endpunkte von α, β zwei mit der Ebene der xz parallele Ebenen gelegt denken, und erhält dann, wenn man das Volumen des von diesen vier Ebenen, der Ebene der xy und der gegebenen krummen Fläche eingeschlossenen Körpers durch V bezeichnet, auf ganz ähnliche Art wie in §. 7.

$$V = \int_a^b \partial x \int_\alpha^\beta z \partial y = \int_\alpha^\beta \partial y \int_a^b z \partial x,$$

oder

$$V = \int_a^b \int_\alpha^\beta z \partial x \partial y = \int_\alpha^\beta \int_a^b z \partial y \partial x.$$

Annehmen wollen wir hierbei übrigens, dass z in der ganzen Ausdehnung des Körpers, dessen Volumen V bestimmt werden soll, positiv sey.

Macht man ferner eine ganz ähnliche Construction wie in §. 8. und bezeichnet das Volumen des von der Ebene der xy, den beiden der Ebene der yz parallel gelegten Ebenen, der Ebene der xz, der Cylinderfläche und der gegebenen krummen Fläche eingeschlossenen Körpers durch W; so ist auf ganz ähnliche Art wie in §. 8.

$$W = \int_a^b \partial x \int_0^{\varphi(x)} z \partial y.$$

§. 12.

In *Fig.* 5. sey ABC der vierte Theil einer Kegelfläche von der Art der in §. 9. betrachteten, deren Gleichung also nach §. 9.

$$a^2(b-z)^2 = b^2(x^2+y^2)$$

oder

$$z = \frac{b}{a}(a - \sqrt{x^2+y^2})$$

ist. Legen wir nun durch den Endpunkt D von $OD = x$ eine mit der Ebene der yz parallele Ebene DEF und bezeichnen das Volumen des Körpers $ADEF$ durch W; so ist nach §. 11.

$$W = \frac{b}{a}\int_x^a \partial x \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} (a - \sqrt{x^2+y^2}) \partial y.$$

Nun ist

$$\int (a - \sqrt{x^2+y^2})\partial y = ay - \int \partial y \sqrt{x^2+y^2}$$

$$= ay - \tfrac{1}{2} y \sqrt{x^2+y^2} - \tfrac{1}{2}x^2 \int \frac{\partial y}{\sqrt{x^2+y^2}} \text{ (J. §. 56.)}$$

$$= ay - \tfrac{1}{2} y \sqrt{x^2+y^2} - \tfrac{1}{2}x^2 l(y + \sqrt{x^2+y^2}) \text{ (J. §. 34. I.)}$$

und folglich

$$\int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} (a - \sqrt{x^2+y^2})\partial y = \tfrac{1}{2} a \sqrt{a^2-x^2} - \tfrac{1}{2}x^2 l \frac{a + \sqrt{a^2-x^2}}{x}.$$

Also ist

$$W = \frac{b}{2a}\left(a \int_x^a \partial x \sqrt{a^2-x^2} - \int_x^a x^2 \partial x \, l \frac{a+\sqrt{a^2-x^2}}{x}\right).$$

Nach §. 9. ist

$$\int_x^a \partial x \sqrt{a^2-x^2} = -\tfrac{1}{2} x \sqrt{a^2-x^2} + \tfrac{1}{2}a^2\left(\tfrac{1}{2}\pi - \operatorname{Arc} \sin \frac{x}{a}\right)$$

$$= -\tfrac{1}{2} x \sqrt{a^2-x^2} + \tfrac{1}{2} a^2 \operatorname{Arc} \cos \frac{x}{a}.$$

Ferner ist

$$\int x^2 \partial x \, l \frac{a+\sqrt{a^2-x^2}}{x}$$

$$= \tfrac{1}{3} x^3 l \frac{a+\sqrt{a^2-x^2}}{x} - \tfrac{1}{3} \int x^3 \partial l \frac{a+\sqrt{a^2-x^2}}{x}$$

$$= \tfrac{1}{3} x^3 l \frac{a+\sqrt{a^2-x^2}}{x} + \tfrac{1}{3} a \int \frac{x^2 \partial x}{\sqrt{a^2-x^2}}$$

$$= \tfrac{1}{3} x^3 l \frac{a+\sqrt{a^2-x^2}}{x} - \tfrac{1}{6} a x \sqrt{a^2-x^2} + \tfrac{1}{6} a^3 \operatorname{Arc} \sin \frac{x}{a}$$

(§. 9.)

und folglich

$$\int_x^a x^2 \partial x \, l \frac{a+\sqrt{a^2-x^2}}{x}$$

$$= -\tfrac{1}{3} x^3 l \frac{a+\sqrt{a^2-x^2}}{x} + \tfrac{1}{6} a x \sqrt{a^2-x^2} + \tfrac{1}{6} a^3 \operatorname{Arc} \cos \frac{x}{a}.$$

Also ist

$$W = \frac{b}{2a}\left\{\tfrac{1}{3}a^3 \, Arc\cos\frac{x}{a} - \tfrac{2}{3}ax\sqrt{a^2-x^2} + \tfrac{1}{3}x^3 \, l\,\frac{a+\sqrt{a^2-x^2}}{x}\right\},$$

$$2W = \frac{b}{a}\left\{\tfrac{1}{3}a^3 \, Arc\cos\frac{x}{a} - \tfrac{2}{3}ax\sqrt{a^2-x^2} + \tfrac{1}{3}x^3 \, l\,\frac{a+\sqrt{a^2-x^2}}{x}\right\}.$$

Das Volumen W' des Körpers $BCFDEO$ erhält man, wenn man W von dem vierten Theile des ganzen Kegels, d. i. von $\frac{1}{12}a^2b\pi$ abzieht. Dadurch erhält man

$$W' = \frac{b}{2a}\left\{\tfrac{1}{3}a^3 \, Arc\sin\frac{x}{a} + \tfrac{2}{3}ax\sqrt{a^2-x^2} - \tfrac{1}{3}x^3 \, l\,\frac{a+\sqrt{a^2-x^2}}{x}\right\},$$

$$2W' = \frac{b}{a}\left\{\tfrac{1}{3}a^3 \, Arc\sin\frac{x}{a} + \tfrac{2}{3}ax\sqrt{a^2-x^2} - \tfrac{1}{3}x^3 \, l\,\frac{a+\sqrt{a^2-x^2}}{x}\right\}.$$

Druck von C. P. Melzer in Leipzig.

Tab. I.

B

Fig. 2

A

E D N M C

Fig. 7

P

N

Q

O

K

B

T A P M T

Fig. 8

P' P" P T' T"

Q" Q Q'

P'

T'

Q'

Fig. 10

Q Q'

P' T'

T'

P'

Q'

T" P"

Tab. II.

Fig. 17

T''
P''
Q''
A
Q

Fig. 19

Fig. 21

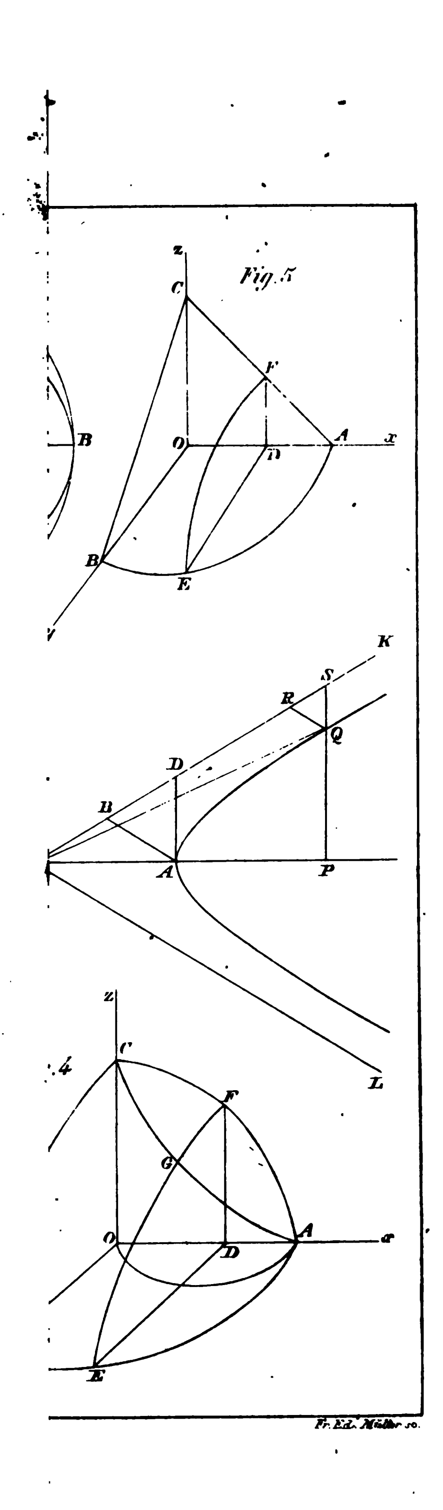
N
Q
P

Fig. 25

P

Fig. 27

S
B
C
P
A'


Fig. 5
z
C
F
B
O
A
x
D
B
E
K
S
R
Q
D
B
A
P
L
z
C
.4
F
G
O
A
x
D
E
Fr. Ed. Müller sc.

